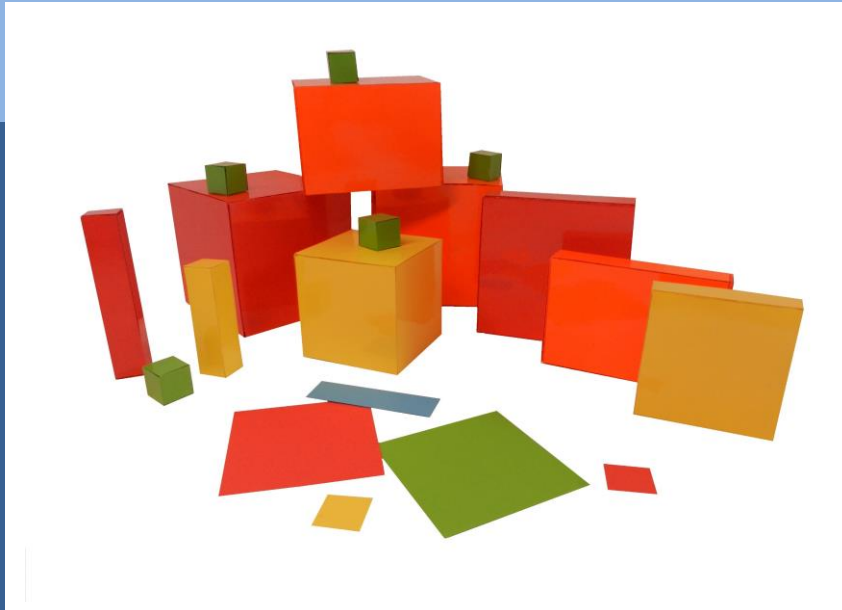




Visuele wiskunde

**Een theoretische en praktische
uiteenzetting over visuele wiskunde en de
toepassingen in het onderwijs 2017-2018**



Campus Torhout

Astrid De Vriendt

3 BASO Wiskunde - Biologie

Dhr. Briers/ Dhr. Standaert

Een theoretische en praktische
uiteenzetting over visuele wiskunde en de
toepassingen in het onderwijs 2017-2018

Woord vooraf

U bent momenteel in het bezit van mijn bachelorproef over visuele wiskunde. Deze bachelorproef schreef ik naar aanleiding van de laatste fase in mijn opleiding aan Vives Torhout tot leerkracht in het secundair onderwijs voor de vakken wiskunde en biologie.

Ik kan het schrijven van deze bachelorproef vergelijken met een beklimming van een berg. Met heel veel moed en een rugzak vol verwachtingen en doelen begon ik aan de reis. De berg had pieken en dalen. Soms was er een omleiding die mij verplichtte om een andere weg in te slaan. Aan het begin kon ik de top niet duidelijk zien. Ik wist niet waar ik zou uitkomen. De weg was amper bewandeld door voorgangers. Ik baseerde mij op andere routes die in een andere context bewandeld waren. Mooie stenen die ik onderweg had verzameld, moest ik uiteindelijk achterlaten om op tijd de top te kunnen bereiken. Soms was er ook tegenwind in de vorm van andere projecten, zoals het Honours Degree, een bijscholing, een opleidingsaudit, een ander voortraject, stages... Hierdoor daalde de klimsnelheid en de motivatie. Af en toe scheen gelukkig ook de zon. Een document, een inspiratiebron, een stagementor, een bezorgde moeder... Hierdoor kreeg ik opnieuw zuurstof om verder te klimmen. Uiteindelijk bereikte ik net op tijd de top. Persoonlijk vind ik het uitzicht hier zeer mooi. Ik kijk niet alleen terug op een mooi resultaat, maar ook op een vermoeiende, maar leerrijke reis.

Bij het reizen had ik gelukkig ook de steun van enkele gidsen. Bij deze wil ik ook de tijd nemen om mijn begeleiders te bedanken. Ten eerste bedankt ik mijn twee mentoren van Vives. Het eerste half jaar werd ik begeleid door dhr. Standaert. Hij ging mee in mijn enthousiasme en hij zorgde voor de rugzak aan inspiratie. Mijn tweede begeleider is dhr. Briers. Nadat dhr. Standaert op pensioen ging, nam hij zonder problemen de begeleiding over. Bij deze wil ik hem bedanken voor de vrijheid die hij mij gegeven heeft. Door mijn drukke schema was het voor mij niet mogelijk om te voldoen aan de opgelegde deadlines van Vives. Ik ben er ook van overtuigd dat onderzoek niet in delen kan afgeleverd worden. Ik heb alles door elkaar en met elkaar verwerkt. Terwijl ik literatuur las, maakte ik modellen, stelde ik een enquête op... Na de enquête las ik nieuwe bronnen. Terwijl ik de theorie opstelde, zocht ik nog nieuwe bronnen op. Het afleveren van een literatuurstudie zes maanden voor de einddatum was dan ook niet mogelijk met mijn manier van werken. Hij gaf mij het vertrouwen om deze bachelorproef tot een goed einde te brengen. Af en toe polste hij naar het verloop. Ik wist ook dat de laatste week voor de deadline cruciaal zou worden. Tot op het laatste moment heeft hij mij de vrijheid gegeven en daar ben ik hem zeer dankbaar voor. Ik had dit resultaat anders niet kunnen bereiken. Ik wil ook meneer Ally nog bedanken. Tijdens één van de stagebezoeken nam hij de tijd om over de bachelorproef te praten. Ik zat op dat moment met het probleem dat ik zeer veel informatie verzameld had en ik de grote lijnen niet meer zag. Hij motiveerde me om door te zetten en binnen de periode die ik had, de kernelementen uit mijn bachelorproef te halen. Door alles nog eens op een rij te kunnen plaatsen, kreeg ik een tweede adem. Ik wil ook iedereen van mijn vrienden binnen Vives bedanken. Ik ben heel intensief bezig geweest met het onderwerp. Dat kwam dan ook vaak in gesprekken naar boven. Door hun mening te geven en kritische opmerkingen te maken bij mijn enthousiaste ideeën, ging ik dieper over het onderwerp denken. Ik wil ook mijn twee stagementoren in het VMS bedanken, namelijk Filip Tanghe en Charlotte Mestdag. Ze boden ondersteuning en aanmoediging bij het ontwikkelen van materiaal. Ze deden mij herinneren aan de noden en mogelijkheden van de praktijk. Ik bedankt ook de vier leerkrachten met wie ik een interview mocht afnemen. Het is een opgave om hier tijd voor uit te trekken. Dat deden ze ook zonder moeite, zolang ik nog vragen had.

Als laatste wil ik ook mijn ouders en zus bedanken. Zij waren de belangrijkste gidsen tijdens deze reis, door hun steun, de aanmoedigingen, de wijze raad, de vrijheid om alles te proberen, de opoffering van de zolderruimte voor het materiaal... Zonder hen zou het nu niet mogelijk zijn deze bachelorproef te lezen.

Inhoudsopgave

Woord vooraf	2
Inhoudsopgave	3
Illustraties.....	5
Inleiding 7	
1 Evolutie van het Vlaamse wiskundeonderwijs	9
1.1 Het mechanistisch wiskundeonderwijs.....	9
1.2 Het structuralistisch wiskundeonderwijs.....	9
1.3 Het realistisch wiskundeonderwijs	11
1.4 Enkele andere ontwikkelingen in het Vlaamse onderwijs	12
1.5 Resultaten van het Vlaamse wiskundeonderwijs	13
2 Theorieën rond het belang van visuele beelden in wiskunde	16
2.1 Cognitive theory of multimedia learning: Mayer.....	16
2.2 De theorieën van het realistisch wiskundeonderwijs.....	20
2.3 De invloed van de reformpedagogen	21
2.4 Ijsbergdidactiek.....	25
2.5 De theorie van Jo Boaler	27
2.6 Andere interessante inzichten	31
3 Visuele wiskunde: onderzoek West-Vlaanderen 2018	33
3.1 Methode.....	33
3.2 Resultaten	34
3.3 Discussie en besluit bij het onderzoek.....	47
4 Visuele wiskunde in de praktijk: algemene richtlijnen	49
4.1 Enkele richtlijnen bij het versterken van de visualisatie in de les	49
5 Visuele wiskunde in de praktijk: voorbeelden	50
5.1 Inleiding.....	50
5.2 Algebrategels	51
5.3 Algeblokken.....	65
5.4 Ruimtelijk inzicht.....	76
5.5 Bordcanvas.....	77
5.6 Posters in de klas.....	81
5.7 Kunst in de klas	81
5.8 Extra modellen	82
5.9 Wat met digitale ondersteuning?	83
5.10 Ondersteunend: wiskundeportfolio.....	83
6 Discussie en verder onderzoek	84
7 Besluit	85

8	Epiloog	87
9	Bijlagen	88
9.1	Bijlage 1: PISA-resultaten	89
9.2	Bijlage 2: Interview Willem Beeuwsaert	90
9.3	Bijlage 3: Interview Els Van Haecke	94
9.4	Bijlage 4: Interview Filip Tanghe	97
9.5	Bijlage 5: Interview Johanna Mus	100
9.6	Bijlage 6: Mail met de pedagogische begeleider	102
9.7	Bijlage 7: foto's modellen in klaslokalen.....	102
9.8	Bijlage 8: Verslag Tools 4 schools.....	105
9.9	Bijlage 9: Voorbeeldenquête	107
9.10	Bijlage 10: Voorbeeld wiskundeportfolio.....	113
10	Literatuurlijst.....	121

Illustraties

Figuur 1: Raamwerk PISA 2015.....	13
Figuur 2: Gemiddelde voor score voor wiskunde 2015, 2012 en 2003.....	14
Figuur 3: Basisvorming ASO: behaalde eindtermen	15
Figuur 4: Behaalde specifieke eindtermen ASO	15
Figuur 5: Behaalde specifieke eindtermen TSO/KSO	15
Figuur 6: Cognitive theory of multimedia learning	16
Figuur 7: Montessori met puzzel over vlakke figuren	23
Figuur 8: rekenblokken	23
Figuur 9: Montessori kast	23
Figuur 10: Montessori tafel	23
Figuur 11: Ijsbergdidactiek	25
Figuur 12: CPA-model	26
Figuur 13: Netwerk in het brein dat wordt geactiveerd bij het leren van wiskundeconcepten	27
Figuur 14: gebaren om de betekenis van de rico te duiden.....	29
Figuur 15: Tewerkstelling van de leerkrachten uit de steekproef.....	34
Figuur 16: Onderwijservaring van de leerkrachten uit de steekproef	34
Figuur 17: Resultaten: Belang beeldvorming	35
Figuur 18: Resultaten: Gebruik verschillende strategieën	35
Figuur 19: Resultaten: Inzetten op visualisatie	35
Figuur 20: dynamisch model Pythagoras	36
Figuur 21: Resultaten: Nut model Pythagoras	36
Figuur 22: Resultaten: Bekendheid algeblokken	36
Figuur 23: Openheid doorheen de carrière.....	38
Figuur 24: Gebruik modellen	38
Figuur 25: Resultaten: volgen van het handboek.....	40
Figuur 26: Stelling growth mindset	42
Figuur 27: 18x5 op een visuele manier voorstellen zonder modellen	50
Figuur 28: algetegels pakket.....	51
Figuur 29: algebrategels in realiteit.....	64
Figuur 30: Algeblokken	65
Figuur 31: telmat	67
Figuur 32: balansmat.....	68
Figuur 33: De kwadrantmat.....	70
Figuur 34: Statische ruimtefiguren	76
Figuur 35: Dynamische ruimtefiguren.....	76
Figuur 36: nagels in een bordcanvas	77
Figuur 37: schema gelijkbenige driehoek	77
Figuur 38: Benamingen gelijkbenige driehoek	77
Figuur 39: goniometrische cirkel: model.....	78
Figuur 40: bordcanvas met leerstofoverzicht.....	78
Figuur 41: model venndiagram	79
Figuur 42: Model functieleer	79
Figuur 43: Verzamelingenleer	80
Figuur 44: Differentiatie-model	80
Figuur 45: Poster Pythagoras (Ardoe)	81

Figuur 46: Escherschilderij.....	81
Figuur 47: wortelspiraal.....	81
Figuur 48: Tekeningen	82
Figuur 49: model draaihoek.....	82
Figuur 50: muurschema.....	82
Figuur 51: Paard.....	83
Figuur 52: Geogebra-applet: constructie ingeschreven cirkel	83
Figuur 53: Poster lokaal Willem Beeuwsaert.....	102
Figuur 54: Poster 2 lokaal Willem Beeuwsaert.....	102
Figuur 55: Poster Ardooie.....	103
Figuur 56: Poster Ardooie.....	103
Figuur 57: Toren van Hanoi in Ardooie.....	103
Figuur 58: Schema op prikbord (Willem Beeuwsaert)	103
Figuur 59: Schema op prikbord (Willem Beeuwsaert)	103
Figuur 60: Houten modellen (Willem Beeuwsaert).....	104
Figuur 61: Knex in Ardooie	104
Figuur 62: Gevel wiskundelokaal in Ardooie	104
Figuur 63: Houten modellen (Ardooie)	104
Figuur 64: Model om aanzichten te leren (Willem Beeuwsaert)	104
Figuur 65: Tandentstoker model (Willem Beeuwsaert)	104
Figuur 66: Wiskundekast Willem Beeuwsaert.....	105
Figuur 67: Transparante blokken voor ruimtelijk inzicht (Willem Beeuwsaert)	105

Inleiding

Wanneer we een biologieklas binnenwandelen, kunnen we niet ontkennen dat er aan biologie wordt gedaan. We vinden modellen in plastic, op sterk water, modellen die uitneembare delen hebben... De leerlingen krijgen een duidelijk beeld van de leerstof. Stap echter een wiskundeklas binnen en we vinden dergelijke modellen veel minder terug. Is visualiseren in wiskunde dan minder belangrijk of wordt er misschien zeer visueel op een andere manier gewerkt?

Sommige leerlingen vinden wiskunde zeer abstract, on(be)grijpbaar en saai. Met visuele wiskunde probeer ik hier iets aan te doen. Mijn hypothese is namelijk dat leerlingen wiskunde sneller en beter begrijpen als ze de wiskunde zien en hierdoor flexibeler kunnen omgaan met de leerstof. De focus van dit werk ligt op de fysieke, manipuleerbare modellen in de wiskundeklas. Er werd al veel geschreven over geogebra en andere dynamische ICT-tools. Met de focus te verleggen op materialen die de leerlingen kunnen vastnemen, probeer ik een evenwicht te zoeken met het aantal projecties in de lessen tegenover de offline-mogelijkheden. Variatie is volgens mij zeer belangrijk om de aandacht te houden. In deze digitale wereld is het misschien ook leuk om iets fysiek als leermiddel te gebruiken.

De hypothese dat leerlingen wiskunde sneller en beter begrijpen als ze wiskunde zien en hierdoor flexibeler kunnen omgaan met de leerstof, is echter te groot om in één bachelorproef een antwoord op te zoeken. Het doel van deze bachelorproef bevat een onderdeel van deze hypothese. Het is een startpunt, een inspiratiebron voor verder onderzoek. In dit werk zullen we het hebben over visuele wiskunde op een overkoepelde manier.

De hoofdonderzoeksvraag waarrond gewerkt wordt gaat als volgt: hoe kunnen we de beeldvorming van wiskundeconcepten verbeteren door de instructiemethode aan te passen bij leerlingen van de eerste en tweede graad secundair onderwijs in West-Vlaanderen in 2018? Deze vraag wordt in deelonderzoeksvragen opgedeeld en besproken in overeenkomstige delen van dit werk.

In het theoretische gedeelte van de bachelorproef verzamelde ik de theorieën van enkele onderzoekers die al eerder schreven over het effect van visualiseren op het leren. De deelonderzoeksvragen waar een antwoord op wordt gezocht in dit deel staan hieronder opgesomd:

- Welke trends zijn er vandaag aanwezig in het Vlaamse wiskundeonderwijs?
- Welke noden heeft het Vlaamse wiskundeonderwijs in 2018?
- Welke didactische principes en theorieën zijn van toepassing bij visuele lessen met modellen?
- Welk leereffect hebben de manipuleerbare modellen?

In het praktisch gedeelte voerde ik ten eerste een kleinschalig onderzoek uit. Hier horen zeven deelonderzoeksvragen bij.

- Hoe staan leerkrachten tegenover het gebruik van concreet materiaal?
- Hoe belangrijk vinden deze leerkrachten beeldvorming bij het leren van wiskunde?
- Welke modellen gebruiken leerkrachten?
- Waar komen deze modellen vandaan?
- Wie betaalt deze materialen?
- Is er een verband tussen de lengte van de carrière en het gebruik van modellen?
- Hoe open staan leerkrachten om nieuwe materialen te testen?

Het tweede gedeelte van deze bachelorproef gaat over de specifieke manipuleerbare modellen. Ik leg de focus op het zoeken naar mogelijkheden voor algebra. Dat is volgens mij het moeilijkste grijpbaar voor leerlingen. Het kunnen omgaan met variabelen wordt ook steeds belangrijker naarmate de leerlingen ouder worden en verder studeren. Naast de modellen voor algebra, geef ik ook enkele andere mogelijkheden voor de andere thema's om de leerstof meer visueel te maken. Dat is dan ook de deelonderzoeksvraag die hierbij hoort:

- Welke modellen kunnen ingezet worden om de leerstof meer visueel te maken?

Mijn hoop is om met deze bachelorproef andere leerkrachten te inspireren. Ik zal niet alle mogelijkheden kunnen geven om lessen visueel te maken. Ik denk dat de ervaring met leerlingen en de moeilijkheden in de leerstof een sterker startpunt zijn om modellen te bedenken. Ik geloof erin dat leerkrachten dit ook zelf kunnen. Door specifieke voorbeelden te zien, hoop ik een denkproces op gang te trekken. Het is niet de bedoeling om van elke les een knutsel-feest te maken. Ik hoop dat het aanzet om na te denken over de manier waarop we wiskunde aanbrengen. Waar kan elke leerkracht misschien een visueel element toevoegen in hun eigen curriculum? Het overwegen van andere alternatieven zou voor mij al een grote overwinning zijn.

1 Evolutie van het Vlaamse wiskundeonderwijs

Als we naar de toekomst van modellen in het onderwijs willen kijken, dan moeten we eerst weten welke evoluties er al geweest zijn. Welke media zijn al uitgetest en welke leereffecten hadden deze? Welke trends zijn er doorheen de evolutie van het onderwijs in Vlaanderen opgekomen en weggegaan? Hoe is het onderwijs dat we vandaag kennen met andere woorden ontstaan? Op deze vragen worden in dit deel een antwoord geformuleerd.

De nadruk op realisme in het wiskundeonderwijs kwam er niet zomaar. Daar zijn enkele evoluties aan vooraf gegaan in het Vlaamse onderwijs. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010)

1.1 Het mechanistisch wiskundeonderwijs

De oudste manier van wiskundeonderwijs noemt men het mechanistisch rekenonderwijs of ook wel het traditioneel rekenonderwijs. Ook vandaag zijn daar echter nog duidelijke sporen van terug te vinden in leermaterialen en leermiddelen. (Verschaffel, 2005) De basis van deze theorie werd uitwerkt door Gagné in 1969. (Gravemeijer, 1993) In het mechanistisch rekenonderwijs kijk je naar wiskunde vanuit een taakanalytische onderwijstheorie. Hier gaat men uit van een sterk geleidelijkheidsprincipe. Om moeilijke, complexe oefeningen te kunnen oplossen, moet men eerst alles op het basisniveau beheersen. Het eerste dat de leerlingen hiervoor moeten kennen, zijn de regels rond het te leren onderwerp. De leerkracht doceert deze aan het begin van de nieuwe leerstof en geleidelijk bouwt men op naar de hogere niveaus. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010) Er is dus een sterke leerhiërarchie aanwezig. De beleidsmakers van het wiskundeonderwijs hielden zich dan ook vooral bezig met het uitsplitsen van de leerstof. Ze dachten na over wat eerst gekend moet zijn om verder te kunnen gaan. Ze kwamen tot een vaste volgorde waar leerkrachten ook niet van mochten afwijken. (Gravemeijer, 1993) De leerkrachten kregen een standaardaanpak voor elk onderwerp. Door demonstraties aan het bord brachten ze deze werkwijze over aan hun klas. Voor de leerlingen lag de focus op het uitgebreid inoefenen van deze aanpak op papier. Zelfstandig werken was hierbij zeer belangrijk. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010) Soms werden de leerlingen ook nog opgedeeld in homogene niveaugroepen. (Treffers & de Goeij, 2004) Concreet materiaal werd zelden gebruikt, tenzij in een korte oriënteringsfase. (KNAW, 2009)

In de jaren '50 en '60' werd het mechanistisch rekenonderwijs in vraag gesteld. Enkele innovaties volgden hieruit. We kunnen drie verschillende wegen van vernieuwing onderscheiden. Ten eerste waren er de aritmetische en structurele richting die uiteindelijk behoorden tot het structuralistisch rekenonderwijs. Een tweede richting was gericht op een empirische aanpak, waaruit het realistisch rekenonderwijs ontstond. (Treffers & de Goeij, 2004)

1.2 Het structuralistisch wiskundeonderwijs

Het structuralistisch rekenonderwijs heeft kritiek op de strikte aanpak van het mechanistisch rekenonderwijs. Ze leggen de klemtoon op het ontwikkelen van wiskundig inzicht en begrip. (van Gelder, Wijdeveld, Goffree, & Krooshof, 1968) In plaats van het aanleren van mechanismen met een focus op reproductie, moet het onderwijs de basiselementen, zoals verzamelingen en logica, aanreiken. Door de specifieke structuur en verworven inzichten, kunnen de leerlingen de verdere afleidingen zelf vinden. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003) Deze stroming werd gerealiseerd door de implementatie van de Moderne Wiskunde of 'New Math'. De Vlaamse pedagoog Papy heeft er onder andere voor gezorgd dat deze moderne wiskunde doorheen het Vlaamse onderwijslandschap sterk verspreid werd. Uiteindelijk zorgde dat ook voor de herziening van de leerplannen van het secundair onderwijs in 1986. (Verschaffel, 2005)

Deze hervorming wordt gezien als een van de meest ingrijpende en spectaculaire innovaties uit de geschiedenis van het Belgisch onderwijs. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003)

Het uitgangspunt van het structuralistisch rekenonderwijs is de klassieke Griekse wiskunde met Euclides als hoofdrolspeler. Men wilde teruggaan naar deze methode om naar wiskunde te kijken. De didactiek baseerde zich op het aanleren van enkele axioma's waarmee een fundament wordt gelegd waarop de verdere wiskunde kan gebouwd worden. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003) In de praktijk was de methode van Dienes in de jaren '70 zeer populair. Een eerste onderdeel van deze theorie is de opdeling van de lessen in drie grote fasen. Eerst was er het voorbereidende spel, waarin de leerlingen grotere vrijheid krijgen om kennis te maken met het onderwerp. De tweede fase was het gestructureerde spel, waar het kind de kans krijg om gericht ervaringen op te doen om tot begrip te kunnen komen. De laatste fase was het oefenspel om het begrip en de ervaringen vast te leggen. Ook in het nieuwe leerplan lag de klemtoon vooral op het jargon, de symbolen, denkbeelden, voorstellingswijzen en technieken. (Verschaffel, 2005) Materiaal, voornamelijk blokken, werd ingezet om het spel te ondersteunen. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010) Het experiment wordt gebruikt om wiskundig redeneren te stimuleren. (van Gelder, Wijdeveld, Goffree, & Krooshof, 1968) Naast het experiment was er in die periode ook veel interesse in het principe van de veelvoudige inbedding of multiple embodiment. Dienes had het hier over de nood aan ervaringen om te kunnen abstraheren en generaliseren. (van Gelder, Wijdeveld, Goffree, & Krooshof, 1968) Deze abstractie vormt een kernaspect van de Moderne Wiskunde. (KNAW, 2009) Verzamelingenleer was een centraal onderwerp binnen de New Math. Het is namelijk een belangrijk startpunt om tot een goed getalbegrip te komen. (van Gelder, Wijdeveld, Goffree, & Krooshof, 1968) De verzamelingentaal werd dan ook zeer vroeg in het curriculum aangeleerd en is ook een kenmerk van de Moderne wiskunde binnen de aritmetische stroming. (Treffers, 1978) Als gevolg daarvan kregen we te maken met wiskundeboeken vol kleurrijke venndiagrammen en pijldiagrammen. (Verschaffel, 2005)

Samenvattend kunnen we besluiten dat de structuralistisch georiënteerde Moderne Wiskunde zich meer gaat richten op wiskundige structuren en verbanden met de nadruk op het verwerven van inzicht door middel van spel en onderzoek. (Treffers, 1978)

Toch kwam er in Vlaanderen heel wat kritiek op de structuralistische aanpak. De nieuwe methode stond haaks op deze van het traditioneel onderwijs, waar mechanismen aangeleerd worden zonder het logisch denkvermogen aan te spreken. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010) In vergelijking met het traditioneel wiskundeonderwijs ondervonden leerkrachten problemen in de klaspraktijk door de plotse vrijheid. De efficiëntie lag volgens sommigen ook veel lager in het Moderne Onderwijs. Een andere groep tegenstanders verzamelde zich rond het argument dat intuïtie, voorkennis en informele strategieën niet verworpen mogen worden. Leerlingen kennen al bij de start van het leerproces bepaalde begrippen. In het structuralistisch wiskundeonderwijs worden abstracte definities van wiskundige concepten als uitgangspunt genomen, omdat deze door de eeuwen heen op die manier geëvolueerd zijn. De wiskundendidacticus Freudenthal verwierp deze structuralistische aanpak en verdedigde een meer realistische benadering. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003) Deze klachten kregen echter een lange periode niet voldoende aandacht omwille van politieke redenen. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003)

We kunnen de problemen met het traditioneel wiskundeonderwijs opdelen in drie categorieën. Ten eerste is er de stelling dat het werken met axioma's geen linken legt met een betekenisvolle context. De leerlingen krijgen enkele basiselementen voorgeschoteld zonder veel uitleg vanwaar ze komen of waartoe ze leiden. Als gevolg hiervan hebben leerlingen weinig voeling met de wiskundige concepten en kunnen ze zich weinig tot niets voorstellen bij de abstracte regels. Ten tweede is er het probleem rond inerte kennis. Door de regels los te koppelen van concrete situatie, verliezen de abstracte structuren betekenis. De leerstof is voor de leerlingen geen dynamisch, werkbaar geheel. Het is pas wanneer de link met concrete situaties gelegd wordt, dat de abstracte structuren multi-inzetbaar worden tijdens het maken van nieuwe oefeningen.

Ten derde geeft men ook kritiek op de noodzaak om alles eerst te definiëren en te bewijzen alvorens het te gebruiken. Dat gaat namelijk hand in hand met het eisen van correct taal- en symboolgebruik, wat de verwerking van de leerstof nodeloos moeilijk maakt. De leerlingen vervreemden steeds meer van de leerstof. Het enige dat de leerlingen onthouden van de wiskundeles zijn lege begrippen en symbolen. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003)

Er werd ook naar de buurlanden gekeken. Nederland kende de structuralistische richting niet en voegde al eerder het realistische rekenonderwijs in. (Verschaffel, 2005) Ook in de rest van Europa voltrok een gelijkaardige modernisering van het wiskundeonderwijs. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010) De problemen in Vlaanderen werden stap voor stap opgelost door veranderingen in het leerplan. Vanaf 1985 implementeerden ze dan effectief ook elementen uit de realistische onderwijsstroming. De leerkrachten stelde het abstraheren van de leerstof uit naar de hogere graden en ze gebruikten concrete, bekende contexten om wiskundige begrippen betekenis te geven. Vanaf de introductie van de leerplannen van 1997 werd resoluut gekozen voor de realistische aanpak in het wiskundeonderwijs. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003)

1.3 Het realistisch wiskundeonderwijs

Het realistisch rekenonderwijs, ontstaan vanuit de empirische richting, is dus een nieuwe derde stroming in de geschiedenis van het Vlaamse wiskundeonderwijs dat geïntroduceerd werd in de jaren '70 door Freudenthal. (Treffers, 1978) Hij stelde dat wiskunde een menselijke activiteit is die geworteld zit in onze maatschappij. Hierdoor legt hij de klemtoon op het gebruiken van alledaagse situaties en problemen uit de leefwereld van de leerlingen. Zo wilde hij de betrokkenheid van leerlingen voor het vak wiskunde verhogen. Volgens hem had het geen zin om mechanismen vanbuiten te leren of lege begrippen te blokken zonder een realistische context. (Freudenthal, 1991) Treffers introduceert hierbij nog twee mechanismen: verticaal en horizontaal mathematiseren. Horizontaal verwijst naar het probleemoplossend denken. Je start met een reëel probleem en gaat op zoek naar een oplossing met behulp van de gekende wiskunde. Verticaal mathematiseren gaat eerder over het generalisatieproces waarin men probeert structuren en patronen te ontdekken. (Treffers, 1978) (De Ridder & Vanwalleghem, 2010) (Gravemeijer, 1993)

Aan de basis van het realistisch wiskundeonderwijs ligt de constructivistische leertheorie. (Streefland, 1991) Deze theorie ziet wiskundige kennis niet als een vast of stabiel geheel. Het is iets dat constant wordt opgebouwd door interacties met de werkelijkheid en op basis van eerdere ervaringen. (Valcke, 2005) Dit is natuurlijk tegenstrijdig met de klassieke visie op wiskundeonderwijs. In het model van het realistisch onderwijs (re)construeren en organiseren de leerlingen de kennis door het geleidelijk ontdekken van steeds meer informatie in relevante contexten. Zo kunnen ze hun eigen oplossingsstrategie ontwikkelen. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010)

Het realistisch onderwijs kent gelijkenissen met het traditioneel rekenonderwijs. Er wordt in beide namelijk nagedacht over de volgorde van de leerstof. De begrippen en mechanismen worden opgedeeld in verschillende niveaus. De spiraalopbouw doorheen de verschillende jaren zorgt ervoor dat het niet nodig is om alles te kennen alvorens het relevant wordt in oefeningen. De abstractie wordt uitgesteld naar hogere graden, maar de leerlingen krijgen wel de zinvolle informatie mee. Een goed voorbeeld hiervan is functieleer. In het structuralistische rekenonderwijs kregen de leerlingen eerst een zeer abstracte en moeilijke functiedefinitie voorgeschoteld. In het realistische rekenonderwijs gaan de leerlingen onderzoekend te werk. Aan de hand van grafieken, tabellen en formules krijgen de leerlingen stap voor stap een betekenisvolle definitie van een functie. Pas in de derde graad wordt de generalisatie naar reële functies gemaakt. Belangrijk hierbij is dus dat de leerlingen zich iets kunnen voorstellen bij wiskundige problemen en hun voorkennis of intuïtie kunnen inzetten om tot een oplossing te komen. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003)

De lesopbouw in het realistisch onderwijs is dus gebaseerd op het geleidelijkheidsprincipe. De les start vanuit een uitdagende, realistische probleemsituatie. In een eerste fase proberen de leerlingen elk op hun eigen niveau het probleem aan te pakken door middel van intuïtie en voorkennis. In een tweede fase wordt er een niveau gestegen. De leerlingen komen tot abstracte, preciezere kennis. In deze fase speelt de leerkracht een belangrijke rol. Interactie staat namelijk centraal. Leerlingen delen hun eigen oplossingen en verwoorden hoe ze hiertoe gekomen zijn. De nadruk ligt op de verschillende zienswijzen in de klas. Door de begeleiding van de leerkracht komt men zo tot het hogere niveau. Hierbij zijn dus niet enkel de vakinhoudelijke resultaten van belang, maar ook de individuele groei op metacognitief en affectief vlak. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003)

Samenvattend kent het realistisch wiskundeonderwijs volgens Treffers vijf grondprincipes. Het eerste principe is het zelf construeren van kennis, uitgaande van een reëel probleem onder begeleiding van een deskundige leraar. Het tweede principe focust op het gebruik van modellen en niveaus als brug om oplossingsstrategieën van leerlingen naar een formele, abstracte structuur te brengen. Het belang van reflectie op eigen producties is het derde grondprincipe. Door strategieën in vraag te stellen en tegenstellingen naar voor te brengen, kan door discussie het leerproces ondersteund worden. Freudenthal heeft het hier over guided reinvention. (Freudenthal, 1991) Een vierde pijler is interactie. Door een gesprek aan te gaan met de klas leren de leerlingen om te gaan met verschillende antwoorden en leren ze de betere strategie te selecteren. Zo zal het proces van niveauverhoging ook worden versneld. Wiskundig taalgebruik is hierbij belangrijk. Een laatste principe gaat over het verstrengelen van leerlijnen. Het doel van het realistisch rekenonderwijs ligt erin om een samenhangend geheel te creëren. Leerlingen worden gestimuleerd om de verbanden over de thema's heen te ontdekken. De integratie van kennis, inzichten en vaardigheden over de hoofdstukken heen is dan ook zeer belangrijk. (Treffers, 1978) (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003) (De Ridder & Vanwalleghem, 2010)

Zoals bij de introductie van alle onderwijshervormingen het geval is, kwam er ook kritiek op de realistische aanpak. (Verschaffel, 2005) De resultaten na de invoering van het realistische rekenonderwijs waren niet wat oorspronkelijk gehoopt werd, concludeerde Van den Heuvel-Panhuizen in 2009. Een eerste probleem met het realistisch onderwijs zou kunnen liggen in het blijven hangen in het informele stadium. Sommige leerlingen kunnen al sneller overgaan tot de abstractie op hoger niveau. Een tweede element dat het realistisch onderwijs kan laten falen, is het onvoldoende of verkeerd opleiden van adequate leerkrachten in een kwaliteitsvolle lerarenopleiding. Indien de focus te veel op de axiomatische, technische didactiek ligt, zullen leerkrachten niet voorbereid zijn om een flexibel, realistisch wiskundeonderwijs te ondersteunen. Feys, een didacticus uit Torhout, geeft ook kritiek op de vrijheid van de leerlingen. Volgens hem is het gevaarlijk om lang gefixeerd te blijven op het aanschouwelijke. We blijven te lang in de context van een probleem hangen en decontextualiseren te weinig. Als gevolg daarvan lijden zowel de sterke als de zwakke leerlingen hieronder. Hij pleit voor een strakker geleide aanpak, waar overzicht en inzicht centraal staan in een sobere didactiek. (De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2003) (Verschaffel, 2005)

1.4 Enkele andere ontwikkelingen in het Vlaamse onderwijs

Als we naar de grotere tijdslijn kijken in het Vlaamse onderwijs, dan zien we dat we van chaos naar orde zijn gegaan. In het hoofdelijk onderwijs waren er geen niveaugroepen, had de leerkracht eerder de functie om zielen te verzamelen voor de Katholieke kerk. Pedagogische bekwaamheid was niet nodig. Het grote deel van de kinderen ging ook niet naar school. Het kind werd gezien als een kleine volwassene. In de 15^{de} eeuw ontstonden de Latijnse scholen waar het de kennis van de Arabieren over wiskunde werd gegeven aan de elite. Wiskunde werd opgesplitst in Aritmetica en Geometria, wat neerkomt op meetkunde en getallenleer. Dat is een opsplitsing die we vandaag nog terugvinden. Door de invloed van de reformatie, contrareformatie, humanisme en de verlichting kwam de klemtoon steeds meer te liggen op de rede, de observatie en het

experiment. Het zelf denken en de individuele agency kwam op de voorgrond te liggen. Men zag ook dat het onderwijs het ideale middel was om brave burgers te creëren. Hierdoor werd het basisonderwijs veel toegankelijker voor de grote massa. Vanaf dan kwam er ook steeds meer kritiek op het gebrek aan didactiek. De leraar kwam onder vuur te liggen, de diversiteit in didactische materialen werd in vraag gesteld, er kwam kritiek op het ‘waarheidsonderwijs’, de focus op memorisatie werd gerelativeerd. In die tijd hadden deze evoluties echter nog geen echt effect op de onderwijspraktijk. Het werd echter wel de voedingsbodem voor de evoluties die we vandaag merken. (Depaepe, 2012)

Er kwam steeds meer orde in het onderwijs met als toppunt het structuralistische wiskundeonderwijs. Toen kwam langzaam het besef dat het aanreiken van te veel structuur en regels nefast was voor het denkproces van de leerlingen. Vrijheid wordt weer belangrijker. Het verschil met het hoofdelijk, individueel onderwijs is dat er nu wel heel veel belang wordt gehecht aan didactiek. Het is een andere manier van omgaan met de vrijheid in het onderwijs. (Depaepe, 2012)

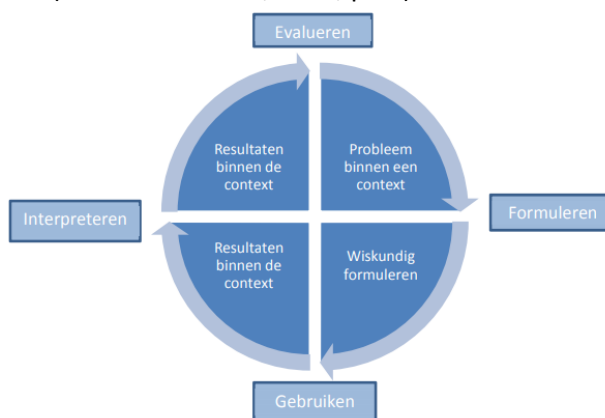
Vanaf het begin van de 20^{ste} eeuw komt er vanuit andere hoeken ook een ander antwoord op de nood aan orde in combinatie met vrijheid. De verschillende reformpedagogen, zoals Montessori en Pestalozzi ontwikkelen andere onderwijsvariatie, waar het realistisch wiskundeonderwijs nog sterker naar voor komt. Later in deze bachelorproef wordt verder ingegaan op deze alternatieve didactiek.

1.5 Resultaten van het Vlaamse wiskundeonderwijs

Als we willen kijken hoe het met het Vlaamse onderwijs gesteld is in vergelijking met de andere Europese landen, dan kunnen we kijken naar de PISA-resultaten. In 2015 kwamen hier enkele besluiten uit. Het gaat ten eerste goed met het Vlaamse wiskundeonderwijs op vlak van de wiskundige geletterdheid. Enkel zes Aziatische landen scoren hoger op het gemiddelde. Ten tweede is de kloof tussen zwakke leerlingen en sterke leerlingen groot. Ze concludeerden ook dat er veel toppresterders zijn, maar dat deze wel in aantal dalen. In tegenstelling daarmee stijgt het aantal leerlingen die het basisniveau niet halen. (Universiteit Gent, 2015) Het gaat dus goed, maar er is nog verbetering mogelijk op vlak van differentiatie naar boven én beneden. Het is ook duidelijk in het PISA-onderzoek dat het huidige Europese onderwijs sterk de realistische trend volgt. Dat kan je ook duidelijk zien in de definitie van wiskundige geletterdheid in PISA:

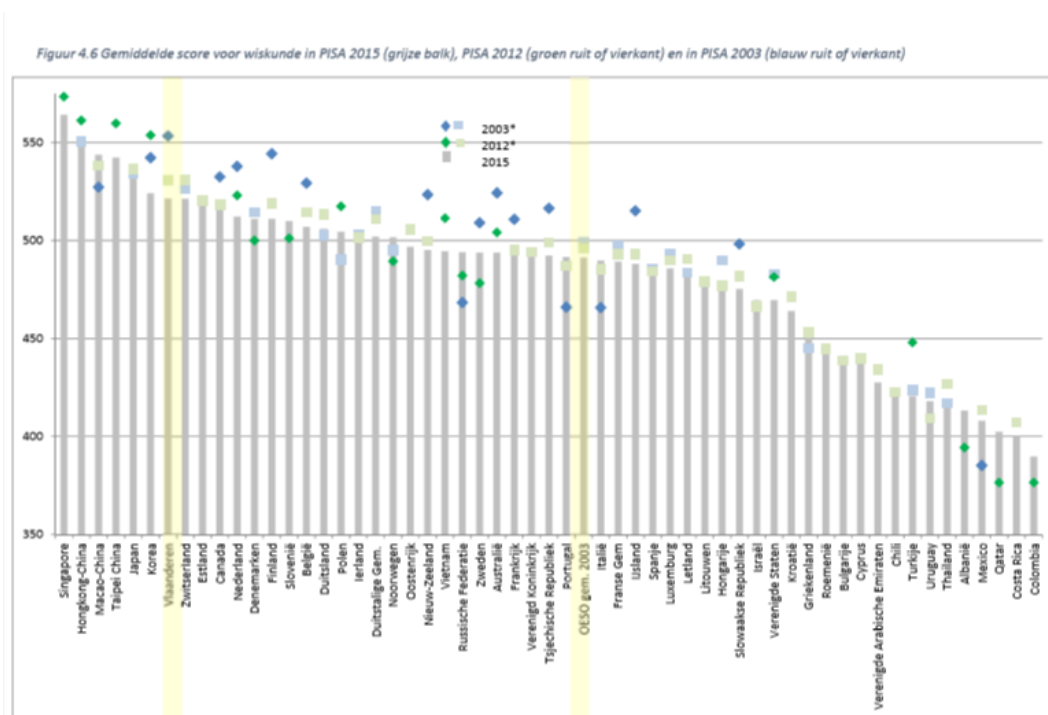
“Wiskundige geletterdheid is het vermogen van een individu om wiskunde in *verschillende contexten* te gebruiken, te formuleren en te interpreteren. Dit omvat wiskundig redeneren en het *gebruik* van wiskundige begrippen, werkwijzen, feiten en hulpmiddelen om fenomenen te beschrijven, te verklaren en te voorspellen. Wiskundige geletterdheid helpt mensen om de rol van wiskunde in het *dagelijkse leven* in te schatten, gefundeerde *oordelen te vellen* en gefundeerde beslissingen te nemen als *constructieve, betrokken en reflectieve burgers*.” (Universiteit Gent, 2015, p.12)

In de schuin gedrukte woorden kan je duidelijk de kenmerken van het realistisch wiskundeonderwijs vinden. Het raamwerk van het PISA-onderzoek, voorgesteld in figuur 1, draait dan ook sterk rond het werken binnen een context om uiteindelijk te komen tot resultaten buiten een context. In dat raamwerk zijn ook de vier actieve processen die hiervoor nodig zijn opgenomen, namelijk formuleren, gebruiken, interpreteren en evalueren. (Webb, 2014)



Figuur 1: raamwerk PISA 2015

Na de bevredigende PISA-resultaten van 2015 is het gemakkelijk om te besluiten dat het zeer goed gaat met de kennis van het wiskundeonderwijs in Vlaanderen. (Universiteit Gent, 2015) Het enige waar we aan moeten werken, is de differentiatie tussen de zwakke presteerder en de goede presteerder. Als we dus het algemeen niveau bekijken van Vlaamse leerlingen van 15 jaar tegenover de andere landen in de OESO, staan we op de achtste plaats voor wiskundige geletterdheid. Als we de resultaten echter gaan vergelijken met deze van 2003 en 2012, dan stellen we wel vast dat Vlaanderen de op één na sterkste daler is. Dat is ook af te leiden uit de grafiek van figuur 2. (Universiteit Gent, 2015) (Universiteit Gent, 2017) Algemeen merken we ook dat de Vlaamse leerlingen negatiever scoren dan het OESO-gemiddelde op doorzetting, openheid en motivatie voor het vak wiskunde. De openheid om een nieuw probleem op te lossen is hier een voorbeeld van. Slechts een kwart (26%) van de leerlingen vindt het leuk om complexe problemen op te lossen. Het gemiddelde van de OESO ligt op (61%). Het zelfvertrouwen van de Vlaamse wiskundestudent ligt ook lager dan het OESO-gemiddelde, zoals zichtbaar in tabel 15 in bijlage 1. (Universiteit Gent, 2013)

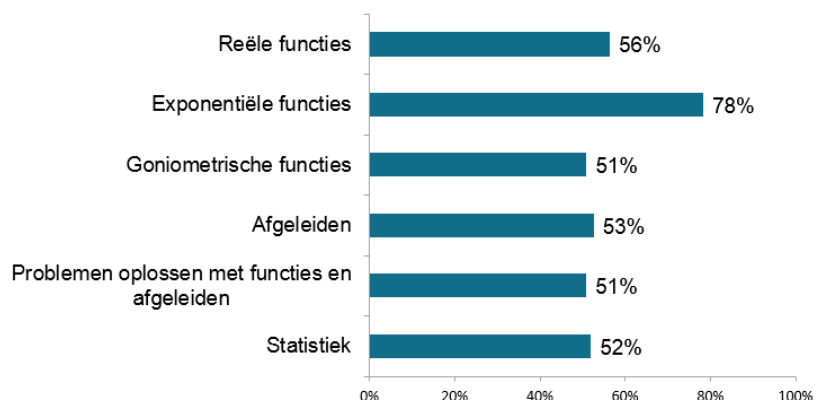


Figuur 2: Gemiddelde voor score voor wiskunde 2015, 2012 en 2003

Om na te gaan waar de eventuele pijnpunten zitten, moeten we eerder weten hoe het gesteld is met de verschillende onderwerpen binnen die wiskundige vaardigheden. In 2015 deelde men de leerlingen in zes vaardigheidsniveaus. Er werd echter geen overzicht gecreëerd van de verschillende onderwerpen noch van de behaalde eindtermen. PISA-onderzoeken moeten namelijk vergelijkbaar zijn met de andere landen in de OESO. In 2012 deelde men de wiskundige geletterdheid wel op in vier categorieën, naast de verdeling in vaardigheidsniveaus. We onderscheiden ten eerste het domein relaties en veranderingen. Hier kijken de onderzoekers naar de mogelijkheid om relaties en veranderingen te modelleren door gebruik te maken van functies en vergelijkingen. Het creëren, interpreteren en vertalen van symbolische en grafische beelden van relaties behoort ook tot dit domein. Dit onderdeel lijkt het best op wat we algebra noemen. Ten tweede is er het onderwerp vorm en ruimte. Patronen, posities, oriëntatie, coderen van visuele informatie zijn enkele zaken die hiertoe behoren. Dit sluit het beste aan bij de meetkunde, maar het is iets ruimer. Ten derde onderscheiden we het subfacet hoeveelheid. Hierin zit het onderwerp getallenleer verwerkt. Het gaat over kwantitatieve relaties. Het laatste onderdeel gaven de onderzoekers de noemer onzekerheid en data. Hierin is statistiek verwerkt. (Universiteit Gent, 2013) (Universiteit Gent, 2017) (Universiteit Gent, 2015)

We kunnen nu de resultaten van deze verschillende onderwerpen met elkaar vergelijken. Alle resultaten zijn terug te vinden in bijlage 1. Voor het domein relaties en veranderingen scoort 27% in de hoogste twee niveaus. Algebra is dus volgens dit onderzoek het onderwerp met de meeste koplopers in Vlaanderen. Algemeen situeren we ons op de negende plaats voor dit onderwerp. Voor vorm en ruimte vinden we 25,2% van de leerlingen terug bij de toppers op niveau vijf en zes. Er is wel een groot aantal laagpresteerders, namelijk 26,8%. Voor vorm en ruimte staat Vlaanderen gemiddeld op de zevende plaats tegenover de andere landen in het onderzoek. Bij onzekerheid en data plaatsten ze 25,1% van de leerlingen in niveau vijf en zes. Bij dit onderwerp is het aandeel leerlingen die het benchmarkniveau twee niet halen, groter dan bij de andere onderwerpen, namelijk 16,9%. Gemiddeld staan we hiervoor op de achtste plaats. Voor het onderwerp hoeveelheid telden de onderzoekers een percentage van 26,8% in de hoogste twee niveaus. Hier vinden we ook het kleinste aantal (14,4%) leerlingen die het minimumniveau niet halen. De Vlaamse jongeren zijn volgens dit onderzoek dus sterk voor getallenleer. Gemiddeld scoren we hier opnieuw hoog met een zevende plaats op de ranglijst. (Universiteit Gent, 2013)

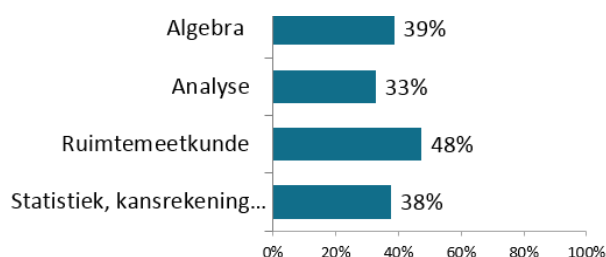
Gelijktijdig met het PISA-onderzoek 2015 in de tweede graad, werden er echter ook peilingstoetsen afgenomen in de derde graad in samenwerking met KU Leuven. Hierin werd gekeken naar het al dan niet behalen van de eindtermen. In het ASO onderzochten ze eerst de basisvorming door middel van zes toetsen over zes verschillende onderwerpen: reële functies, exponentiële functies, goniometrische functies, afgeleiden, problemen oplossen met functies en afgeleiden en statistiek. Naast de basisvorming keken ze ook naar de specifieke eindtermen. In het ASO ging dat over algebra, analyse, ruimtemeetkunde en statistiek, kansrekening en discrete wiskunde. In het TSO en KSO werd de opdeling gemaakt in functies met tabellen en grafieken, functies met algebra en statistiek. (KU Leuven, 2015)



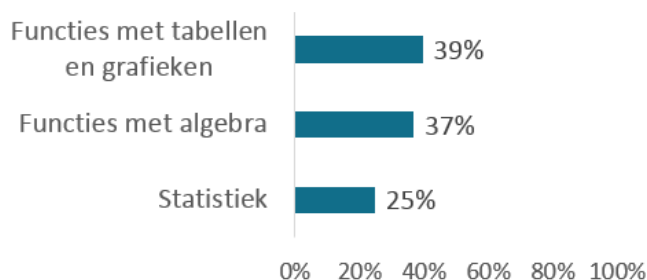
In de grafieken geven aan welk percentage van de leerlingen de eindtermen behaalde.

Voor de basisvorming in het ASO zijn de beste onderwerpen exponentiële en reële functies. De eindtermen van de andere onderwerpen worden slechts in ongeveer de helft van de gevallen behaald. (KU Leuven, 2015)

Figuur 3: Basisvorming ASO: behaalde eindtermen



Figuur 4: Behaalde specifieke eindtermen ASO



Figuur 5: Behaalde specifieke eindtermen TSO/KSO

De percentages bij de specifieke eindtermen liggen nog een stuk lager, zowel in het ASO als in het TSO. Als we nog dieper binnen bepaalde richtingen kijken, merken we dat de richtingen met meer wiskunde-uren beter scoren dan de richtingen zonder pool wiskunde of wetenschappen. Vooral de humane wetenschappen valt op door de lage scores. (KU Leuven, 2015)

Deze resultaten geven dus een ander beeld van het Vlaamse wiskundeonderwijs. Tot het vierde jaar scoort de gemiddelde leerling zeer goed. Toch behaalt een groot deel van de leerlingen op het einde van de derde graad de eindtermen niet.

2 Theorieën rond het belang van visuele beelden in wiskunde

In het praktijkgedeelte van deze bachelorproef geef ik enkele voorbeelden van manieren waarop wiskunde op een meer visuele wijze kan gegeven worden. Hierbij wordt echter verondersteld dat dit het leren van wiskunde helpt. Om deze veronderstelling te ondersteunen, zien we eerst enkele theorieën en onderzoeken die het belang van visuele beelden in het vak wiskunde bespreken.

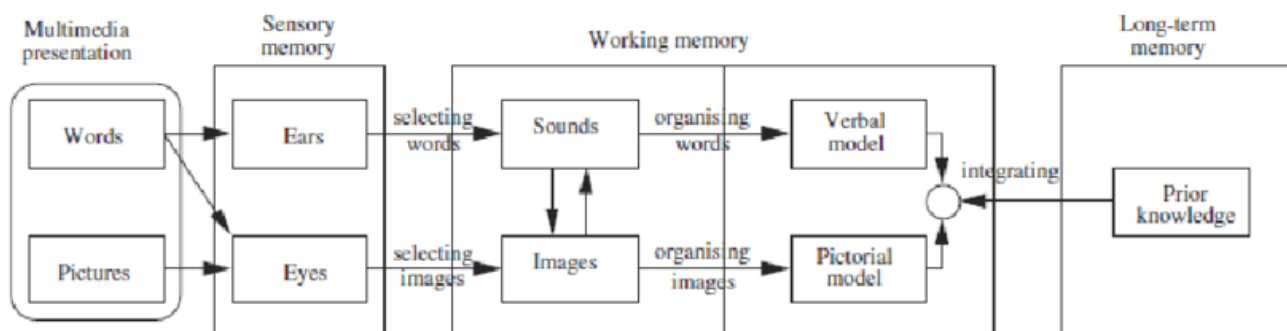
2.1 Cognitive theory of multimedia learning: Mayer

Richard Mayer is een Amerikaanse professor in de educatieve psychologie die zich vooral focust op de verschillende theorieën rond cognitie en het leerproces. Hij is vooral bekend omwille van zijn cognitieve theorie rond het leren met behulp van multimedia. (Gerjets & Kirschner, 2009)

Het woord multimedia verwijst naar het gebruik van meerdere vormen van modaliteit of codering. Dat kan gaan over een combinatie van tekst met woorden. (Mayer, 2014) Een andere optie is om voor papier te kiezen in plaats van een computer. Het onderwijs maakt steeds meer en op een andere manier gebruik van multimediaomgevingen. Hierdoor groeit ook de hoeveelheid onderzoek rond het gebruik en de bijhorende efficiëntie. (Gerjets & Kirschner, 2009)

Om zijn theorie op te bouwen stelde hij het verwerkingsproces van input voor aan de hand van een schema. Wanneer een nieuw concept geïntroduceerd wordt kan dat op twee verschillende manieren: ofwel door woorden ofwel door afbeeldingen. De prikkels worden in het sensorisch geheugen opgevangen. Daar gebeurt een eerste filtering. Slechts een selectie van de informatie komt terecht in het werkgeheugen in de vorm van geluid en beelden. Daar worden de beelden gekoppeld aan het overeenkomstige geluid. Uiteindelijk wordt de overgebleven informatie georganiseerd in verbale en visuele modellen. De laatste stap in dit hele proces is de integratie van beide modellen met de voorkennis uit het langetermijngeheugen. (Mayer, 2014)

Figuur 6: Cognitive theory of multimedia learning



De inspiratie voor dit schema is af te leiden uit de volgende quote van Mayer:

“People learn better when multimedia messages are designed in ways that are consistent with how the human mind works and with research-based principles.” (Mayer, 2001, p. 138)

Hij wilde dus ontdekken hoe het menselijk brein informatie verwerkt om zo het best het leerproces te kunnen ondersteunen.

Bij dit schema horen drie principes die gebaseerd zijn op onderzoek van verschillende wetenschappers. Een eerste principe heet het dual channel principe of het principe van de twee kanalen. Allan Paivio vond in 1971 dat de verwerking van beeldmateriaal en geluid via twee verschillende wegen in het brein verloopt. Hierdoor ontstaan er ook twee aparte modellen die opgeslagen worden. (Paivio, 1971)

Het tweede principe krijgt de naam limited capacity principle. We hebben volgens Sweller drie soorten geheugens. Het sensorisch geheugen, het werkgeheugen en het lange termijngeheugen. Dit principe focust zich vooral op de beperkte capaciteit van het werkgeheugen. De cognitieve lading in elke boodschap moet gereguleerd worden, zodat het mogelijk wordt om dit te kunnen verwerken. De gemiddelde leerling kan tussen de 5 en 9 elementen in een keer verwerken. Het is dus belangrijk om hiermee rekening te houden bij het opstellen van de instructie. (Sweller, 2005) Het laatste principe werd opgesteld door Mayer en noemen we het principe van de actieve verwerking. De informatie wordt geselecteerd, georganiseerd en als laatste ook geïntegreerd. Dat moet op een zo actief mogelijke manier gebeuren om het transfer naar het lange termijngeheugen te garanderen. (Mayer, 2014)

Multimedia instructie gaat dus over het zo goed mogelijk begeleiden van bovenstaande verwerking. Hierbij zijn er drie processen die we kunnen ondersteunen als leerkracht. Als eerste moeten we ervoor zorgen dat er geen overbodige cognitieve inspanningen nodig zijn door het ontwerp van de leerstof. Hiervoor bestaan er zes principes. (Gerjets & Kirschner, 2009) (Mayer, 2014)

Tabel 1: zes principes om informatie zo goed mogelijk te ordenen

Principe	Uitleg	Voorbeeld
Coherence principle	De informatie moet sober en gericht geselecteerd zijn. Mensen leren beter als extra overbodig materiaal eruit gelaten wordt. Dit werd bevestigd in 22 van de 23 tests met een effectgrootte van 0,86 in het onderzoek door Halpern. (Mayer, 2014)	Irrelevante anekdotes of cartoons worden beter weggelaten.
Signalling principle	De mens leert dieper wanneer klemtonen worden toegevoegd die de grote lijn of organisatie in de verf zetten. Dit werd bevestigd in 24 van de 28 tests uitgevoerd door Mayer in 2005 met een effectgrootte van 0,41. (Mayer, 2014)	Fluoresceren of benadrukken van belangrijke begrippen.
Redundancy principle	Mensen leren dieper van de combinatie van beeld met gesproken woord dan van beeld met geschreven en gesproken woord. Dit werd bevestigd in 16 van de 16 tests met een effectgrootte van 0,86. (Mayer, 2014)	Als er een animatie speelt, mag er geen tekst op de animatie komen, zolang er ook uitleg gegeven wordt.

Spatial contiguity principle	Mensen leren beter wanneer de overeenkomstige afbeelding en uitleg dicht bij elkaar staan. Dit werd bevestigd in 22 van de 22 tests met een effectgrootte van 1,10. (Mayer, 2014)	De uitleg bij een schematische tekening van een microscoop, wordt best niet onderaan de afbeelding geschreven. Met pijlen kan je de uitleg telkens zo dicht mogelijk bij het passende onderdeel plaatsen.
Temporal contiguity principle	Een beeld en de bijhorende uitleg worden het best simultaan gegeven. Dit werd bevestigd in 9 van de 9 tests met een effectgrootte van 1,22. (Mayer, 2014)	Een film laten spelen en achteraf bespreken is minder efficiënt dan de uitleg tijdens de film te geven door deze op voorhand in te spreken of eventueel te pauzeren.
Expectation principle	Mensen leren beter wanneer ze weten hoe ze beoordeeld zullen worden. De effectgrootte bedraagt hier 0,83. (Mayer, 2014)	Laat op voorhand weten dat de evaluatie zal gebeuren door middel van een multiplechoice-examen.

Het begeleiden van de essentiële verwerkingsprocessen is een tweede aandachtspunt. Er is een basis cognitieve inspanning nodig om het gepresenteerde materiaal te kunnen registreren. Dat wordt veroorzaakt door de complexiteit van hetgeen geleerd moet worden. Om deze begeleiding optimaal te maken moeten we rekening houden met drie principes, te lezen in de onderstaande tabel 2. (Gerjets & Kirschner, 2009) (Mayer, 2014)

Tabel 2: Principes voor de begeleiding van de essentiële processen

Principe	Uitleg	Voorbeeld
Segmenting principle	Een mens leert dieper wanneer een vertelde les gepresenteerd wordt in handelbare delen. Dit werd bevestigd in 10 van de 10 tests. Men vond een effectgrootte van 0,77. (Mayer, 2014)	Deel een complexe animatie op in stappen. Bouw op van makkelijk naar moeilijk.
Pre-training principle	Mensen leren dieper een complexe les wanneer ze de namen en karakteristieken van de hoofdconcepten kennen. Dit werd bevestigd in 13 van de 16 tests. Men vond een effectgrootte van 0,75. (Mayer, 2014)	Voor je kan leren over de werking van het oog, moet je eerst de verschillende benamingen van de onderdelen kennen.
Modality principle	Mensen leren beter van de combinatie van beeld met gesproken woord en dan beeld met geschreven woord. Dit werd bevestigd in 52 van de 61 tests. Mayer vond een effectgrootte van 0,76. (Mayer, 2014)	Vertel de uitleg bij de afbeeldingen op de powerpoint, in plaats van de tekst te projecteren.

Het voeden van de diepere cognitieve inspanningen die nodig zijn om het materiaal te kunnen begrijpen, is het derde begeleidingsproces. Mayer noemt dit ook wel fostering of generative processing. Hierbij horen opnieuw drie principes. (Gerjets & Kirschner, 2009) (Mayer, 2014)

Tabel 3: Principes om complexe verwerking te ondersteunen

Principe	Uitleg	Voorbeeld
Multimedia principle	Mensen leren beter van de combinatie van afbeeldingen met woorden dan van woorden alleen. Dit werd bevestigd in 11 van de 11 tests. Dit principe heeft een effectgrootte van 1,39. (Mayer, 2014)	Gebruik afbeeldingen bij de uitleg van een concept.
Personalization principle	Mensen leren dieper wanneer woorden in een persoonlijke, informele stijl geschreven zijn dan in een formele stijl. Dit werd bevestigd in 14 van de 17 tests. Er werd een effectgrootte van 0,79 vastgesteld. (Mayer, 2014)	Betrek de leerlingen in de gegeven uitleg. “Bij het inademen beweegt jouw middenrif naar beneden om meer ruimte te maken voor jouw longen.” (informeel) In vergelijking met: “Bij de ademhaling beweegt het middenrif naar beneden om meer ruimte te creëren voor de longen.” (formeel)
Voice principle	Mensen leren beter van een menselijke stem dan van een computerstem. Dit werd bevestigd in 5 van de 6 tests. De effectgrootte is gelijk aan 0,74. (Mayer, 2014)	Spreek bij tutorials zelf de uitleg in. Kies niet voor een geautomatiseerde computerstem.

Naast deze drie grote begeleidingsprocessen voegt Mayer ook nog enkele andere overkoepelende principes in.

Tabel 4: Overkoepelende principes

Principe	Uitleg	Voorbeeld
Concretizing principle	Leerlingen leren beter wanneer onbekende leerstof gepresenteerd wordt zodat de relatie wat de leerlingen wel kennen duidelijk is. Dat kan vooral door concrete voorbeelden te gebruiken en analogieën te creëren. Het gebruik van concrete manipuleerbare wiskundemodellen hoort hier ook bij. Dat werd onderzocht door Lillard in 2005.	Het zenuwstelsel van de mens is vergelijkbaar met de computer met de bijhorende hardware. De computer zijn de hersenen. De kabels zijn de zenuwvezels en de muis, de monitor, het toetsenbord zijn de organen of ledematen.
Anchoring principle	Mensen leren beter wanneer de leerstof voorgesteld is in een context of bekende situatie.	De context van een pizzabedrijf is ideaal om functioneel te introduceren.

Testing principle	Mensen leren beter wanneer ze een oefentest kunnen afleggen.	Dit kan door op voorhand analoge oefeningen te maken, zoals de leerlingen op een toets ook kunnen krijgen.
Self-explanation principle	Mensen leren beter wanneer ze gestimuleerd worden om zelf begrippen of oefeningen uit te leggen tijdens de les.	Hoe kom je aan dat antwoord? Wat bedoel je met een overstaande hoek?
Worked-example principle	Mensen leren beter wanneer ze een stap voor stap uitgewerkt voorbeeld zien van een oefening.	$6x + 3 = 5$ $\Leftrightarrow 6x + 3 - 3 = 5 - 3$ $\Leftrightarrow 6x = 2$ $\Leftrightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Guided discovery principle	Leerlingen leren beter als ze zelf problemen mogen oplossen waarbij ze wel bijgestuurd worden door een leerkracht.	Een voorbeeld hiervan is een bundel over vennndiagrammen die de leerlingen in staat stelt zelfstandig de oefeningen te maken. In de bundel staan begeleidende tips. De leerkracht stuurt ook bij waar nodig.
Questioning principle	Mensen leren beter wanneer ze verplicht worden om diepe vragen te stellen en een antwoord te formuleren tijdens het leerproces.	Dit kan toegepast worden op alle vakken. Een voorbeeld: Waarom is de stelling van Pythagoras belangrijk?
Elaboration principle	Mensen leren beter wanneer ze zelf de leerstof mogen samenvatten en uitbreiden.	Synthesevragen op het einde van de les zijn belangrijk. Ook bij oefeningen kan een samenvattende vraag tot inzicht leiden.

Alle bovenstaande principes hebben leereffecten. Natuurlijk worden deze effecten sterk beïnvloed door andere factoren. Zo zijn het kennisniveau van de leerling, de capaciteit van het werkgeheugen, de mate van controle van de leerling, de moeilijkheidsgraad van het materiaal zaken die dat effect kunnen beïnvloeden.

People learn better when multimedia messages are designed in ways that are consistent with how the human mind works and with research-based principles.

2.2 De theorieën van het realistisch wiskundeonderwijs

Zoals eerder besproken, is er binnen het rekenonderwijs een trend om zeer realistisch te werken. Het realistisch rekenonderwijs gaat uit van drie theoretische benaderingen die ook aansluiten bij een zeer visuele manier van wiskunde geven. We zoeken een manier waardoor leerlingen zich iets kunnen voorstellen bij de abstracte begrippen en oefeningen. De leerlingen vertrekken vanuit de realiteit van hun leefwereld om een wiskundig probleem aan te pakken. Pas in een later stadium wordt overgegaan tot het generaliseren van de gevonden oplossing.

De eerste theoretische insteek is de niveautheorie van Van Hiele. Hij dacht na over de verschillende denkniveaus die leerlingen doorlopen bij het aanleren van wiskunde. Hij onderscheidt drie gradaties. Het grondniveau is het laagste niveau. Bij de kennismaking met een nieuw concept zijn getallen verbonden aan waarneembare hoeveelheden. De handelingen worden rechtstreeks gelinkt met concreet materiaal. In het volgende level begint de lerende de relaties te zien tussen getallen en hoeveelheden. Begrippen komen in

een netwerk terecht met knooppunten waartussen verbanden gelegd worden. In het laatste niveau analyseert men de relaties tussen de gevonden relaties. Het concept wordt in een groter geheel geplaatst. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010) Van Hiele benadrukt de noodzaak om te starten op een niveau waarin de leerlingen vertrouwd zijn met de context, het materiaal en de gebruikte begrippen. Alleen zo kan nieuwe kennis worden opgebouwd. (Gravemeijer, 1993)

Een tweede insteek vinden we in de didactische fenomenologie van Freudenthal. Hij stelt dat we in het wiskundeonderwijs moeten op zoek gaan naar fenomenen uit de realiteit. Deze fenomenen kunnen zowel wiskundig als fysisch zijn. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010) Door een dergelijke voorstelling als uitgangspunt te nemen, wordt het mogelijk om nieuwe wiskundige concepten te organiseren en de nodige mentale objecten te vormen. (Gravemeijer, 1993) Freudenthal zorgt er zo voor dat de basis van de wiskundige concepten zeer betekenisvol is voor de leerlingen. (De Ridder & Vanwalleghem, 2010)

De derde theorie waarrond realistische wiskunde wordt opgebouwd, is het principe van progressief mathematiseren. Wiskundige activiteit is hierbij essentieel. We onderscheiden hierin verticaal en horizontaal mathematiseren. Het zijn processen van verhoging en verbreding waarbij de progressie van de mentale beelden centraal staat. Bij horizontale mathematisering ligt de klemtoon op het organiseren van de realiteit. De leerlingen bekijken een probleem en proberen het toegankelijk te maken voor verdere wiskundige verwerking. De context is hierbij zeer belangrijk. Opnieuw hoeft deze context geen alledaagse situatie te zijn. Contexten kunnen ook wiskundig van aard zijn. Het interpreteren en organiseren van deze realistische context met zijn problemen en begrippen, vormt het startpunt van de wiskundige activiteit. Verticaal mathematiseren gaat eerder over de verhoging in het wiskundig denkproces. Generalisatie en abstractie staan hier centraal. (Treffers, Wiskobas doelgericht, 1978) (Freudenthal, 1991) (Gravemeijer, 1993) (De Ridder & Vanwalleghem, 2010)

2.3 De invloed van de reformpedagogen

Zoals eerder gezegd is het onderwijs geëvolueerd van een zeer chaotisch geheel naar een meer gestructureerde leeromgeving. In de 19^{de} eeuw kwamen er enkele nieuwe stemmen rond onderwijs naar voor. Zij wilden terugkeren naar een minder gestructureerd onderwijs, waar de leerling centraal staat. De traditionele school was volgens hen namelijk te levensvreemd, te autoritair, te geïsoleerd van de samenleving, te passief... Deze reformpedagogen ontwierpen nieuwe onderwijsvormen waarin deze problemen niet meer van toepassing waren. (Depaepe, 2012)

Het pedagogisch handelen in de reformpedagogiek kent drie grote principes. Het eerste principe is het opvoedingsprincipe. Actief onderwijs en spel- en handenarbeid zijn hierbij essentieel. Elk kind is hierdoor opvoedbaar en moeten we ook opvoeden. Het vormbaarheidsprincipe stelt dat elk kind van nature wil leren en moet uitgedaagd worden. Elk kind is hierbij uniek. Zelfstandigheid en verantwoordelijkheid van het kind zijn onmisbaar in het leerproces. Een laatste principe is het activiteitsprincipe. Het kind wil actief zijn bij het leren en moet ook actief kunnen zijn. De grootste gemeenschappelijke delers van deze principes zijn activiteit, harmonie, pedocentrisme en creatieve experimenten doorheen het onderwijsproces. (Van Ruyskenvelde, 2018)

In het volgende deel bespreek een deel van de theorie van twee reformpedagogen. De focus hierbij ligt op de toepasbare elementen voor de visuele wiskunde.

2.3.1 Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827)

Pestalozzi was een Zwitserse pedagoog uit de romantiek die tot op vandaag een groot effect heeft op het Vlaamse onderwijs. De natuurlijke ontwikkeling van het kind vond hij het startpunt van het leerproces. Zijn benadering was dan ook zeer kindgericht. (Beunk, 2014) Hij was van mening dat iedereen kan leren en recht heeft op onderwijs. Pestalozzi vond het onderwijs van zijn tijd onaangepast was aan de noden van elk kind. Hij benaderde pedagogie vanuit de wetenschap, omdat deze twee volgens hem deel van elkaar uitmaken. (Van Ruyskenvelde, 2018) Pestalozzi schreef gedurende zijn carrière heel veel over opvoeding en onderwijs. Hier bespreken we enkel zijn theorie rond de 3 h's. (Beunk, 2014)

De natuurlijke krachten verdeelt Pestalozzi op in drie onderdelen: de intellectuele, ethische en fysieke kracht. Deze zijn in het onderwijsproces verbonden aan het hoofd, het hart en de handen (3 h's). Een harmonische ontwikkeling van deze drie functies is het ultieme doel van onderwijzen. Daarbij is het hart volgens hem prioritair. Zonder het aanspreken van de natuurlijke verwondering van het kind, kan het leren niet starten. (Beunk, 2014) Om te leren moet je deze alle drie ten volle ontwikkelen en gebruiken. Je moet bezig zijn, je moet geëngageerd zijn en je moet kennis opbouwen. Passieve verwerving was in zijn pedagogie dus uit den boze. Het kind moet actief kunnen zijn. Ervaringen opbouwen is essentieel om te kunnen leren. In zijn theorie doet hij ook een stap terug van het individualisme. Hij zet in op groepsactiviteiten. Toch is diversificatie ook belangrijk binnen die groep. Deze bestaat namelijk uit individuen met verschillende talenten die we moeten ontwikkelen. (Van Ruyskenvelde, 2018) (Depaepe, 2012)

2.3.2 Maria Montessori (1870 - 1952)

Montessori was een Italiaanse dokter en onderwijskundige die gelijkaardig aan Pestalozzi een visie op leren ontwikkelde, vandaag gekend als de Montessorimethode. Haar interesse in onderwijs kwam eigenlijk vanuit een geneeskundige hoek. Tijdens het begin van haar carrière ging ze aan de slag met kinderen met een beperking. Net zoals Pestalozzi stootte ze op ze beperkingen van het onderwijs. Ze schreef dan ook een boek en richtte kinderhuizen op waar kinderen volgens haar methode les kregen. (Van Ruyskenvelde, 2018)

Een belangrijk onderdeel van haar methode is het gebruik van concreet leermateriaal. Deze visie is zeer innoverende geweest in de klaslokalen tot op vandaag. Ze werkte de gereedschapskist van de leraar uit. Deze materialen zijn vooral voor de kleuterschool en de lagere school bedoeld. De secundaire school was op dat moment nog niet gegeneraliseerd. Haar methode is daarom niet minder relevant om een antwoord te zoeken op de onderzoeksvraag, zolang we rekening houden met de context. (Van Ruyskenvelde, 2018) (Montessori, 1921)

De Montessorimethode werd dus geschreven als onderdeel van de reformpedagogiek. Je ziet dan ook duidelijk enkele kernelementen terugkomen. Het is ten eerste belangrijk dat het kind veel vrijheid krijgt. De natuurlijke ontwikkeling is zoals bij Pestalozzi een uitgangspunt. Gelijklopend met de theorie van Feudenthal krijgt de leraar een begeleidende rol op de achtergrond. De functie van de leerkracht wordt gereduceerd tot het ondersteunen zonder veel te sturen. Het materiaal spreekt voor zich. Auto-educazione is het begrip dat Montessori in haar boeken gebruikt. Leerlingen moeten de ruimte krijgen om te ontwikkelen. Ze moeten zelf-onderzoekend leren. De instructie van de leerkracht moet beknopt, eenvoudig en objectief zijn. Alle overbodige, niet te observeren informatie moet weggelaten worden. (Depaepe, 2012) (Montessori, 1921) (Van Ruyskenvelde, 2018)



Figuur 7: Montessori met puzzel over vlakke figuren

De materialen die ze ontwierp, moesten de ontwikkeling van de zintuigen versterken. In haar boek geeft Montessori een voorbeeld uit de wiskundeles. Om het verschil tussen een vierkant en een driehoek uit te leggen, hoeft je als leerkracht eigenlijk niets te doen. Je geeft de leerling de twee vormen en laat hem/haar de omtrek aflopen met een vinger. De leerling voelt wat het verschil tussen de twee is. De motorische ontwikkeling wordt door deze aanpak ook extra gestimuleerd volgens Montessori. Het onder woorden brengen van de waarnemingen en de koppeling met de juiste begrippen, is dan weer een goede taalontwikkeling. (Van Ruyskenvelde, 2018) Het leerproces moet volgens Montessori zeer gradueel gebeuren. Eerst moet de fysieke ontwikkeling er zijn. Dat gebeurt hoofdzakelijk in de kleuterschool. Daarna moeten de zintuigen ontwikkeld worden in de lagere school. In het

voortgezet onderwijs kan men pas echt gaan focussen op de intellectuele kennisoverdracht. (Montessori, 1921) (Montessori, George, & Holmes, 1912)

Vooraf voor de rekenlessen in het basisonderwijs ontwierp ze veel materiaal, omdat ze vond dat daar net de zintuiglijkheid ontbrak. De focus lag in het gestructureerd onderwijs op het reproduceren van bepaalde protocollen. Volgens Montessori draagt dat echter weinig bij tot de ontwikkeling van het kind. Het kind is nog te jong voor de abstractieprocessen. De wiskundeontwikkeling op die leeftijd gaat vooral over het ontdekken van nieuwe materialen en vormen, gekoppeld aan de juiste benamingen. (Montessori, 1921)



Figuur 8: rekenblokken

Toch gaan de materialen verder dan enkel het ontdekken van geometrische figuren. Er wordt ook gewerkt aan het ontwikkelen van getalbegrip door middel van rekenblokken. Montessori gebruikte kralen om leerlingen te leren tellen tot 10.000. Dat gebeurde op een zeer visuele manier. Het volgen van een protocol was niet nodig, omdat er inzicht ontstond over het opbouwen van grote getallen. Op de foto rechts staan gouden kralen, maar vandaag zijn ze verkrijgbaar in veel kleuren. Dat is namelijk ook een kenmerk van het materiaal van Montessori. Kleur wordt functioneel ingezet om het geheugen en het inzicht van de leerlingen te

ondersteunen. Die kleuren worden dan ook consistent gebruikt. Wanneer uiteindelijk wordt afgestapt van het concrete materiaal, blijft het kleurgebruik nog een tijd hangen. (Montessori, George, & Holmes, 1912)

Naast het specifieke materiaal, ontwierp ze ook meubels voor het klaslokaal. In de 19de eeuw waren de banken namelijk zeer zwaar en niet te verplaatsen. Dat paste ook bij de zeer passieve en autoritaire manier van lesgeven. De aandacht lag bij de leerkracht. In het onderwijs volgens Montessori zijn de banken en het materiaal allemaal zeer licht. Het kind kan de bank zelf verplaatsen indien nodig. Dat zet aan tot activiteit en is gemakkelijker om samen te werken. De banken hadden meestal ook een puzzelvorm, zodat het samen plaatsen van meerdere banken eenvoudig was. De kast op de foto is een open kast met het materiaal. Het is ook een lage kast die te allen tijde toegankelijk is voor de leerlingen om ernaar terug te grijpen. (Montessori, George, & Holmes, 1912) (Van Ruyskenvelde, 2018)



Figuur 9: Montessori kast



Figuur 10: Montessori tafel

Er kwam heel wat kritiek op de methode op het moment dat Montessori haar methode in de praktijk omzette. Vooral vanuit het traditioneel Katholiek onderwijs was er de vrees dat de vrijheid gelijk stond aan het verlies van tucht en discipline. Dat werd niet ontkend door de reformpedagogen. De vrijheid stond deels gelijk aan meer tumult in de klas, meer exploratie, maar dat is volgens hen net positief. Activiteit zet aan tot leren. Wat het klasmanagement betreft, gingen de reformpedagogen ervan uit dat de leerlingen zichzelf bijsturen. Het lichte meubilair zorgde er bijvoorbeeld voor dat leerlingen regelmatig een stoel omstootten. Deze leerling voelt hierdoor schaamte. De volgende keer zal hij veel voorzichtiger omgaan met het materiaal. Het is een natuurlijk leerproces. Het vergt echter tijd om tot een goed evenwicht te komen. (Van Ruyskenvelde, 2018) (Montessori, George, & Holmes, 1912) Een andere vorm van kritiek richt zich op de afwezigheid van abstractie. Hierbij is de volgende quote van Montessori passend:

“De opvoeding der zintuigen moet vooral niet verward worden met de concrete kennis van de omgeving, die men door middel van de zintuigen kan verwerven, noch met de taal, die zowel de termen geeft, welke met die concrete kennis in verband staan, als de constructie van synthetische of abstracte ideeën.” (Montessori, 1921, p. 108)

Montessori ziet het gebruik van de zintuigen dus zeker als een en-verhaal. De toevoeging van de nadruk op zintuigen is uniek en opent nieuwe inzichten. Toch is het zeker belangrijk om het te combineren met de correcte termen en de concrete kennis. Enkel op die manier kan je later tot abstracte ideeën komen. (Montessori, 1921)

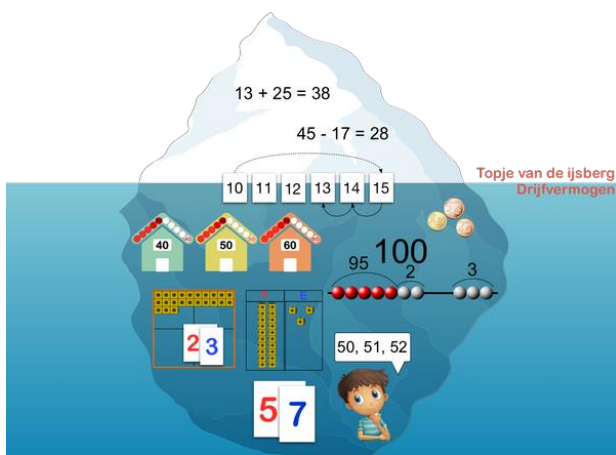
Er werd ook al onderzoek gedaan naar het leereffect van concrete materialen. De resultaten waren echter inconsistent. Zelf een meta-analyse van 55 studies die instructies met en zonder manipuleerbare modellen bekeken, konden geen uitsluitsel brengen. Zowel negatieve effecten, neutrale effecten als positieve effecten werden genoteerd. Bij jonge kinderen was het materiaal te afleidend van de leerstof. Sommige onderzoeken liepen ook niet over een langere periode, waardoor de resultaten niet omvattend genoeg waren. De consensus tussen de verschillende onderzoekers is dat het effect van manipulatieven niet op zichzelf bekeken kan worden. Heel veel hangt af van de omgeving en de context waarin ze worden gebruikt. De sfeer die in de klas heerst en de perceptie van de leerkracht zijn hier voorbeelden van. In het volgende gedeelte van de bachelorproef worden enkele tips gegeven over hoe het klasklimaat gecreëerd kan worden zodat de leermiddelen positief ingezet worden. In Vlaanderen werd nog geen longitudinaal onderzoek gedaan naar het gebruik van manipuleerbare modellen in het secundair wiskundeonderwijs. Omdat de context zo belangrijk is, gaan we dan ook niet dieper in op de cijfergegevens van de onderzoeken die in andere landen gebeurd zijn over het effect van manipuleerbare modellen. (Laski, Jor'dan, Dauoust, & Murray, 2015)

Uit een van de onderzoeken volgend wel vier principes om de efficiëntie van manipuleerbare modellen zo hoog mogelijk te maken. Een eerste voorwaarde is dat de materialen consistent en over een lange periode worden ingezet. Het vergt tijd voor leerlingen om de relaties te zien tussen de manipulatieven en de abstracte wiskunde. Dat concludeerde Sowell in 1989 in een van de eerste meta-analyses over dit onderwerp. Hoe ouder de leerlingen, hoe korter deze tijd kan zijn om tot positieve resultaten te komen. Zij leggen de relaties sneller. Jongere kinderen hebben meer moeite met deze overgang. Toch is in beide gevallen een langere periode en meerdere lesmomenten nodig om de connecties te maken. Een meerjarenplan is nog beter voor het algemeen inzicht. Een tweede voorwaarde is dat de introductie van een onderwerp moet gebeuren met zeer transparante concrete voorstellingen. Hierdoor is de relatie tussen het model en het concept meteen duidelijk. Zo kan sneller overgegaan worden tot inzichtoefeningen met de modellen. Geleidelijk moeten deze representaties abstracter worden. Als derde moeten we manipuleerbare modellen vermijden die sterk op objecten uit het dagelijks leven lijken. Daarbij komt ook dat het object geen irrelevante kenmerken mag hebben die afleiden van de wiskundige essentie. Zoals eerder gezegd wezen bepaalde studies ook aan dat het gebruik van manipuleerbare modellen ook een negatieve impact kunnen hebben. (Van der Leij, 2013) Door zeer herkenbare voorwerpen te kiezen is het gevaar te groot dat er wordt afgeweken over de

voorwerpen zelf, zonder dat de link met wiskunde wordt gelegd. Alle onderdelen en het kleurgebruik moeten functioneel zijn. De associatie moet met wiskundeconcepten gelegd worden en niet met ervaringen buiten de wiskunde met het object. De vierde voorwaarde is het zeer expliciet uitleggen van de relatie tussen de manipulatieven en het wiskundig concept. In het praktijkgedeelte zullen we het hebben over algeblokken en algetegels. Je kan de oefeningen oplossen aan de hand van de kleuren en vormen, maar dan gaat de link met de algebra verloren. Het is de belangrijk om op voorhand duidelijk te maken waarom deze voorwerpen worden ingezet en waarvoor ze symbool staan. Onderzoekend leren blijft centraal staan, maar de leerkracht heeft hier een belangrijke begeleidende functie om de manipuleerbare modellen efficiënt in te kunnen zetten. (Laski, Jor'dan, Dauoust, & Murray, 2015) (Moyer-Packenham, 2001)

In België zijn er slechts zes montessorischolen. Het zijn allemaal basisscholen. (Vlaamse overheid, 2017) In Nederland zijn deze scholen wel wijdverspreid. Zij liepen ook al enkele jaren voor op de invoering van het realistisch rekenonderwijs. (Montessori, George, & Holmes, 1912)

2.4 Ijsbergdidactiek



Figuur 11: Ijsbergdidactiek

Volgens de resultaten van het PISA-onderzoek in 2015 presteren jongeren van 15 jaar goed op het uitvoeren van formele wiskundeoefeningen. (Universiteit Gent, 2017) Het aanleren van wiskundevaardigheden kan vergeleken worden met een ijsberg. Rond deze analogie werd dan ook een didactiek opgezet. De top van de berg stelt de formele wiskunde voor. Hierin bekijken we het uiteindelijke oplossen van een standaardoefening zonder concrete context. Alles dat zich afspeelt op de achtergrond bij het oplossen van de oefening, bevindt zich onder het wateroppervlakte. (Claes, 2016) Dit is het drijfvermogen of alle kennis die geassocieerd wordt bij het oplossen van de formele

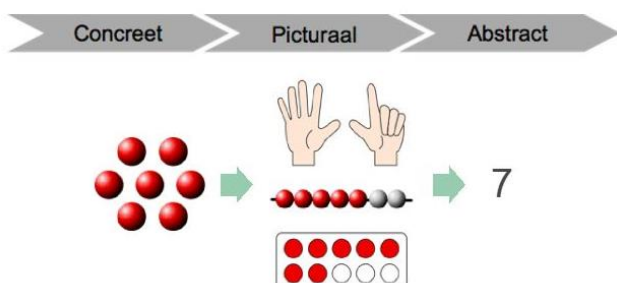
wiskundeoefening. Helemaal onderaan de ijsberg zit de concrete kennis rond een bepaald onderwerp. Dit hoeft niet op school opgebouwd te worden. Leerlingen leren elke dag meer over de wereld. Het accidenteel leren zit dus aan de basis van deze ijsberg. Uiteindelijk worden deze concrete handelingen gesymboliseerd door een model. Hierdoor krijgt de leerling meer inzicht in de structuur van de wiskunde. Dit valt nog steeds onder het informeel leren. Dit gebeurt door assimilatie van de nieuwe leerstof in de voorkennis van de leerling. (Rogers, 2014) Pas als ze ook kunnen afstappen van dit model en naar de geautomatiseerde, kortste rekenstrategie gaan, komen ze in de top van het formeel rekenen terecht. Het is dus zeker niet zo dat het formeel rekenen minderwaardig zou zijn. We mogen echter niet vergeten dat de vaardigheden onder het water het drijfvermogen van de leerlingen bepalen bij nieuwe oefeningen. Hier moet dus minstens evenveel aandacht heengaan. Het is een leerproces die de leerlingen moeten doorlopen. Het heeft dus weinig zin om de klemtoon te leggen op de te volgen algoritmes, zonder structuur en inzicht in de leerstof aan te bieden. Op korte termijn zal het volgen van dergelijke stappenplannen wel lukken, maar wanneer de leerstof verder bouwt, zal het tekort aan inzicht voor problemen zorgen. (Claes, 2016) (Jacobs & Steels, 2017) (Rogers, 2014)

We onderscheiden dus vier lagen: (Jacobs & Steels, 2017)

1. Kennismaking met het concept via concreet en manipuleerbaar materiaal
2. Vervangen concreet materiaal door gestructureerde modellen en schematische voorstellingen
3. Onderzoeken van de relaties tussen onderdelen
4. Automatiseren van de procedures

Het ijsbergconcept sluit sterk aan bij het realistisch rekenonderwijs. Het drijfvermogen van de leerling wordt bepaald door zeer concrete kennis op te bouwen rond een onderwerp. Hierin is het belangrijk dat de concepten op meerdere manieren voorgesteld worden. Het materieel handelen wordt gezien als een voorwaarde om tot een uiteindelijk abstract concept te komen. Belangrijk hierbij is ook dat er steeds vertrokken wordt vanuit bestaande kennis van de leerlingen. (Jacobs & Steels, 2017)

De ijsbergdidactiek is gebaseerd op vier leertheorieën die ook belangrijk zijn om in het achterhoofd te houden als we lessen meer visueel willen maken.



Figuur 12: CPA-model

De eerste leertheorie werd opgesteld door Jerome Bruner, namelijk het CSA-model. Hierin bespreekt hij het proces die kinderen doorlopen wanneer ze in aanraking komen met nieuwe kennis. Hij onderscheidt drie verschillend stadia in het voorstellen van deze kennis. Het eerste stadia is de motorische voorstelling. We leren door het motorisch handelen. Vervolgens bekomt men een schematische voorstelling. De leerling stelt de kennis

voor door middel van afbeeldingen, schema's, tekeningen... In de derde fase wordt de symbolische voorstelling opgesteld. De klemtoon bij dit proces ligt op het materieel handelen als essentiële voorwaarde voor het verkrijgen van een volwaardige mentale representatie. De benaming CSA of CPA staat voor concreet-schematisch/picturaal-abstract. Het verwijst dus naar de verschillende voorstellingen van de concepten die de leerling doorloopt bij het leren van nieuwe leerstof. (Claes, 2016) (Speld, 2016)

De tweede achtergrondtheorie werd geschreven door Zoltan Dienes. Hij beschreef twee aanvullende principes om nieuwe concepten te leren. Hij heeft het over het principe van perceptuele variabiliteit en het principe van wiskundige variabiliteit. De perceptuele variabiliteit verwijst naar de mogelijkheid om verschillende voorstellingen in uiteenlopende contexten te kunnen oproepen. Hierdoor wordt het abstractieproces gemaximaliseerd. Het is dus als leerkracht belangrijk om niet één, maar meerdere voorstellingen van een nieuw onderwerp te gebruiken. Wiskundige variabiliteit verwijst dan weer naar het gebruiken van een grote variatie aan oefeningen om de generalisatie te stimuleren. Er kan worden gevarieerd in het type opgave, de betekenis in de opgaven en de representatie in de opgaven. (Claes, 2016)

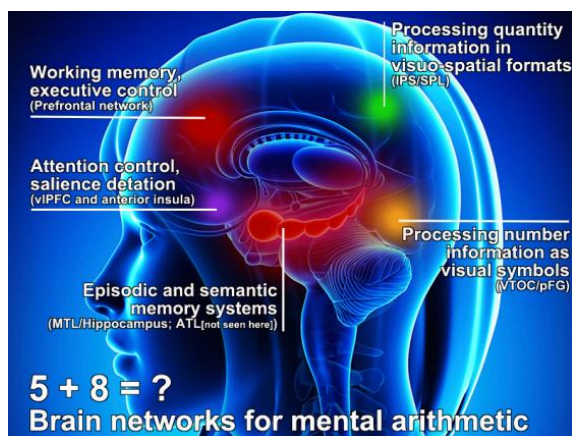
Het derde principe is opnieuw afkomstig van Jerome Bruner. Hij promoot een spiraalaanpak in het wiskundeonderwijs. Hierbij wordt steeds vertrokken van bestaande kennis om nieuwe concepten op te bouwen. Onderwerpen worden niet in één keer volledig gezien, maar komen doorheen de leerjaren uitgebreid, verankerd, herzien... Zo komt de leerling op een natuurlijke wijze in steeds moeilijker contexten terecht en op een steeds hoger formeel niveau. De verschillende onderwerpen staan hierbij ook niet op zich, maar worden gekoppeld. Er is dus integratie van zowel een verticale als een horizontale spiraal. (Claes, 2016) (Rogers, 2014)

De laatste theorie is afkomstig van Richard Skemp. Hij schreef over het procedureel en het conceptueel leren. Bij het procedureel leren ligt de focus op de formele wiskunde. De klemtoon ligt op het onderwijzen van de regels zonder uitleg. Deze manier is voor de leerkracht zeer efficiënt op korte termijn. Aan de andere kant hebben we ook het conceptueel leren. Hierbij wordt de procedurele kennis onderbouwd door conceptuele kennis. De leerlingen staan stil bij de redenering en de structuur van de wiskunde. Ze bouwen inzicht op waarom bepaalde regels veralgemeend kunnen worden. Een voorbeeld hiervan is het rekenen met breuken. Als we twee breuken moeten delen, bijvoorbeeld $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, kunnen we de leerlingen leren om de eerste breuk te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede breuk. We kunnen dat echter ook onderbouwen met conceptuele kennis door hen te laten inzien dat een vierde twee keer in één tweede past. (Claes, 2016)

2.5 De theorie van Jo Boaler

Jo Boaler is een Amerikaanse professor in wiskundeonderwijs aan de universiteit van Stanford. Zij is de oprichtster van Youcubed. Dat is een bedrijf dat inzet op het motiveren van leerlingen voor wiskunde. Ze doen dat op een zeer creatieve manier. Jo Boaler schreef onder andere het boek *Mathematical Mindsets: Unleashing Students Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching* in 2016. Leerlingen hebben volgens haar veel te veel negatieve ervaringen met wiskunde. Wiskunde is geen droog of monotoon onderwerp. Wiskunde leeft overal rond ons in de wereld. Met deze wiskunde kan je positieve gevoelens associëren. Youcubed heeft het ook over het belang van visuele wiskunde in dit proces. Ze verzamelde een team wetenschappers om te onderzoeken hoe leerlingen wiskunde leren en hoe we deze verwerving het best kunnen ondersteunen. (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016)

2.5.1 Visuele wiskunde in het brein



Figuur 13: Network in het brein dat wordt geactiveerd bij het leren van wiskundeconcepten

Jo Boaler werkte samen met twee neurowetenschappers, namelijk Christian Battista en Lang Chen. Zij zochten uit het brein wiskunde verwerkt. Ze vonden dat een zeer wijdverspreid netwerk meewerkt aan de mentale wiskundige processen. In dat netwerk zijn er twee visuele wegen die oplichten bij het uitvoeren van wiskundige taken. De dorsale weg komt te pas bij het nadenken over de spatiale voorstelling van kwantiteit, zoals een getallenas. Dat laatste blijkt nu net zeer belangrijk te zijn voor het ontwikkelen van getalbegrip. Deze lineaire representatie van getallen wordt al zeer vroeg opgebouwd. De dorsale visuele weg is de belangrijkste regio in het brein om hoeveelheden voor te stellen. Hoe

ouder we worden, hoe meer de ventrale weg ontwikkeld wordt. Het brein wordt gevoeliger en meer gespecialiseerd in de voorstelling van getallen als symbolen. De interactie tussen de twee visuele wegen neemt ook sterk toe. Deze interactie is belangrijk voor het linken van het symbolische getalbegrip met de voorstellingen van hoeveelheid. Zelf bij de zeer abstracte, symbolische berekeningen op hoger niveau, worden de visuele basiswegen geactiveerd. De voorstelling in de concrete fase blijft dus belangrijk, ook al is het beeld er niet meer op papier. Naast deze twee grote wegen, zijn ook nog andere hersengebieden betrokken bij het wiskundig denken, zoals de frontale netwerken, het mediale temporale deel en de hippocampus. Zij zorgen voor het geheugen, het uitvoeren van de aangeleerde processen, de aandacht bij het maken van oefeningen... (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016) (Sriraman & Wu, 2014)

Een besluit die ze maken uit het breinonderzoek is dat wiskundig altijd een visuele insteek heeft. Volgens Boaler gebruiken goede leerkrachten dan ook visuele ondersteuning, manipuleerbare modellen en gebaren om het begrip te verbeteren. De NCTM (Council of Teachers of Mathematics) probeert al langer een aanpak te verdedigen waarbij er meerdere voorstellingen van een concept naar voor komen. In de VS wordt er vooral met nummers en symbolen gewerkt. Hiermee mis je de mogelijkheid om visueel begrip te ontwikkelen. Studenten die nood hebben om visuele ondersteuning worden nu vaak gezien als kinderen met zorgvragen. Kinderen durven niet op hun vingers tellen, omdat het als kinderachtig of zelfs fout wordt gezien. Het werken met modellen is wel leuk om voor variatie te zorgen of als voorsmaakje, maar draagt volgens de bevraagde leerkrachten niet bij tot het leren van moeilijkere of meer abstracte wiskunde. Deze mythe kan volgens Boaler zeer vernietigend zijn. (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016)

Om tot abstract begrip te kunnen komen, moet er dus eerst een zeer duidelijke, visuele basis gelegd worden. Flexibel kunnen werken met getallen is hierbij zeer belangrijk. Ilaria Berteletti en Jamer R. Booth bestudeerden in 2015 één specifieke regio in het brein dat instaat voor perceptie en voorstelling van onze vingers. Zelf wanneer we onze vingers niet gebruiken bij het tellen, zien we nog steeds een voorstelling hiervan in ons brein. Onze vingers zijn de enige manipuleerbare modellen die we altijd bij ons hebben. De mate waarin we hiervan een mentale voorstelling hebben, voorspelt de leerresultaten voor wiskunde tot op universitair niveau. Er is bewijs uit zowel behaviouristische en neurowetenschappelijke wetenschappen dat leerlingen die specifieke training krijgen over de manier waarop we de eigen vingers zien en voorstellen, beter scoren voor wiskunde op latere leeftijd tegenover een controlegroep. De onderzoekers vonden dat bij 6-jarigen die een betere vingervoorstelling hadden, vooral schatten, tellen en ordenen beter werd. Leerlingen die nooit specifiek op de vingers leren tellen, bleken nooit een normale representatie in het brein te hebben volgens het onderzoek van Butterworth. Het blijkt een betere voorspeller voor academisch succes dan testen op de cognitieve processen of kennis. Er is duidelijk ook een correlatie met muziek spelen. Vaak zijn mensen die goed zijn in muziek ook goed in wiskunde en ook omgekeerd. Dit zou onder andere iets te maken hebben met de vingerrepresentatie die zeer goed ontwikkeld is. De connectie tussen de vingers en de beide hersenhelften is sterk en dat heeft voordelen voor zowel wiskunde als muziek. De neurowetenschappers verklaren dat vingers gezien worden als de link tussen nummers en hun symbolische representatie. Zo kan het een externe ondersteuning zijn om wiskundeproblemen op te lossen. Leerlingen straffen door op de vingers te tellen is dus geen goed idee. Het is echter niet de bedoeling dat leerlingen verplicht worden om te blijven op hun vingers tellen. Het is belangrijk om de perceptie van de vingers te vergroten. Het creëren van een sterke mentale getallenas in het hoofd zal hier een van de gevolgen zijn. Het versterken van de volledige visuele paden door deze oefeningen is hier het ultieme doel. (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016)

2.5.2 Embodied cognition

Er is steeds dus meer bewijs dat het belang van de visuele wegen aantoont. De connectie tussen de verschillende wegen in het brein komt overeen met het onderzoeksgebied dat bekend staat als embodied cognition. De meeste mensen denken over het brein en het lichaam als volledig aparte entiteiten met het brein dat kennis en abstractie vast kan houden en het lichaam dat passief deze ideeën overneemt van het lichaam naar de fysieke wereld. Dit kan bijvoorbeeld door de ideeën luidop te zeggen of ze op te schrijven. Toch melden de onderzoekers dat heel veel van onze wiskundige concepten worden gehouden in de visuele, sensorische én motorische delen van het brein. (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016) (Kiefer & Trumpp, 2012)

Als we in een nieuw onderwerp willen aanbrengen, hebben we de keuze tussen verschillende strategieën om dat te doen. Neem nu bijvoorbeeld het aanleren van ruimtefiguren. Je zou kunnen alle verschillende ruimtefiguren beschrijven naar vorm en kenmerken. Je zou ook kunnen afbeeldingen tonen waar de kenmerken zijn op aangeduid. Je zou ruimtefiguren ook kunnen meebrengen naar de klas. De kenmerken worden door de leerlingen zelf gezocht. Je kan de leerlingen ook meenemen op een wandeling doorheen het schoolgebouw en zo de verschillende ruimtefiguren aanbrengen. Elk van deze methoden zal een verschillende leerefficiëntie hebben. Het is dus interessant om te weten welke methode het voordeligst is. De laatste decennia heeft veel nieuwe informatie over het leerproces aan het licht gebracht door neurologisch en psychologisch onderzoek. Ze keken hier vooral naar het gedrag en de correlerende breinactiviteiten tijdens deze cognitieve experimenten. Aan de basis van het debat ligt de vraag of gedrag nu al dan niet gefundeerd is op onze zintuigen en acties met de omgeving. Cognitie blijkt traditioneel vaak te gaan over neurologische processen waar de sensorisch-motorische informatie is verloren gegaan. We houden enkel de abstract-symbolische inhoud over in ons brein. Tegenover deze klassieke blik op kennis, komt nu de theorie van embodied cognition te staan. Deze theorie krijgt steeds meer steun vanuit

neurologisch onderzoek. Embodied cognition stelt dat er een zeer dichte link is tussen kennis en de sensorisch-motorische systemen in het brein. Het denken is de wisselwerking tussen lichamelijke acties, externe en interne processen. Onder de externe processen zien we dan alles wat te maken heeft met perceptie en de interne processen omvatten de proprioceptie, emotie en introspectie. Deze processen gebeuren vaak onbewust, maar kunnen gemeten worden met bepaalde neurowetenschappelijke technieken, zoals PET-scans, fMRI, EEG... Deze brengen in beeld waar cognitieve processen in het brein plaatsvinden. De combinatie met vergelijkend gedragsonderzoek bij gezonde patiënten en patiënten met een mentale beperking, kan dan ook in kaart brengen welke activiteiten en sensorische of motorische cortexen noodzakelijk zijn om bepaalde cognitieve opdrachten uit te voeren. (Kiefer & Trumpp, 2012)

Embodied cognition is dus de theorie dat stelt dat kennis wordt uitgedragen in de sensorische en motorische breinsystemen. Zelf de meest complexe wiskundegedachten in het onderwijs kunnen we dat toepassen over verschillende activiteiten. Kijken we bijvoorbeeld naar lezen en schrijven. Schrijven is sensorisch-motorische vaardigheid. Lezen daarentegen wordt perceptueel beschouwd. De theorie van embodied cognition geeft echter aan dat lezen beïnvloed wordt door schrijfvaardigheden. De sensorisch-motorische gebieden die actief zijn tijdens het schrijven worden namelijk impliciet geactiveerd bij het lezen. Bijgevolg beïnvloeden lezen en schrijven elkaar dus. (Sriraman & Wu, 2014)

De overgang naar visuele wiskunde is dus snel gemaakt. De belichaming van meetkunde is een logische overgang. Algebra en getallenleer zijn moeilijker om voor te stellen. Toch creëert iedereen voor zichzelf een mentale ordening voor dit onderwerp. Zoals eerder gezegd is een getallenas een belangrijke stap in deze voorstelling. Op een subjectieve manier zorgt iedereen ook voor een ruimtelijke ordening van getallen, geassocieerd met kleuren, sommen... Zo worden grote nummers vaak boven rechts voorgesteld, terwijl kleine getallen naar links neigen in de ordening. Dit is het visuele-spatiale onderdeel van het voorstellen van cijfers. Deze representatie is echter ook zeer geworteld in bewegingen. Het tellen op de vingers zoals eerder besproken is hier een goed voorbeeld van. Het is de reactivering van al deze hersengebieden bij een impuls van een nieuwe oefening of een nieuw concept dat zorgt voor een rijkere, diepere en duurzame kennis over het onderwerp. (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016) (Alibali & Nathan, 2011)



Figuur 14: gebaren om de betekenis van de rico te duiden

Nemirovsky heeft het in zijn theorie rond embodied cognition ook over het belang van gebaren. Hij beweert namelijk dat de manier waarop we staan, kijken, gesticuleren, wijzen en voorwerpen gebruiken zeer belangrijk is wanneer we wiskundige ideeën uitleggen. Hij zegt onder andere dat wanneer we ideeën uitleggen, we de neiging hebben om figuren in de lucht te tekenen. Zeker wanneer we de juiste terminologie niet vinden, kan dit zeer verhelderd zijn. De figuur hierboven toont een

leerkracht die het concept van richtingscoëfficiënten duidelijk wil maken. Hij gebruikt zijn armen en de tafel om de hellingsgraad te veranderen. Dit gebaar zal de leerling onthouden en terug kunnen oproepen bij oefeningen of uitbreiding van de leerstof. Deze gebaren kunnen door de leerkracht uitgevoerd worden, maar het is nog efficiënter wanneer de leerlingen hun eigen gebarenschema's kunnen maken bij de onderwerpen. De gebaren ontstaan namelijk uit de mentale beelden die we oproepen uit vorige ervaringen. Naast hun vingers hebben leerlingen namelijk altijd de rest van hun lichaam ook ter beschikking. De duimen en wijsvingers maken bijvoorbeeld een gelijkbenige driehoek. Dit kan geassocieerd worden met de basishoeken die gelijk moeten zijn. Zo kunnen we de leerlingen stimuleren om associaties op te bouwen en een dynamisch

inzicht te krijgen in de leerstof. Op die manier kunnen ze ook meer flexibel omgaan met nieuwe oefeningen en concepten. (Alibali & Nathan, 2011) (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016)

We kunnen ook de ruimte rond ons gebruiken om onze ideeën te spreiden. Wanneer de vorige les in de hoek van de klas een tafel stond met een draaischrijf, dan blijft die ruimte geassocieerd met die leerstof. In de verdere uitleg kan daar nog steeds naar verwezen worden zonder dat daar echt iets is. (Alibali & Nathan, 2011) (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016)

2.5.3 Mathematical mindset

De theorie van Boaler draait niet enkel rond het stimuleren van beeldontwikkeling. Ze wil ook de perceptie over het vak wiskunde veranderen. In de VS leeft heel erg het idee dat er mensen bestaan die van nature goed zijn in wiskunde. De andere groep heeft die gave niet. Daar is niets aan te doen. De insteek van Jo Boaler staat hier volledig tegenover. Zij gelooft in de kracht van een growth mindset in de wiskundeklas. Zij veranderde de term echter naar een mathematical mindset door de specifieke toepassingen op wiskunde. Er blijft wel een sterke link met de visuele wiskunde. Een visuele manier van lesgeven geeft namelijk meer opties om een open, creatieve houding tegenover wiskunde te creëren. (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016)

Het stimuleren van een mathematical mindset bij leerlingen vergt negen veronderstellingen die duidelijk moeten zijn voor elke leerling in het klaslokaal. De eerste veronderstelling is dat iedereen wiskunde kan leren tot het hoogste niveau. Hier is de theorie van de breinplasticiteit belangrijk. Het brein is een kneedbaar en veranderbaar element die je sterker kan maken door uitdagend te leren. Fouten maken is hierbij zeer waardevol. Dat is het tweede kenmerk. Wanneer leerlingen een fout maken, is er een verhoogde hersenactiviteit. Dit onderzocht Jason Moser in 2011. De synapsen vuren meer elektrische signalen af tussen verschillende delen in het brein, waardoor de connecties groeien, verstevigen of veranderen. (Boaler, 2017) Vragen stellen is ook zeer belangrijk om een mathematical mindset te ontwikkelen. Ook hier ontwikkelde Boaler specifieke richtlijnen voor, maar dit behoort niet meer tot het bestek van deze bachelorproef. Wiskunde gaat over creativiteit en begrip. Het vierde kenmerk legt hiermee de focus op het proces eerder dan op het product. Memoriseren van wiskunde zonder inzicht, heeft dus geen zin. Het begrip komt er door veel verschillende wegen te zien en echt te werken met de wiskundige ideeën. Als vijfde element gaat wiskunde ook over connecties en communicatie. Het zien van wiskunde, het beschrijven en het strategisch gebruiken van de concepten in een context is essentieel bij leren met een mathematical mindset. Het vergelijken van verschillende delen binnen een geheel is hierbij ook belangrijk. Als zesde eigenschap neemt men de veronderstelling dat de diepte van nadenken en begrip belangrijker is dan snelheid van het oplossen van een probleem. In de VS is het meestal de leerling die het snelst klaar is met de oefeningen die de waardering krijgt. Volgens Boaler is dat niet goed, omdat hij of zij dan niet diep genoeg heeft nagedacht over het probleem. Wiskunde draait niet alleen rond het oplossen van wiskunde-oefeningen, maar eerder rond het zien van verschillende mogelijkheden. Inzicht in de structuur en samenhang van het onderwerp. Eigenschap 7 gaat over het stellen van doelen. De klemtoon ligt hier niet op de dagelijks te behalen eindmeten, maar op wat belangrijk is binnen tien jaar. Zelfregulatie en reflectie horen bij dit kenmerk. Leerlingen met mathematical mindset ervaren 'vastzitten' op een oefening niet negatief. Het is een stadium waar veel uit geleerd kan worden. Oefeningen die je eigenlijk al kan, zijn veel minder nuttig om te maken. Het laatste kenmerk van een leerling en leerkracht met een mathematical mindset is het zelfvertrouwen. Geloven in het eigen kunnen is het uitgangspunt van wiskunde leren. Metacognitieve vaardigheden en kennis ontwikkelen door middel van een goede begeleiding is hierin essentieel. (Boaler, 2017) (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016) (Boaler J. , 2016) (KU Leuven, 2017)

2.6 Andere interessante inzichten

In het boek *Toward a Visually-oriented School Mathematics curriculum* worden door Ferdinand D. Rivera heel wat onderzoekers aangehaald. Veel van deze onderzoekers baseren zich op de bovenstaande theorieën om uitspraken te doen over hoe we visueller les kunnen geven. In het laatste deel van de theorie rond visuele wiskunde haal ik nog enkele interessante uitspraken en theorieën rond visuele wiskunde aan die in dit boek voorkomen. De selectie van deze specifieke onderwerpen is uitgevoerd op basis van de toepasbaarheid in het wiskunde-onderwijs.

2.6.1 Michell (1994)

In zijn picture theory zegt Michell dat leerkrachten een verkeerd beeld hebben van het gebruik van manipulatieven. De meeste denken dat de leerlingen het wel plezierig vinden en vergeten dat ze bezig zijn met wiskunde. Manipulatieven worden enkel in het begin gebruikt bij de exploratie of bij een spel of activiteit nadat de wiskunde-inhoud is aangeleerd. Gedurende het aanleren van specifieke vaardigheden of leerstof gebruiken we papier en potlood voor de 'echte' wiskunde. De perceptie is dus dat manipulatieven niet bijdragen tot het wiskunde-inzicht, maar vooral waardevol zijn om variatie te brengen. (Rivera, 2011)

2.6.2 Zimmerman-Cunningham (1991)

Zimmerman en Cunningham gaven een duidelijke betekenis aan het woord visualisatie. Wiskundige visualisatie is het proces waarbij afbeeldingen worden gevormd (mentaal, met papier en potlood of met een andere technologie) en dergelijke figuren effectief gebruiken worden voor wiskundige ontdekkingen en begrip. (Rivera, 2011)

2.6.3 Skemp (1987)

Skemp stelde een schema op waar de verschillen opstelden tussen de visuele kant van wiskunde en de verbaal-algebraïsche kant. Hij legt hierbij de nadruk op het feit dat de twee zijden complementair zijn. Door deze opsomming wordt nog eens duidelijk dat we de beide nodig hebben om tot diep begrip te kunnen komen. (Rivera, 2011)

Visueel	Verbaal-Algebraïsch
Vorm, positie in de ruimte	Abstract, onafhankelijk van ruimtelijke ordening
Moeilijk te communiceren	Makkelijker te communiceren
Kan meer individualistisch denken voorstellen	Kan meer gesocialiseerd denken voorstellen
Integratie, toont structuur	Analytisch, toont details
Simultaan	Opeenvolgend
Intuïtief	Logisch/niet-intuïtief
Informeel/experimenteel	Formeel en bewijsgericht
Zien wat je nog niet zag	Zien wat je al gezien hebt
Middelen	Doel
Illustratief	Generaliserend
Geometrisch	Symbolisch

2.6.4 Bishop (1970)

Bishop hield zich vooral bezig met de psychologische dimensie van visualiseren. Hierin deed hij drie bevindingen. Ten eerste vond hij dat het ontwikkelen van mentale beelden van wiskundige objecten, concepten en processen meer tijd in beslag neemt en een groter cognitief vermogen veronderstelt dan bij een analytische methode. Als tweede stelde hij vast dat het aanmoedigen van het gebruik van beelden zorgt voor een storm aan verschillende types beelden in de klas. Zo kan het inzicht nog verbreed worden. Ten derde merkte hij ook op dat de tegenzin om te visualiseren op oudere leeftijd niet eenvoudig te verklaren is. Hij baseert zich hier op onderzoek van Presmeg. Hij denkt dat het te maken zou kunnen hebben met socioculturele factoren. Sommige leerlingen worden niet graag verplicht om een oefening op een bepaalde manier op te lossen. Andere vinden het overbodig of kinderachtig. Toch is hij van mening dat er weinig mensen zijn waarvoor het geen positief effect zou hebben. (Rivera, 2011)

2.6.5 Presmeg (1991)

Presmeg schreef in 1991 een artikel over de rol van de leerkrachten in een curriculum dat zich focust op visualisatie. Hij maakt hierin een onderscheid tussen de aanpak van sterke wiskundige leerkrachten en zwakkere wiskundige leerkrachten. Sterke leerkrachten gaan volgens hem namelijk veel verder dan visualisatie op zich. Ze leggen ook de nadruk op creativiteit en ze leggen sterkere link met de echte wereld. Humor en speelsheid zijn hierbij belangrijk tijdens de wiskundeles. Leerkrachten met een zwakker vermogen om te visualiseren onderdrukken eerder de visuele capaciteiten van hun leerlingen. Zij leggen de nadruk op memorisatie en andere procedurele en symbolische vaardigheden. Presmeg heeft het ook over het belang van metaforen. Wanneer leerlingen eigen metaforen ontwikkelen, onthouden ze de leerstof en de bijhorende betekenissen beter. De leerkracht heeft hier vooral een begeleidende rol. (Rivera, 2011)

2.6.6 Rivera (2007)

In dit onderzoek heeft Rivera het over de afhankelijkheid van manipuleerbare objecten. Kennis is namelijk geconceptualiseerd als een model gemedieerde activiteit. Het gebruik van deze materialen kent drie grote fasen. Eerst is er volledige afhankelijkheid. De leerling heeft het concreet gereedschap nodig. Bij de gedeeltelijke afhankelijkheid gebruikt de leerling de modellen af en toe. In de derde fase is er uiteindelijk volledige losmaking. Tijdens deze drie fasen gebeurt er ook een transformatie van visuele beelden in meer gestructureerde visuele representaties. Dit noemt men progressief schematiseren, symboliseren en formuleren. Ook bij de laatste fase blijft de structuur van het model aanwezig. Het is echter niet meer aanwezig om op terug te vallen. Dat is ook niet meer nodig doordat deze concrete modellen vervangen zijn door mentale representaties van deze modellen en de bijhorende structuren, schema's en symbolen. (Rivera, 2011)

2.6.7 Papert (2002)

Papert schrijft over het onderscheid tussen een taal en tussen algebra. Taal is volgens hem op een organische wijze ontstaan en zo verder ontwikkeld. Bij algebra is dat niet het geval. Het werd 'gemaakt' door wiskundigen met een doel. Daarom voelt het voor leerlingen ook minder natuurlijk aan om te leren. (Rivera, 2011)

3 Visuele wiskunde: onderzoek West-Vlaanderen 2018

In de vorige delen bespraken we de onderdelen en theorieën rond visuele wiskunde. Uit de PISA-onderzoeken en de peilingstoetsen weten we ook ongeveer hoe het gesteld is met het Vlaamse onderwijs in het algemeen. De hoofdonderzoeksvraag van de bachelorproef ‘hoe kunnen we de beeldvorming van wiskundeconcepten bij leerlingen van de eerste en tweede graad secundair onderwijs in West-Vlaanderen verbeteren door de instructiemethode aan te passen?’ wordt in dit kleinschalige onderzoek niet volledig onderzocht. We bekijken enkele deelonderzoeksvragen met de specifieke toepassing op het West-Vlaamse Katholieke wiskundeonderwijs in de eerste en tweede graad.

- Hoe staan leerkrachten tegenover het gebruik van concreet materiaal?
- Hoe belangrijk vinden deze leerkrachten beeldvorming bij het leren van wiskunde?
- Welke modellen gebruiken leerkrachten?
- Waar komen deze modellen vandaan?
- Wie betaalt deze materialen?
- Is er een verband tussen de lengte van de carrière en het gebruik van modellen?
- Hoe open staan leerkrachten om nieuwe materialen te testen?

Dit zijn enkele vragen waar we met dit onderzoek een antwoord op zoeken. Om deze situatie te schetsen heb ik beroep gedaan op de data uit enkele interviews met leerkrachten en een enquête. Ik bezocht ook de beurs Tools For Schools in 2017.

3.1 Methode

Voor de interviews ging ik op zoek naar leerkrachten met een specifieke mening over visualiseren. Meneer Standaert raadde mij aan de start van het onderzoek enkele interessante leerkrachten aan. Het doel van de interviews was om in de diepte te gaan kijken naar hoe leerkrachten visualisatie verwerken in hun lessen. Ik praatte met vier wiskundeleerkrachten. De interviews duurden gemiddeld anderhalf uur.

Op 5 april 2017 trok ik ook naar de onderwijsbeurs Tools for schools in de Expo van Kortrijk, waar leermiddelen voor zowel het basisonderwijs als het secundair onderwijs tentoongesteld werden.

Voor de enquêtes nam ik persoonlijk contact op met alle wiskundecoördinatoren van alle Katholieke West-Vlaamse scholen. Op die manier werd de enquête over alle doelscholen verspreid. De onderzoeksvraag bij de enquête draaide rond het gebruik van concrete modellen in de lessen. Het is vooral een kwantitatief onderzoek, met enkele kwalitatieve vragen. Bijlage 9 bevat een voorbeeldenquête. Uiteindelijk namen 147 mensen deel aan de enquête. Volgens een schatting van de pedagogische begeleider Geert Delaleeuw zouden er tussen de 500 en 600 leerkrachten actief zijn in het West-Vlaamse wiskundeonderwijs in de eerste en tweede graad. Dat is dan ook de populatie die we onderzoeken. Met een steekproefgrootte van 147 zullen de resultaten dus vermoedelijk wel significant zijn. We concentreren ons echter op de grote lijnen en vermoedens in de resultaten. Verder statistisch onderzoek behoort niet tot het bestek van deze bachelorproef.

Mijn hypothese is gebaseerd op mijn eigen beperkte ervaring in stage en mijn schoolcarrière. Ik vermoed dat de leerkrachten vooral ruimtefiguren gebruiken. Ik denk dat de oudere generatie het bord als waardevolste middel ziet en minder tijd investeert in digitale middelen. Naar mijn mening zien alle wiskundeleerkrachten het belang van beeldvorming wel in, maar weten ze niet goed hoe ze dat specifiek kunnen toepassen.

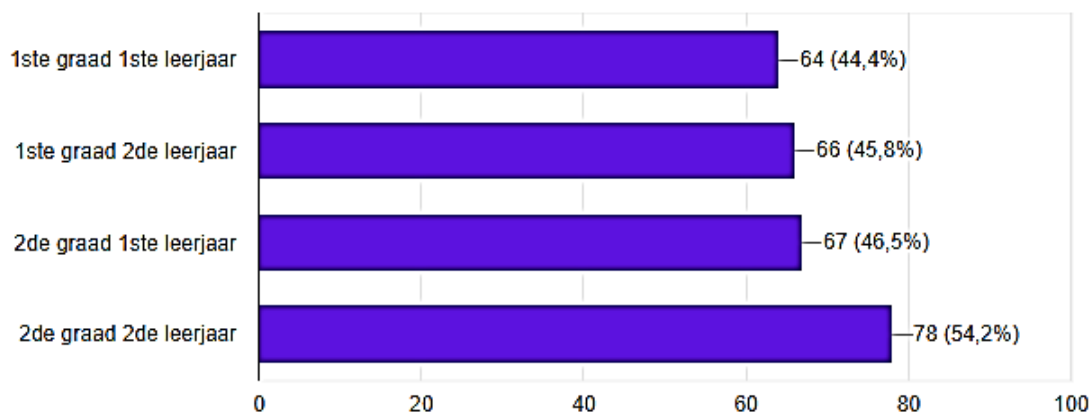
3.2 Resultaten

3.2.1 Enquêtes

3.2.1.1 Beschrijven van de steekproef

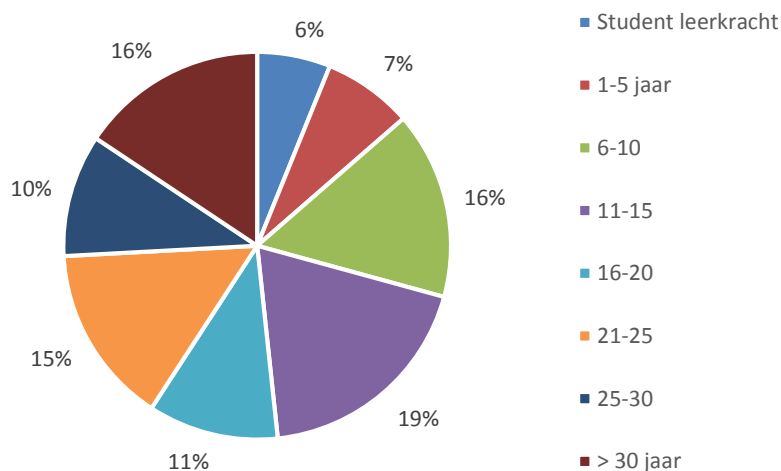
In totaal vulden 147 wiskundeleerkrachten de enquête in. 67% van de steekproef waren vrouwen, tegenover 33% mannen. In de grafieken hieronder staan nog enkele andere kenmerken van de steekproef.

Ten eerste werd er gevraagd naar de leerjaren waarin de leerkrachten lesgeven. Er is een evenwichtige spreiding van de tewerkstelling over de vier leerjaren. Het grootste aantal geeft les in het vierde middelbaar.



Figuur 15: Tewerkstelling van de leerkrachten uit de steekproef

Ten tweede vroeg ik ook naar de onderwijservaring van de respondenten. Opnieuw is er een vrij gelijkmatige spreiding. De grootste groep heeft 11-15 jaar ervaring. De kleinste groep zijn de studenten aan de lerarenopleiding.



Figuur 16: Onderwijservaring van de leerkrachten uit de steekproef

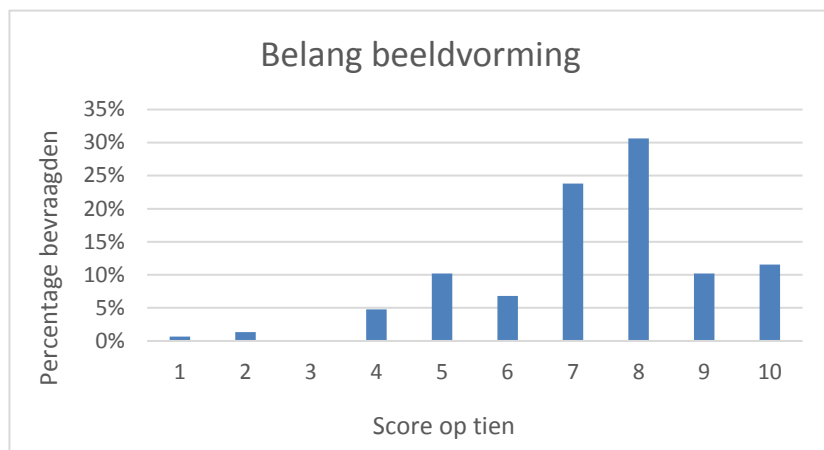
In de enquête werd ook gevraagd naar het geven van een ander vak in combinatie met wiskunde. Daarin viel op dat 44,22% van de bevroegden ook een wetenschapsvak doceert.

Tabel 5: Percentage bevroegden die wiskunde combineren met een wetenschapsvak

Antwoord	Aantal met een combinatie met een wetenschapsvak
Neen	55,78%
Ja	44,22%
Eindtotaal	100,00%

3.2.1.2 Resultaten

Ten eerste werd er gevraagd naar het algemene beeld over beeldvorming en visualisatie. De onderstaande drie grafieken geven de resultaten weer. Ik stelden hierrond drie vragen.



Een van de vragen peilde naar het belang van beeldvorming in de les. De resultaten waren in het voordeel van de beeldvorming. 76,19% van de bevroagden gaf een score van 7 of hoger op tien. 6,80% vindt beeldvorming niet belangrijk en gaf een score lager dan vier. 10,20% geeft een score 5 en weet dus niet goed of beeldvorming al dan niet van belang is.

Figuur 17: Resultaten: Belang beeldvorming



Figuur 18 gaat over het gebruiken van verschillende strategieën in de wiskundeles. Dat is namelijk zeer belangrijk voor een flexibele beeldvorming. Hier liggen de resultaten meer naar links. 69% van de bevroagden geeft een score 2 of 3. Slechts 11,56% gebruikt vaak verschillende strategieën, wat een score 4 of 5 omvat.

Figuur 18: Resultaten: Gebruik verschillende strategieën



In figuur 19 gaat het opnieuw over het belang van visualisatie. Deze vraag werd op het einde van de enquête gesteld, tegenover de twee bovenstaande vragen. We zien dan ook een grote correlatie met de eerste grafiek over het belang van beeldvorming. De twee grafieken zijn bijna identiek. Nu geeft 86,30% een score van 6 of hoger op deze stelling. Bij grafiek 1 wat dat 82,99%.

Figuur 19: Resultaten: Inzetten op visualisatie

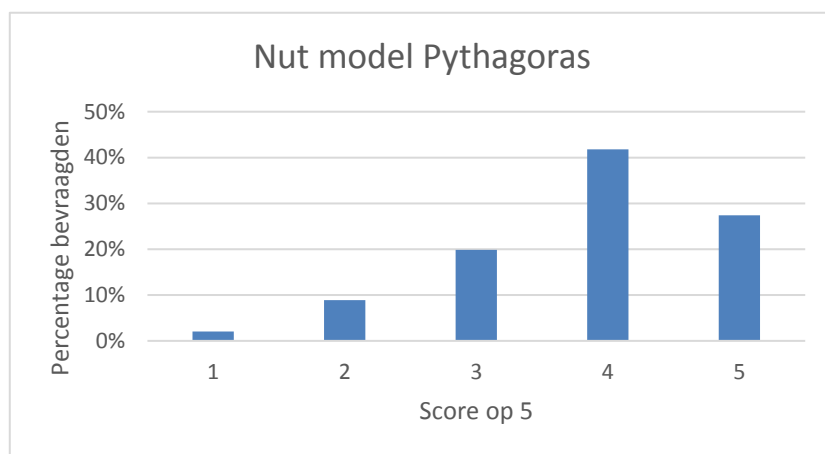
De meeste leerkrachten in de bevraging zien dus wel degelijk het belang in van beeldvorming in wiskundige. Ze vinden ook dat we weer moeten inzetten op visualisatie in de les. Ze geven wel toe niet vaak verschillende strategieën te gebruiken.

De volgende vragen in de enquête peilden naar het gebruik van manipuleerbare modellen. Het eerste model was een dynamisch model dat kan gebruikt worden bij de stelling van Pythagoras.



Bij de vraag kregen ze een filmpje te zien waarin het water van het grote vierkant in de twee kleinere vierkanten stroomt. Het filmpje is al 1 107 654 keer bekeken op Youtube. Het is dus niet te ontkennen dat het model aandacht trekt. Met deze vraag wil ik ook zien in hoever de leerkrachten nadenken over de gebruiksvriendelijkheid van een model. Dit model is zwaar en kan enkel bij de inleiding van de stelling van Pythagoras worden gebruikt. Hoe wegen de leerkrachten de leerwinst af tegenover de nadelen van dit model.

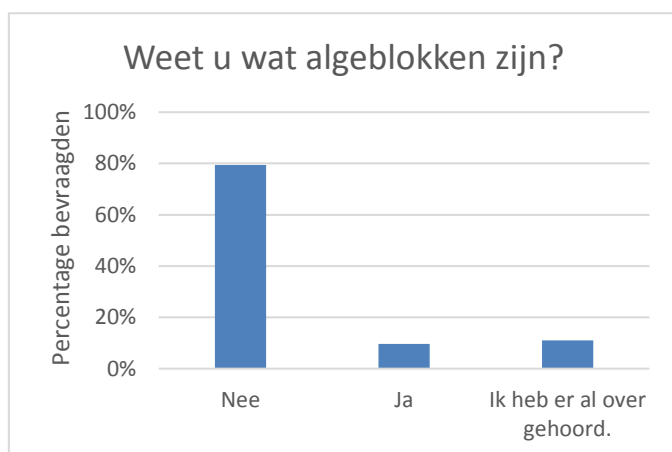
Figuur 20: dynamisch model Pythagoras



De resultaten spreken in het voordeel van het model. De grafiek wijkt af naar rechts. 69,18% geeft een score van 4 of 5. Ze vinden het model dus zeker nuttig. Misschien dachten ze bij deze vraag niet specifiek na over het gebruik in klas, maar interpreteerden ze de vraag naar nut als enkel didactisch nut. Ik kan hieruit dan ook niet echt conclusies trekken.

Figuur 21: Resultaten: Nut model Pythagoras

In het praktische gedeelte van deze bachelorproef, gaan we dieper in op het gebruik van algeblokken en afgetegels. Aan de hand van een afbeelding stelde ik hier enkele vragen over.



Met de eerste vraag wilde ik een beeld krijgen van de bekendheid van algeblokken. 79,45% kent algeblokken niet. 9,59% geeft aan wel te weten wat algeblokken zijn. 10,96% heeft er al over gehoord. In de volgende vraag peilde ik naar het gebruik van algeblokken. Slechts 2,04% van de bevroagde leerkrachten heeft algeblokken al effectief gebruikt in de les.

Figuur 22: resultaten: Bekendheid algeblokken

Tabel 6: gebruik algeblokken

Antwoord	Hebt u algeblokken al gebruikt in uw lessen?
Ja	2,04%
Nee	97,96%
Eindtotaal	100,00%

Naast de bekendheid van de algeblokken, wou ik ook polsen naar de openheid van leerkrachten tegenover nieuwe modellen. Ongeveer 80% weet niet wat algeblokken zijn. Er wordt vervolgens gevraagd of ze de algeblokken zouden gebruiken indien ze beschikbaar waren. Hoe groter het percentage leerkrachten dat hier negatief op antwoordt, hoe kleiner de openheid tegenover nieuwe modellen. Op deze vraag antwoordden 46,15% van de bevroagden dat ze het niet zouden gebruiken. 41,78% van het totaal van de bevroagden gaf aan algeblokken niet te kennen én antwoordde negatief op de vraag naar het gebruik indien ze beschikbaar zouden zijn. Zonder achtergrondkennis over het model, stellen ze zich dus gesloten op tegenover het gebruik.

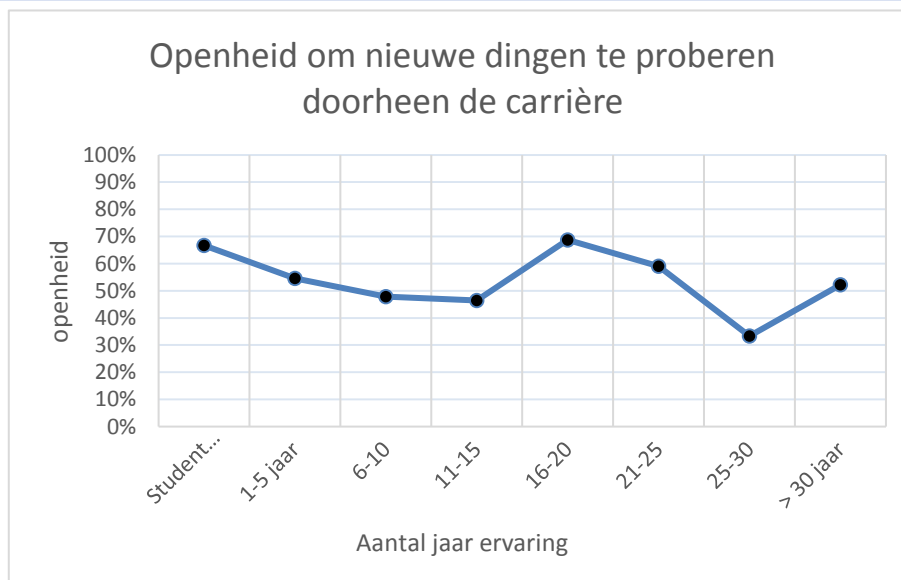
Tabel 7: Resultaat: gebruik algeblokken bij vrije beschikbaarheid

Antwoord	Zou u de algeblokken gebruiken indien ze beschikbaar waren?
Ja	53,85%
Nee	46,15%
Eindtotaal	100,00%

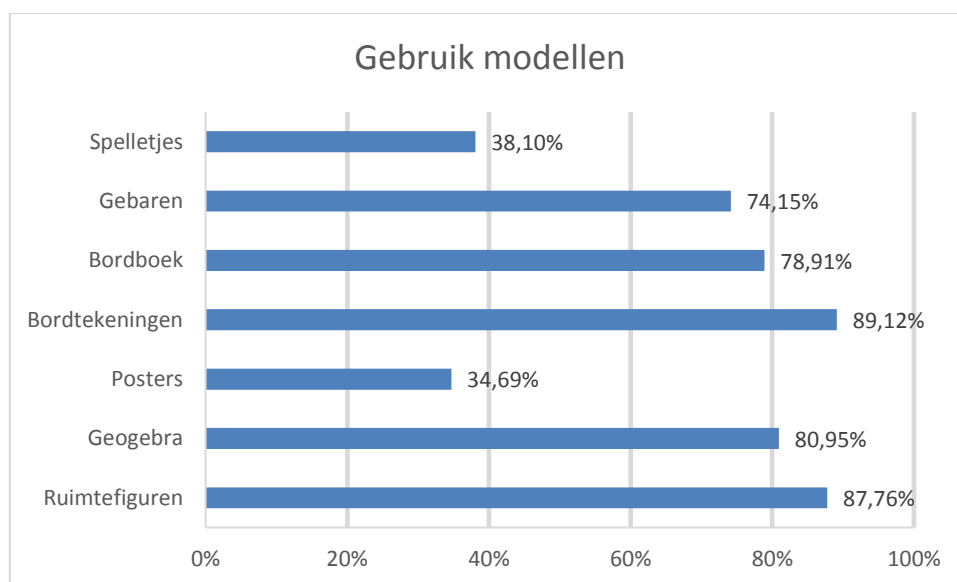
Ik bekeek bij deze vraag ook de relatie met het aantal jaar onderwijservaring. Mijn hypothese is namelijk dat de oudere leerkrachten minder open staan voor nieuwe modellen, dan leerkrachten aan het begin van hun carrière. Als we de resultaten bekijken, kunnen we andere vermoedens afleiden. In de onderstaande tabel en grafiek kan je zien dat de openheid waarschijnlijk het grootst is bij studenten en na 16-20 jaar in het onderwijs. De eerste jaren van de carrière (1-15 jaar) daalt de neiging om nieuwe dingen te proberen. Daarna volgt opnieuw lichte stijging. Tussen de 20 en 30 jaar onderwijservaring daalt de openheid opnieuw. Leerkrachten met meer dan 30 jaar ervaring staan dan weer in 52,17% van de gevallen open, wat een stijging is tegenover de meting op 25 jaar. Om dit echter te generaliseren is verder statistisch onderzoek nodig. Gemiddeld staat de helft (52,38%) van de leerkrachten uit de test open voor nieuwe input, de andere helft niet.

Tabel 8: Resultaten: Openheid doorheen de carrière

Hoelang geeft u al les?	Gemiddelde "Ik zou de algeblokken gebruiken indien ze beschikbaar waren"
Student wiskundeleerkracht	66,67%
1-5 jaar	54,55%
6-10	47,83%
11-15	46,43%
16-20	68,75%
21-25	59,09%
25-30	33,33%
> 30 jaar	52,17%
Eindtotaal	52,38%



Ik deed ook *Figuur 23: Openheid doorheen de carrière* navraag over welke modellen de leerkrachten gebruiken in hun lessen. In onderstaande tabel kunt u het overzicht zien van de meest gebruikte materialen. Het bord en de ruimtefiguren zijn zoals verwacht het meest aanwezig. Het bordboek werd in 78,91% van de gevallen aangeduid als hulpmiddel. Geogebra wordt in 80,95% van de gevallen gebruikt. 74,15% geeft aan gebaren ook als visuele ondersteuning te gebruiken. Slechts 9% gebruikt ook Desmos als online rekentool. Spelletjes en posters worden minder frequent ingezet. Bij de overige opties werden ook enkele andere zaken vermeld, zoals Youtube, Powerpoint, Knex, Cabri, breinaalden, borstelstelen, tafels...



Figuur 24: Gebruik modellen

De volgende vraag polste naar de drijfveer om al dan niet voor een bepaald model te kiezen. Het viel op dat leerkrachten hoofdzakelijk positieve argumenten aanhalen. Ze zien de voordelen van het gebruik van visueel materiaal in de klas. In tabel 9 clusterde ik de redenen die meerdere keren voorkwamen. De drie hoofdredenen die gegeven worden om een model te gebruiken zijn de leerwinst, het interessanter maken van de lessen en de beschikbaarheid van de materialen. De drie belangrijkste redenen om het niet te doen zijn de tijdsdruk, de afwezigheid van de materialen op school en een te kleine leerwinst.

Tabel 9: Redenen een model wel of niet in te zetten

Redenen om een model wel te gebruiken	Redenen om een model niet te gebruiken
Leerwinst: - versterkt de aandacht - de leerlingen onthouden het beter - versterkt het probleemoplossend vermogen - Verbeterd inzicht De leerlingen leren het sneller Het is efficiënt.	Het leidt af van de essentie van het lesonderwerp.
Aanschouwelijkheid in de lessen	Kostprijs
Grotere motivatie van leerlingen, het boeit hen. Het maakt de lessen leuker.	Het geeft te veel prijs aan de leerlingen. Het belemmert het denken.
Noodzakelijk om oefeningen op te kunnen lossen door de omzetting van tekst naar een figuur. Verduidelijkt de leerstof	We hebben er geen tijd voor.
Sluit aan bij het handboek	Sluit niet aan bij het niveau van de klas.

De materialen zijn aanwezig op school.	Lage efficiëntie.
Variatie in de lessen	Niet mogelijk bij bepaalde onderwerpen.
Leerlingen hebben moeite om zicht te focussen bij gesproken taal.	Te moeilijk om te begrijpen voor de leerlingen
Sluit aan bij de noden van de leerlingen (1B/BSO)	Wisselende klaslokalen
Het is functioneel bij de opbouw van de les.	Niet beschikbaar op school
Het is een ondersteuning voor leerlingen die visueel leren.	De leerplannen laten deze creativiteit niet toe.
Handig om mee te werken. Eenvoudig te gebruiken en te begrijpen.	
Werkt activerend.	

In het praktische deel van de bachelorproef bespreek ik enkele modellen die leerkrachten uit eenvoudige materialen kunnen maken. De volgende vraag test dan ook hoeveel leerkrachten op dit moment zelf visueel materiaal maken. Uit de resultaten kunnen we vermoeden dat ongeveer de helft zelf materialen maakt. 55,78% van de bevroagden uit steekproef antwoordt namelijk positief. 44,22% maakte de gebruikte modellen niet zelf. De vervolgvraag peilde dan ook naar de bron van deze andere modellen. In 44,90% van de gevallen kocht de school zelf de modellen aan. Het valt op dat hier maar 26,53% aangeeft zelf de modellen te maken. Dat is vermoedelijk de groep die enkel met zelfgemaakte modellen werkt. 17,69% verklaart geen modellen te gebruiken. De leerlingen vormen ook voor 3,40% een alternatieve bron voor modellen. Andere mogelijkheden om modellen te bekomen waren het internet, speelgoed of uitgeverijen.

Tabel 10: Resultaten :maken van modellen

Antwoord	Maakt u soms modellen zelf?	Percentage
Ja	82	55,78%
Nee	65	44,22%
Eindtotaal	147	100,00%

Tabel 11: Resultaten: Oorsprong van modellen

Antwoord	Indien u de modellen niet zelf maakte, hoe kwamen ze dan bij u terecht?	Overeenkomstig percentage
School kocht de modellen zelf aan.	66	44,90%
Ik maak de modellen zelf.	39	26,53%
Ik gebruik geen modellen.	26	17,69%
Een collega maakte de modellen.	7	4,76%
Leerlingen maakten de modellen.	5	3,40%
Andere: GeogebraTube	1	0,68%
Andere: Internet	1	0,68%
Andere: speelgoed	1	0,68%
Andere: Uitgeverij	1	0,68%
Eindtotaal	147	100,00%

Als de helft van de leerkrachten aangeeft soms modellen zelf te maken, is het ook belangrijk om te kijken of er daarvoor een financiële regeling mogelijk is. In de onderstaande tabel staan de resultaten bij de vraag: Kunt u de kosten voor het maken van de modellen terugkrijgen van de school? 43,54% geeft aan dat dit geen enkel probleem is. 21,09% geeft aan dat een financiële tussenkomst voor zelfgemaakte modellen niet mogelijk is bij hen. 23,13% maakt geen modellen. 12,24% vraagt er niet om. Sommige in deze groep vinden dat de kostprijs van deze modellen te laag is om aan te geven. Andere weten niet of dit mogelijk is.

Tabel 12: Resultaten: financiële ondersteuning voor zelfgemaakte modellen

Antwoord	Kunt u de kosten voor het maken van de modellen terugkrijgen van de school?	Overeenkomstig percentage
Ja	64	43,54%
Nee	31	21,09%
Ik maak zelf geen modellen.	34	23,13%
Het kost geen geld.	9	6,12%
Dat weet ik niet.	5	3,40%
Soms	3	2,04%
Ik vraag het niet.	1	0,68%
Eindtotaal	147	100,00%

Ik wou ook op een minder expliciete wijze nagaan hoe creatief leerkrachten omgaan met hun leerstof. Dat heb ik geprobeerd vast te stellen aan de hand van de mate waarin ze het handboek volgen. Leerkrachten die heel sterk de richtlijnen van het handboek volgen, zijn volgens mij ook minder geneigd om nieuwe toe te voegen, zoals andere werkwijzen, beelden... Dat blijft natuurlijk een hypothese dat nog moet bewezen worden. Ik vroeg daarom ook naar de reden waarom ze het handboek al dan niet volgen.

De resultaten van de eerste vraag, neigden sterk naar de linkerkant. Het handboek wordt gemiddeld gezien dus meer gevolgd dan niet gevolgd. Dat lijkt mij ook zeer logisch. 58,90% zegt zelf 70% of 80% van de tijd de opbouw van het handboek te volgen. 88,36% geeft een score van 5 of hoger en volgt dus het handboek voor de meerderheid van de lessen.



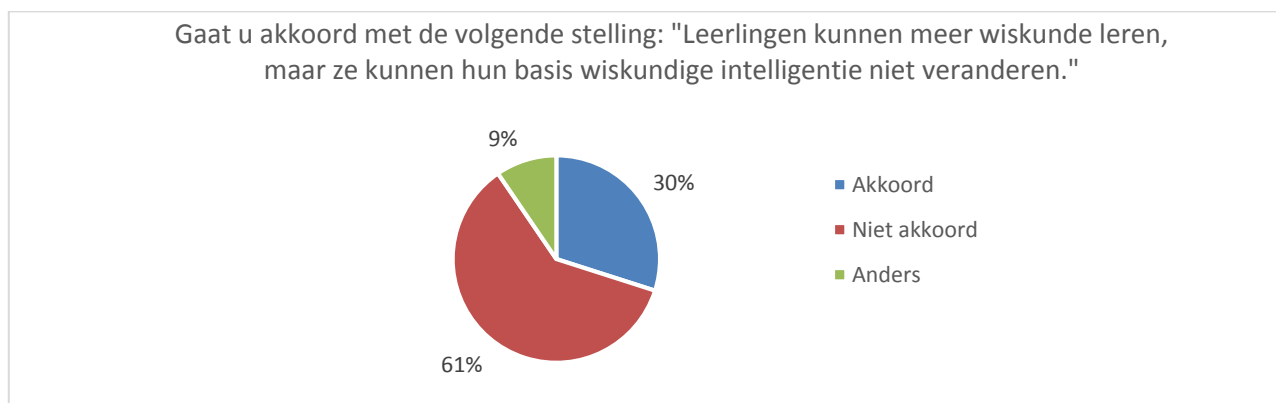
Figuur 25: Resultaten: volgen van het handboek

Er waren opnieuw enkele redenen die erbovenuit staken. De hoofdreden om het handboek wel te volgen is de aansluiting bij het leerplan. Er is nagedacht over de structuur van de meeste handboeken. Het is dan ook logisch om deze structuur te volgen. De leerkrachten die aangeven het handboek wel te volgen, merken hierbij wel op dat er flexibiliteit mogelijk is om zaken te schrappen of aan te vullen. Ze maken hun eigen versie van een bestaand handboek. Een tweede hoofdreden om het handboek te volgen is de noodzaak voor de leerlingen. Jonge leerlingen beschikken niet over de vaardigheden om een eigen cursus te schrijven. Zij hebben structuur nodig. Er worden opvallend meer redenen gegeven om het handboek niet te volgen. Dat is tegenstrijdig met de resultaten op de vorige bladzijde. De meeste leerkrachten volgen in realiteit namelijk de indeling van het handboek. De hoofdreden om het handboek niet te gebruiken is de slechte structuur en inhoud van het boek. De voorbeelden zijn niet goed gekozen. De oefeningen zijn te uitgebreid en niet praktisch. Het is te moeilijk. Er zijn te veel details en anekdotes aanwezig die afleiden van de kernleerstof. Er is te weinig herhaling aanwezig. Dit zijn enkele bepalende factoren. Het valt op dat tijdsgebrek in beide kolommen een argument is. Sommige leerkrachten vinden dus dat het werken met een handboek de leersnelheid vertraagt, terwijl andere het handboek gebruiken om zo efficiënt mogelijk les te kunnen geven.

Tabel 13: redenen om het handboek wel/niet te volgen

Redenen om het handboek wel te volgen	Redenen om het handboek niet te volgen
Het is logisch om die stappen te zetten die het handboek volgt.	De leerlingen moeten zelf een cursus leren opbouwen vanaf het derde jaar. Als de leerlingen meeschrijven begrijpen ze het soms beter.
Tijdsgebrek	Slechte opbouw, een andere volgorde is logischer
Collega's doen het ook.	Uitleg is te moeilijk
Aanvullingen zijn achteraf nog mogelijk.	Ik wil rekening kunnen houden met de problemen van/voor de leerlingen
Gemakzucht	Te weinig herhaling
Het boek volgt de leerplannen en eindtermen.	De inbreng van de leerlingen speelt de hoofdrol
Ik gebruik het boek enkel voor vastzetting van leerstof en inoefening.	Te veel theorie of te veel oefeningen.
Goede structuur met een duidelijke indeling tussen theorie en oefeningen	Soms is de theorie niet duidelijk of zijn er te veel details aanwezig.
Het handboek is voor de leerlingen een houvast.	Niet werkbaar volgens de grootte van de klas
Kennis van excel voor statistiek staat mooi uitgeschreven.	De vrijheid van de leerkracht is weg.
	Slechte voorbeelden, te kinderachtig uitgelegd
	Voorkeur voor een andere aanpak
	Er is een overvloed aan ander materiaal om uit te selecteren
	Tijdsgebrek

Een laatste onderdeel van de enquête peilde naar de attitudes van leerkrachten tegenover het vak wiskunde. Deze zijn namelijk bepalend voor het creëren van een open klasomgeving waar modellen flexibel kunnen ingezet worden. Ten eerste kregen de bevroagden een stelling. Hier werden ze verplicht om een keuze te maken tussen akkoord of niet akkoord. Bij deze vraag was er dus geen schaal aanwezig. Er was wel een derde optie om zelf een antwoord aan te vullen. Slechts 9% vulde een genuanceerd antwoord in. De anderen kozen wel een duidelijk standpunt. 30% gaat akkoord met de stelling: "Leerlingen kunnen meer wiskunde leren, maar kunnen hun basis wiskundige intelligentie niet veranderen." Deze stelling verwijst naar het geloof in een mahtematical mindset. (Boaler J. , 2016) De resultaten toonden aan dat 61% niet akkoord gaat met deze stelling. Zij geloven dus in het gebruik van een growth mindset. 30% gaat akkoord met de stelling dat leerlingen ofwel geboren zijn met een gave voor wiskunde ofwel dit inzicht niet bezitten.



Figuur 26: Stelling growth mindset

In de laatste vraag werd naar een mogelijke oorzaak voor de slechte reputatie van het vak wiskunde gezocht. De leerkrachten kregen daar de vrije ruimte om een antwoord te formuleren. Uiteindelijk kwamen er enkele clusters naar voor, want de meeste gaven meer dan een mogelijke reden. In totaal kwam ik op 14 grote redenen volgens de bevroagden. De top drie die het meeste werden vermeld, staan hieronder in het rood aangeduid. Een gebrek aan inzicht en aanleg voor het vak staat op nummer één. Ten tweede is de invloed van de leerkracht ook zeer bepalend. Op de derde plaats wordt vermeld dat de abstractie sommige leerlingen demotiveert om wiskunde te leren. Ze zien de link met het dagelijks leven niet meer. Ze zien het nut niet om hier tijd in te stoppen. Op de vierde plaats staat de frustratie. Wiskunde is geen vak dat je vanbuiten kan leren. Sommige leerlingen werken veel, maar behalen de resultaten niet.

Tabel 14: Redenen waarom sommige leerlingen wiskunde niet leuk vinden

Reden	Aantal	Percentage
Ze zien de link met het dagelijks leven niet.	8	3,85%
Ze zien het nut niet.	18	8,65%
Ze geven te snel op wanneer ze een antwoord of werkwijze niet vinden.	4	1,92%
Weinig succeservaringen	19	9,13%
Slechte wiskundeleerkrachten	24	11,54%
Slechte ervaringen in het verleden	12	5,77%
Slechte parate kennis	7	3,37%
Gebrek aan inzicht, geen aanleg	34	16,35%
Geen interesse voor het vak	9	4,33%
De leerstof is te abstract.	22	10,58%
Geen zelfvertrouwen, verkeerd zelfbeeld van de leerlingen over hun kunnen	7	3,37%
Te moeilijk	19	9,13%
Veel doen veel moeite, maar halen soms weinig resultaat	20	9,62%
Ze volgen een verkeerde studierichting met te veel uren wiskunde	5	2,40%
Totaal	208	100,00%

3.2.2 Interviews

3.2.2.1 Beschrijven van de steekproef

Voor de interviews selecteerde ik vier wiskundeleerkrachten op basis van de aanbevelingen van mijn eerste begeleider, meneer Standaert.

- Willem Beeuwsaert is een leerkracht die sinds dit schooljaar (2017-2018) op pensioen is. Hij gaf les in de eerste graad in de middenschool van Sint-Rembert in Lichtervelde.
- Els Van Haecke is leerkracht wiskunde in het Prizma Campus College in Izegem. Ze geeft les in het 3de en 4de middelbaar.
- Filip Tanghe geeft wiskunde in de VMS in Roeselare. Hij geeft al 17 jaar les en hij zou volgens meneer Standaert een zeer open houding hebben om nieuwe zaken uit te proberen. Hij heeft ervaring in zowel de eerste als de tweede graad.
- Johanna Mus staat in het Barnum in Roeselare. Ze heeft al twaalf jaar ervaring als wiskundeleerkracht. Ze stond al in zowel de eerste als de tweede graad.

Het doel van deze interviews is om dieper te kijken in de redenering van leerkrachten rond visualisatie. Het is een kwalitatief onderzoek, tegenover de eerder kwantitatieve enquête.

3.2.2.2 Resultaten

Bijlage 2, 3, 4 en 5 bevatten de volledig uitgeschreven interviews. Bijlage 6 bevat foto's van modellen die ik tijdens deze interviews of tijdens andere schoolbezoeken ben tegengekomen. Hieronder bespreek ik kort de opvallendste uitspraken en voorbeelden.

3.2.2.2.1 Willem Beeuwsaert

In het interview van Willem Beeuwsaert werd al snel duidelijk dat hij zeer veel ervaring en inzicht heeft als het op wiskunde leren aankomt. Hij weet ook waar leerlingen mee bezig zijn en reflecteert diep over het leerproces. Hij staat ook zeer open om nieuwe dingen te proberen en hij is een drijfkracht voor het vak wiskunde in zijn school om nieuwe projecten op te zetten, nieuw materiaal te ontwikkelen... Tijdens het interview toonde hij mij de klaslokalen en vertelde hij over enkele zaken die hij uitgetest heeft doorheen zijn carrière. In bijlage 6 staan de modellen afgebeeld die ik daar vond. Hij stond in de eerste graad secundair onderwijs in Lichtervelde. Hieronder bespreek ik enkele standpunten van hem met de bijhorende redenering.

Posters zijn niet zinvol. Dit is een eerste uitspraak die ik interessant vond. De klas wordt er volgens hem te druk door. Op de posters die hij kreeg van uitgeverijen staat te veel informatie. De afbeelding blijft niet hangen bij de leerlingen. De terminologie komt ook niet vaak niet overeen. Dat is verwarrend voor de leerlingen. De posters kunnen ook voor afleiding zorgen tijdens de les. De klas aankleden voor de actuele thema's is volgens mij wel zeer nuttig. Alles moet daarom wel afneembaar zijn. 'Less is more' is een principe die hij hanteert in de wiskundeklas om rust te brengen. Het is wel nuttig om samen met de klas de leerstof te visualiseren.

Het leerplan laat ons niet toe om veel materiaal te gebruiken of creatiever met de leerstof om te kunnen gaan. Deze uitspraak kwam in de enquêtes ook enkele keer naar voor. Hij voelt zich gevangen in het handboek en het leerplan. De tijdsdruk is hoog en alles moet gezien worden. Hij gelooft dan ook sterk in het maken van eigen cursussen op een projectmatige manier. Daarvoor is dus echter heel veel enthousiasme voor nodig, want daar kruipt heel veel werk in. De leerkrachten hebben nu al tijd te kort.

Beelden zijn belangrijk. Daar lijken alle leerkrachten, zowel in de interviews als in de enquêtes over eens te zijn. Willem Beeuwsaert probeerde dit ook te verklaren. Hij zoekt de oorsprong van het belang van visualisering in de maatschappij. We leven in een beeldencultuur. We kijken veel naar de televisie, de leerlingen gamen, de computer is ook zeer visueel. Leerlingen lezen niet genoeg en hebben daarom ook moeite met het omzetten van woorden in een overeenkomstig beeld in hun hoofd. Die automatisering is net

zeer belangrijk bij wiskunde. We hebben twee hersenhelften en we moeten de beide dan ook ten volle ontwikkelen. De beeldencultuur is niet enkel negatief. Hij merkte doorheen zijn carrière dat het ruimtelijk inzicht beter is geworden. Hij legt de oorzaak bij het gamen. Coördinatie en inzicht zijn hierbij namelijk zeer belangrijk.

Digitale beelden zijn te snel. Dit is een uitspraak dat in het voordeel spreekt van visualisatie met analoge middelen. Als je een afbeelding projecteert, blijft die niet lang hangen. Een bordtekening, object, poster... zijn mogelijkheden om beelden langer in de klas te houden en zo vastzetting te verzekeren.

In getallenleer zijn we een visuele factor kwijt door het verdwijnen van verzamelingenleer. In meetkunde kan je de intuïtie gebruiken om eigenschappen af te leiden. Door het wegvallen van de achtergrond rond verzamelingen, zien de leerlingen de relaties niet meer tussen getallen, bewerkingen... Dat heeft geleid tot de verarming van het getalbegrip.

Hanteer altijd een combinatie van verschillende aanpakken. Als je geen balans hebt en vervalt in het gebruiken van één grote strategie, bijvoorbeeld de visuele aanpak, zal je leerlingen kwijtraken. De afwisseling op zich betekent al veel. Er zijn ook veel verschillende leerlingen. Dat betekent dus ook verschillende leerstijlen. Variatie is de sleutel.

Het start allemaal in de lagere school. Daar krijgen ze de basisvaardigheden om aan wiskunde te kunnen doen mee. Ik heb doorheen mijn carrière gemerkt dat de focus verlegd is. Het automatiseren van bewerkingen is ondergeschikt. Cijferen is niet meer gekend. De tafels zijn moeilijk. Staartdelingen leren ze niet meer. Dat automatiseren is net zo belangrijk. De leerlingen kennen de basis niet. Kunnen moeilijkere oefeningen ook niet oplossen. Ze raken gefrustreerd en uiteindelijk vinden ze wiskunde geen leuk vak meer. Het zelfvertrouwen vanuit de basisschool is wel gestegen. Dat is wel een positief punt.

3.2.2.2.2 Els Van Haecke

Het interview met Els Van Haecke verliep ook zeer vlot. Ze heeft een kritische blik op de eigen werkwijze van de school en ze maakte dan ook enkele genuanceerde opmerkingen, zoals duidelijk in de onderstaande voorbeelden.

In de hogere graden is abstract denken nodig. Het gaat allemaal vlotter door te visualiseren, maar de leerlingen moeten nog steeds in staat blijven om te abstraheren. Als ze verder studeren, zal dit ook nodig zijn. Het is dus minder nodig in het vijfde of zesde middelbaar. De leerkrachten van de hogere graden staan er ook minder voor open volgens haar. Als we in het derde en vierde jaar sterk op visualisatie inzetten dan zal de overgang naar de derde graad nog moeilijker worden.

Visualisatie is moeilijk bij algebra. Bij meetkunde lijkt het een logische overgang. De enige associatie voor algebra is het voorstellen van de merkwaardige producten door middel van vierkanten.

De basiskennis is gedaald. Hoofdrekenen gaat moeilijk. Rekenen met breuken of het oplossen van vergelijkingen gaat samen met rekenfouten. Dat is bepalend voor het verdere verloop van hun wiskundecarrière. Er is een mentaliteitswijziging gebeurd doorheen de jaren. Leerlingen vinden het vaak voldoende om enkel de theorie te snappen of te leren. Ze hebben minder de attitude om oefeningen spontaan opnieuw te maken. Leerlingen hebben ook minder tijd om echt te leren. Hun weekend is vol gepland. De computer zorgt voor afleiding. Er wordt geleerd voor een toets. Dan is het echter vaak te laat.

Een wisselend lokaal maakt het gebruiken van materiaal moeilijk. We hebben geen wiskundelokaal waar posters opgehangen kunnen worden. De leerkracht is verantwoordelijk voor het materiaal. Dat vergt inspanningen.

Door meer visuele ondersteuning aan te bieden, verhoog je de kans op succeservaringen. De kloof tussen sterke en zwakkere leerlingen wordt verkleind door het aanbieden van verschillende voorstellingen. In de

derde graad is die extra begeleiding misschien wel minder nodig. De zelfstandigheid van de leerlingen moet groeien naarmate ze ouder worden.

Algeblokken zullen volgens mij niet helpen om algebra beter te kunnen. Het feit dat algebra moeilijk is, ligt niet aan een tekort aan inzicht. Leerlingen maken vooral fouten bij het rekenwerk. Ze kunnen niet verder bouwen op de vorige leerstof. De leerplannen geven ook de vrijheid niet om heel veel verschillend mogelijkheden te overlopen in de klas. Je moet de meest efficiënte werkwijze kiezen.

Kleur en pijlen zijn belangrijk op het bord. De leerlingen hebben structuur nodig. De grafieken en figuren op het bord zijn belangrijk om de oefeningen te visualiseren. Het kost meer tijd om te tekenen aan het bord, dan om een digitale projectie te gebruiken. Toch is het leerrendement aan het bord volgens mevrouw Van Haecke groter. Je kan de figuur samen met de leerlingen opstellen. Je kan er flexibeler mee werken.

Visualiseren van abstracte wiskundeconcepten kan het ook net moeilijker maken. Hierbij kan je dus net de zwakkere leerlingen verliezen.

De theorie staat vaak niet goed in de handboeken. Vaak is het maar deels uitgeschreven en moet je het toch nog in een schrift aanvullen. Mocht het mooi in het handboek staan, zouden de leerlingen minder moeten schrijven. Dan zouden we misschien wel dieper in kunnen gaan op de verschillende inzichten.

3.2.2.2.3 Filip Tanghe

Filip Tanghe is een leerkracht die zeer open staat om nieuwe dingen te testen. Hij is tegelijk ook sceptisch en hij vindt dat we dingen die werken niet moeten veranderen, omwille van de verandering op zich. Hij deed ook enkele opvallende uitspraken tijdens het interview.

Het is niet nodig om heel veel materiaal mee te zeulen als leerkracht. Met een Bord, enkele kleuren en de zaken die aanwezig zijn in het lokaal kan je al zeer veel aanvangen. De realiteit bevat alle zogenaamde modellen. Voor algebra kent hij geen modellen. Het plooien van papier is hier een voorbeeld van. Zo kan je heel visueel de eigenschappen van een gelijkbenige driehoek aantonen. Je ziet de eigenschappen gewoon. Het is wel belangrijk om afwisseling te steken in de manier waarop je aandacht trekt. Humor kan hier ook een zeer eenvoudig en efficiënt middel zijn.

Het cognitieve is steeds minder aanwezig in het onderwijs. Hij merkte ook op dat leerlingen te weinig bezig zijn met hun studies. In de klas zijn ze meestal wel begaan, maar daar stopt het. Het verwerkingsproces gebeurt niet. Ze leren enkel voor een toets. Als leerkracht kan je ook maar doen wat je kan doen. De verantwoordelijkheid moet nog steeds bij de leerlingen liggen om aan het vak te studeren.

Digitale middelen gebruikt hij weinig. Hij is ervan overtuigd dat je de handelingen en stappen echt moet tonen. Hij geeft wel aan dat het misschien met de computer sneller gaat en kwalitatief ook beter is, maar hij prefereert het bord. Hij probeert tijd te winnen met een goede selectie van de oefeningen.

Voor je de keuze voor een model maakt, neem een stap achteruit. Je moet om variatie te hebben, niet alles dat we hebben, wegslijten. Tijd en geld zijn ook twee belangrijke factoren in deze overweging. Het leerrendement primeert.

Wiskunde is saai door de vele saaie leerkrachten en de weinige succeservaringen. Je moet tijd kunnen maken voor een babbel of een mopje. De leerkracht moet de leerstof ook heel goed beheersen. Anders kan er ook geen sprake van flexibiliteit in didactiek zijn.

Soms hebben de leerlingen het te goed. Er is altijd een netwerk om ze op te vangen als het niet lukt in de vorm van remediëring, CLB, GON...

De problemen met algebra gaan we niet oplossen met visualisatie. Algebra moet je niet voor u zien. Teveel vragen stellen, kan soms tot nog meer problemen leiden. Daartegenover staat wel dat veel leerlingen de

regels in algebra vaak als aapjes toepassen. Volgens mij is het wel belangrijker om verhaaltjes op te bouwen om de abstracte problemen zo in een realistische setting te kunnen plaatsen.

3.2.2.2.4 Johanna Mus

Johanna Mus gaf zelf aan zonder mening of voorkennis aan het interview te beginnen. Zij deed ook enkele uitspraken die tot nadenken aanzetten.

Met de computer kan je dynamische visuele ondersteuning bieden, wat niet mogelijk is op het bord. In het derde jaar gebruikt ze bij Pythagoras de computer om de stelling af te leiden. Van basis tot limiet heeft bij dat thema een applet gemaakt. De verschillende bewijzen zitten daar ook in verwerkt. Die applicatie is zeer duidelijk. Ook bij goniometrie gebruikt ze geogebra-applets. Bij gelijkvormige driehoeken gebruikt ze ook geogebra en het bord voor de visuele ondersteuning. Ze gebruikt het bord wel minder voor afleidingen. Met de computer kan dat veel dynamischer. Voor statistiek gebruikt ze vooral Excel en de GRM.

Ze gebruikt de materialen die voorhanden zijn. Knex en breinaalden zijn daar voorbeelden van. Voor ruimtemeetkunde gebruikt ze een doosje krijtjes, een tobenoneverpakking... Voorwerpen die de leerlingen kennen uit het dagelijks leven. Balpenen kunnen rechten voorstellen. Ze gebruikt ook papier als analoog model. De deellijn kan je hier bijvoorbeeld gemakkelijk mee aantonen, net zoals de som van de hoeken van een driehoek.

Modellen die zelf gemaakt zijn, zullen moeilijker te verantwoorden zijn voor financiering. Voor aangekochte modellen is dat geen problemen. De meeste leerkrachten vragen ook niet om een vergoeding voor zelfgemaakt materiaal.

Het is ook een leerproces om abstract te leren denken. Het is niet goed om bij zeer abstracte wiskunde visueel te werken.

Algeblokken zouden volgens mij enkel van toepassing zijn om te remediëren of uit te breiden in klassen waar meer tijd is. De tijdsdruk speelt hier een grote rol. Vaak zijn dergelijke leuke dingen minder efficiënt dan de huidige aanpak. Het leerplan zit nu al zeer vol. Het gaat ook gewoon goed zoals het nu gaat.

Visuele ondersteuning is een hulpmiddel, maar het mag niet de overhand nemen. Niet alle leerlingen zullen hier ook evenveel baat bij hebben. Niet iedereen leert visueel. Het is dus zeker belangrijk om een combinatie van strategieën te voorzien. Ik zou het zeker wel gebruiken in oefeningen en om stellingen te visualiseren in meetkunde. Het is ook belangrijk om hierbij toch de structuur ook te behouden.

Vroeger mochten we meer verwachten van de leerlingen. Ze heeft twaalf jaar ervaring in het onderwijs. Ze ziet een verschuiving bij de leerlingen. Vroeger konden de leerlingen volgens haar beter leren. De leerkrachten mochten moeilijkere dingen vragen. Nu denken ze zelf minder na. Er worden veel fouten gemaakt bij de basiskennis, zoals bij het omzetten. Ze heeft het gevoel dat de leerlingen minder voorbereid uit de lagere school komen dan vroeger.

Posters zijn handig, omdat je er altijd naar kan verwijzen. De school kreeg van Die Keure drie posters over de stelling van Pythagoras, over de stelling van Thales en over evenwijdige rechten en een snijlijn. Ze horen bij het handboek. Ik zou een klas wel niet volhangen met afbeeldingen. Te veel prikkels zullen volgens mij een negatief effect hebben op het leerproces.

De aversie tegenover wiskunde start meestal wanneer wiskunde moeilijker en abstracter wordt. In de eerste graad is het vooral rekenwerk. In de tweede graad komen daar de functies bij. Hiervoor is meer begrip nodig.

3.2.2.2.5 Geert Delaleeuw

Ik mailde ook naar de pedagogische begeleider met de vraag naar een interview. In de eerste mail legde ik kort de bedoeling en de onderzoeksvraag uit. Hij mailde echter terug dat hij weinig kan bijdragen over het onderwerp. In deze mail (bijlage 6) deed hij ook enkele opvallende uitspraken.

“Ik heb al heel veel klasbezoeken gedaan en stel vast dat het visuele aspect in de wiskundelessen zich beperkt tot het gebruiken van grafieken (functieleer) en statistische voorstellingen, voornamelijk met de grafische rekenmachine en in heel wat mindere mate met geogebra of excel. In een eerste graad en in de B-stroom zie ik soms ruimtefiguren opduiken (kubus, piramide, cilinder ...) of de leerkracht die zelf ruimtefiguren meebrengt om de leerlingen bv. inhouden te laten schatten of vergelijken (flessen, melkblikjes, conservendozen). Maar om eerlijk te zijn, ik heb nog maar een paar lessen gezien waarin die zaken even ter sprake kwamen (dit op een totaal van 1000 lessen). Wellicht staan ze op dat vlak veel verder in het basisonderwijs.”

Deze stellingen komen niet overeen met de resultaten van de interviews en de enquête.

3.2.3 Tools for schools: onderwijsbeurs

In bijlage 8 is een verslag terug te vinden van deze onderwijsbeurs. Ik beperk me hier tot een algemeen besluit.

De beurs tools for schools toont de leermiddelen die vandaag beschikbaar zijn voor het lager en secundair onderwijs. Het thema draaide in 2017 rond STEM. Er werd op voorhand dan ook meegedeeld dat er wiskundemateriaal aanwezig zou zijn op de beurs. Dat bleek ook het geval, maar enkel voor de lagere school. Voor het secundair onderwijs was er geen wiskundestand of specifiek materiaal aanwezig. Voor het kleuteronderwijs en het lager onderwijs waren er blokken, spelletjes, kralen... beschikbaar om de leerlingen op een speelse wijze kennis te laten maken met wiskunde. Toen ik navraag deed bij deze standen, werd mij verteld dat er geen materiaal ontwikkeld werd voor wiskunde voor het secundair onderwijs. Voor biologie, fysica en informatica was er wel materiaal aanwezig op dat niveau.

3.3 Discussie en besluit bij het onderzoek

3.3.1 Besluit

We kijken nu naar de grote trends in de resultaten van het onderzoek. Ten eerste viel het op dat de West-Vlaamse leerkrachten gebruiken wat voor handen is. De bekende tools, zoals het bord, het bordboek, geogebra en ruimtefiguren worden dan ook vaak ingezet om de les visueel te ondersteunen. Papier, gebaren, voorwerpen uit de klas worden meer gebruikt dan aangekochte modellen. Poster zijn minder populair. Het aanbod sluit namelijk niet aan bij de noden van de klas. De posters zijn te druk, zijn in het Engels, gebruiken andere terminologie... Andere leerkrachten gebruiken de posters niet, omdat ze de klas rustig willen houden. De muren volhangen met materiaal is geen goed idee. Dat kan voor afleiding zorgen tijdens de les. De helft van de leerkrachten maakte ook bepaalde modellen zelf. De meeste leerkrachten zien het belang van beeldvorming in. De hoofdredenen om deze modellen te gebruiken, blijken dan ook vooral rond leerwinst te draaien. Algebra blijkt een moeilijk onderwerp te zijn om te visualiseren. Sommige zien ook hier het belang om met beelden te werken, terwijl andere het belang van abstraheren aanhalen. De leerkrachten geven ook aan niet te weten hoe algebra zou moeten gevisualiseerd worden. Algeblokken zijn niet gekend bij de grote meerderheid van de leerkrachten en het wordt dan ook niet gebruikt in de algebralessen. Toch is er ook een kritische houding aanwezig. Het gebruik moet functioneel zijn. Tijd speelt hierin een grote rol. Het leerplan werd vaak vermeld als een struikelblok om nieuwe dingen uit te proberen. Ze voelen weinig vrijheid door de hoge druk om alle doelstellingen te behalen. Een nieuwe methode zou dan ook enkel ingezet worden als de

leerlingen het hiermee sneller doorhebben. Er is geen groot verschil tussen de oudere generatie en de jongere generatie. In beide groepen staat ongeveer de helft open om nieuwe dingen te proberen. Dat klopte dus niet met de gestelde hypothese. Er is niet enkel een probleem bij het vinden van visualisatiemogelijkheden bij algebra. Nieuwe modellen of leermateriaal voor wiskunde in het secundair onderwijs, zijn niet aanwezig op de markt. De leerkrachten moeten dus zelf de modellen maken als ze het willen gebruiken. De combinatie met de werkdruk zorgt ervoor dat leerkrachten niet meteen geneigd zijn dit te doen.

3.3.2 Discussie

Bij de enquête en de interviews kunnen heel wat kritische bemerkingen gemaakt worden. Ten eerste kijken we naar de bron van de data. Zelfrapportering is de enige manier waarop informatie werd verzameld. Hierdoor is er altijd een vertekend beeld van de werkelijkheid. De leerkrachten stellen de realiteit waarschijnlijk mooier voor dan ze werkelijk is. Ze hebben misschien een vertekend beeld van wat ze wel of niet doen. Ze geven misschien niet toe dat ze iets bijvoorbeeld doen uit gemakzucht. Bij de interviews is er ook het gevaar dat de geïnterviewde zegt wat ik wil horen. Het feit dat de bachelorproef visuele wiskunde heet, zorgt ervoor dat de ingesteldheid van de bevroagden verandert. Dit zou alvast het verschil verklaren tussen de observaties van de pedagogische begeleider en de rapportering van de leerkrachten zelf. De resultaten zullen waarschijnlijk minder positief zijn dan voorgesteld in de enquête en de interviews. We kijken ook naar de grootte en aard van de steekproef. De enquête werd afgenomen bij 147 wiskundeleerkrachten. De populatie van de wiskundeleerkrachten was 500, want we kijken enkel naar de West-Vlaamse leerkrachten van de eerste en tweede graad in katholiek secundair onderwijs. Dat is een zeer specifieke groep. Voor die groep kunnen we dan ook besluiten nemen, maar voor de rest van Vlaanderen hebben we geen gegevens. In de enquête zou er ook beter een opdeling gemaakt zijn tussen leerkrachten uit het ASO, TSO en BSO. De opmerkingen bij de vrije antwoorden deden vermoeden dat de aanpak daar verschilt. Er is dus nog zeker verder onderzoek nodig. De statistische verwerking waar voor elke vraag de significantie berekend wordt, moet ook nog uitgevoerd worden. De enquête is ook te kort en bevat te weinig controlevragen en herhalingsvragen om de consistentie na te gaan. De antwoorden kunnen veranderen afhankelijk van de vorige vragen, de context... Er is dus uitgebreider onderzoek nodig om te kunnen generaliseren voor Vlaanderen en specifieke besluiten te trekken.

4 Visuele wiskunde in de praktijk: algemene richtlijnen

Uit de vele theorieën en inzichten gekregen door het kleinschalig onderzoek, probeerde ik enkele algemene richtlijnen op te stellen voor leerkrachten die eventueel hun lessen meer visueel willen maken. Visuele wiskunde is namelijk een begrip dat zeer veel verschillende onderdelen kan omvatten. Het is een letterlijke vertaling van het Engelse 'Visual mathematics'. Het is een concept dat in verschillende bronnen voorkomt, maar nooit dezelfde invulling krijgt. In Vlaanderen wordt het niet als een vast gegeven gezien, maar de woorden visuele wiskunde kan je wel combineren. Zoals eerder gezegd zal ik de verschillende visies rond dit onderwerp combineren en aanvullen tot wat volgens mij belangrijk is bij het concept visuele wiskunde. Hierbij wil ik dus vermelden dat dit zaken zijn die ik op basis van de bovenstaande gegeven naar voor wil brengen.

4.1 Enkele richtlijnen bij het versterken van de visualisatie in de les

Uitgangspunt: Leerlingen leren meer van een beeld dan van woorden. (Mayer, 2001)

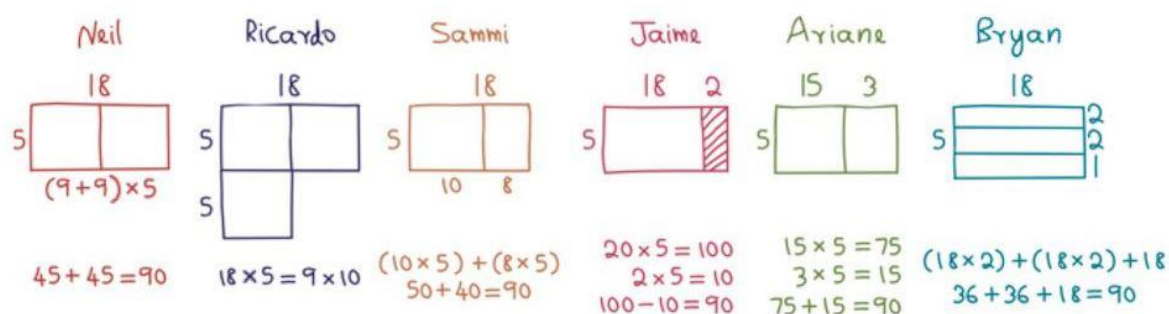
1. Gebruik het concrete materiaal of het beeld als eerste, voordat er een overgang is naar de formele wiskunde. Het is niet de bedoeling om het abstraheren uit het onderwijs te halen. Door de eerste kennismaking te doen aan de hand van een beeld, zal dat ook de associatie bepalen die de leerling maakt bij het onderwerp. Hiervoor moet het materiaal wel actief aanwezig blijven tot na de introductie van het formele. Daarna moet de losmaking van het materiaal en de ontwikkeling van de bijhorende mentale beelden kunnen gebeuren. De link met het model mag dus nooit volledig verworpen worden. Het kan de oorzaak zijn om flexibeler om te kunnen gaan met de leerstof.
2. Zorg voor eenvoudig en efficiënt materiaal. Hou hierbij de principes van Mayer in gedachten. Voorzie geen overbodige informatie. Zorg voor doeltreffend kleurgebruik. Zet niet te veel tekst op modellen.
3. Herhaling en verwijzing naar beelden of specifieke voorbeelden is positief. In het werkgeheugen zal zo de integratie gestimuleerd worden met de verschillende verbale en picturale modellen met de voorkennis van de leerlingen. Op die manier zal de leerstof minder als een samenraapsel van thema's lijken.
4. Zorg voor variatie in de gebruikte modellen.
5. Zorg voor een klassfeer waar communicatie centraal staat. Door te praten met medeleerlingen of de leerkracht wordt de kennis en het inzicht in de leerstof vergroot.
6. De leerlingen moeten bij de introductie van een nieuw thema actief met de materialen kunnen werken wanneer er handelingen mee gebeuren.
7. Test zelf dingen uit. Evalueer wat werkt en wat niet werkt. De bedoeling is om een verhoogd leerrendement te verkrijgen. Daarbij komt ook dat door het toepassen van visuele wiskunde geen tijd verloren mag gaan, maar net gewonnen moet worden. Geef wel niet meteen op als een model niet lijkt te werken. Onderzoek heeft aangetoond dat bij het gebruik van de nieuwe materialen een gewenningsperiode nodig is. (Boaler J. , 2016)
8. Zorg voor een rustig, maar dynamisch klaslokaal. Hang het niet vol met drukke posters, kunstwerken... Selecteer het materiaal zorgvuldig volgens de actuele thema's en noden in de klas. Het materiaal moet opnieuw voldoen aan de multimedia principes van Mayer.
9. Introduceer een mathematical mindset volgens de negen principes om het zelfbeeld van de leerlingen over hun kunnen in het vak wiskunde te veranderen. (Boaler J. , 2016)

5 Visuele wiskunde in de praktijk: voorbeelden

5.1 Inleiding

Uit de peilingstoetsen en Pisaresultaten van 2014 en 2015 bleek dat er toch nog heel wat werk is in het Vlaamse Wiskundeonderwijs. (KU Leuven, 2015) (Universiteit Gent, 2017) Ook in de interviews en in de enquête kwam voor dat er toch nog verbetering mogelijk is. De leerlingen hebben vooral problemen tegen het einde van de derde graad met statistiek, algebra en analyse. In dit deel wordt er een overzicht gecreëerd van specifieke modellen die je kan inzetten om de lessen meer visueel te maken.

Er zijn verschillende manieren om te visualiseren. Het kan via digitale applets, via materiaal, via het bord, via afbeeldingen, met gebaren, met metaforen... Een mooi voorbeeld hiervan is de mogelijkheid om getallen te vermenigvuldigen. In de onderstaande afbeelding staan alle mogelijkheden afgebeeld om 18×5 uit te rekenen. Door gebruik te maken van oppervlaktes kan je zo zeer speels en onderzoekend te werk gaan. Het inzicht en de flexibiliteit van leerlingen in verband met getallen zal hierdoor zeker vergroten.



Figuur 27: 18×5 op een visuele manier voorstellen zonder modellen

We ontkennen dus zeker het belang niet van deze andere visuele paden. We moeten echter een selectie maken. In het volgende deel zullen we ons focussen op de specifieke manipuleerbare materialen. Deze zijn namelijk nog zeer weinig aanwezig. In een zeer digitale schoolomgeving is het voor de leerlingen misschien ook aangenaam om wiskunde op een gevarieerde manier te krijgen.

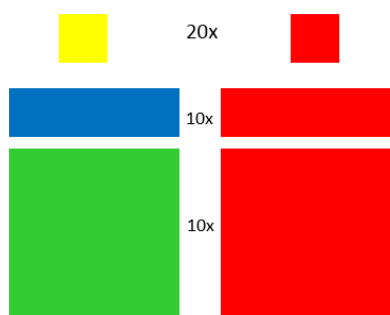
Als we op zoek gaan naar dergelijke wiskundemodellen, is het aanbod voor het secundair onderwijs zeer beperkt. Via de uitgeverijen kan je aan posters geraken, maar zoals eerder gezegd zijn die niet optimaal. Via de site 'Vincent Leermiddelen' kan je het materiaal voor het secundair onderwijs bekijken. Voor wiskunde zijn er 156 producten beschikbaar. 88 daarvan zijn ruimtefiguren in alle maten en kleuren. 65 items zijn bordmaterialen, zoals geodriehoeken, passers, krijt en bordstiften. Daarnaast is er ook nog een spel rond hoofdrekenen, een tekenplaat om perspectief te tekenen en een model om kubieke decimeter aan te leren. Heel veel opties zijn er dus niet om gevarieerde wiskundemodellen te kopen in Vlaanderen. Daarbij komt ook nog dat de modellen vaak duur zijn. Zo betaal je voor een set van twaalf ruimtefiguren in plexiglas 164,20 euro. (Vincent Leermiddelen, z.j.) Een set algeblokjes kan je ook online kopen voor 475,95 dollar. (Hand2Mind, z.j.) Ik ben er ook van overtuigd dat je met goedkopere middelen deze modellen zelf kan maken. Dat kan zelf eventueel in samenwerking met een VTI. De leerlingen kunnen algebrategels bijvoorbeeld perfect zelf maken. Daarom focussen we in het volgende deel op modellen die leerkrachten of leerlingen zelf kunnen maken met goedkope materialen, waarbij we wel rekening houden met de duurzaamheid van deze modellen.

5.2 Algebrategels

Algebra is moeilijker dan meetkunde om er iets bij voor te stellen. Het zorgt ervoor dat de wiskunde abstract wordt. Dat maakt deel uit van de wiskundige vaardigheden, maar het is wel belangrijk dat de leerlingen inzicht hebben in wat variabelen zijn. Flexibiliteit in het werken met onbekenden is zeer belangrijk om in de hogere graden de moeilijkere algebra aan te kunnen. Met algebrategels kan je zeer visueel bewerkingen met onbekende voorstellen. De volgende quote van een leerling van Rivera toont de waarde van de algetegels aan.

“Something clicked in my head right this minute when we did that. I like factoring and it’s nice to know why it makes sense like that.” (Rivera, 2011, p. 21)

5.2.1 Benodigheden



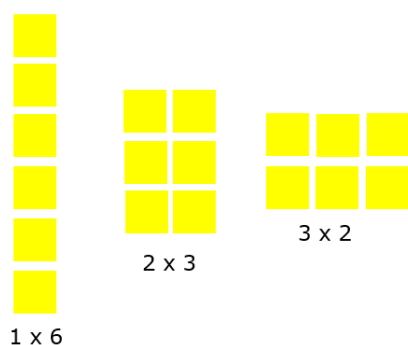
Figuur 28: algetegels pakket

In een doosje algebrategels zitten verschillende figuren. We vinden 40 eenheidsvierkanten terug. Daarvan zijn er 20 geel en 20 rood. Er bevinden zich ook 20 rechthoeken, waarvan 10 blauw en 10 rood. De rechthoeken hebben een breedte gelijk aan de eenheid. De lengte van de rechthoeken is willekeurig. Als laatste zijn er ook 20 vierkanten, waarvan 10 groen en 10 rood. De lengte van de zijden van de vierkanten zijn gelijk aan de lengte van de rechthoek. De gele eenheidsblok stelt het getal 1 voor. Een blauwe rechthoek staat voor x . Een groen vierkant staat voor x^2 . Alles bestaat ook in het rood. Deze stellen de negatieve versies voor en zijn dus gelijk aan -1 , $-x$ en $-x^2$.

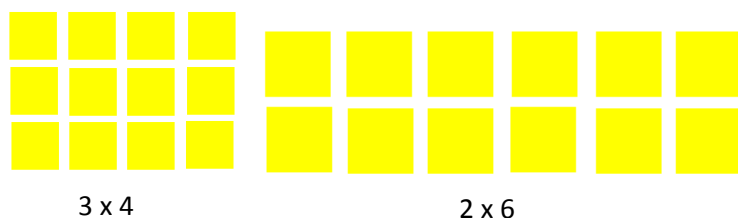
De algeblokken kunnen de leerlingen gemakkelijk zelf thuis uit papier maken. Eventueel kan de school dat ook voorzien voor hen. Als materiaal kan een keuze gemaakt worden uit papier, karton, plastic... Ik koos voor gelamineerd papier. Dat is duurzaam en gemakkelijk om te maken.

5.2.2 Rekenen met algebrategels

Een eerste mogelijkheid om algebrategels te integreren is bij het leren rekenen met onbekenden. Algebrategels kunnen al zeer vroeg gebruikt worden in de lagere school om op verschillende manieren te leren tellen. Het getalbegrip kan je hiermee vergroten.

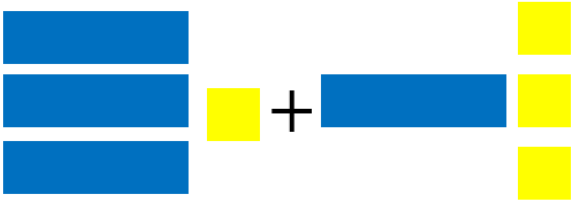
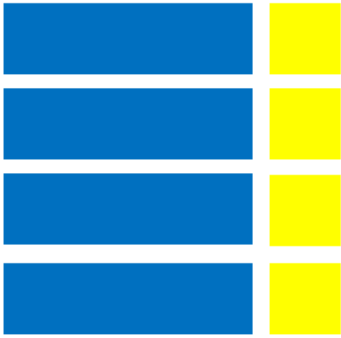


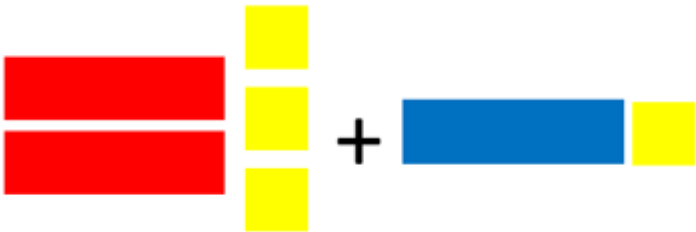
Het getal zes kan je op drie verschillende manieren voorstellen door middel van een product. De leerlingen kunnen door het ordenen van de vierkanten de verschillende opties voorstellen. De link met oppervlaktes is ook snel gemaakt. Hier begint dus de flexibiliteit en het spelen met getallen. Dit is echter meer van toepassing voor de lagere school. Het is echter daar dat de basis gelegd wordt om in de hogere jaren dan ook flexibel om te kunnen gaan met onbekenden.



Er zijn twee manieren om tot twaalf te komen met de tegels, namelijk met 3 keer 4 en met 2 keer 6. Andere bewerkingen zoals delen worden hierdoor eenvoudiger.

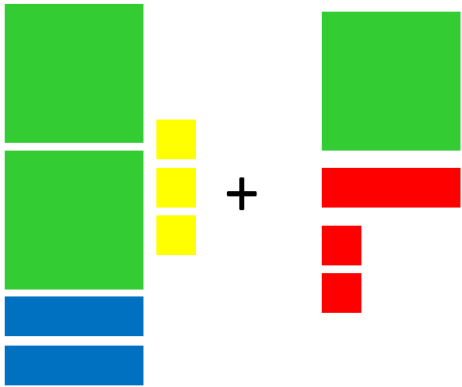
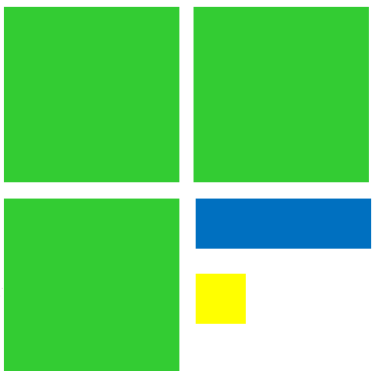
Het optellen en aftrekken van onbekende kan geïntroduceerd worden door middel van algebrategels. Hieronder staan enkele specifieke voorbeelden van bewerkingen. Deze werkwijze is gebaseerd op informatie van de site Mathbits. (MathBits, z.j.)

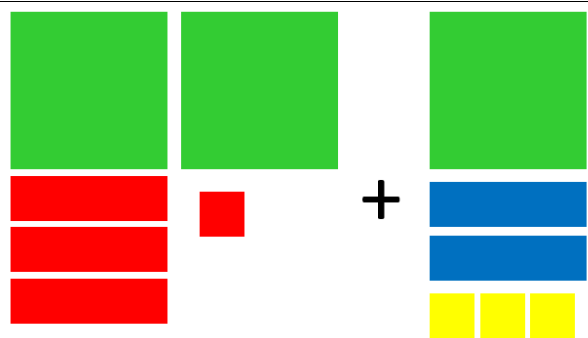
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$3x + 1 + x + 3$
	$4x + 4$
De optelling zal hier zeer concreet verlopen door de algebrategels. De leerlingen voelen aan dat ze 4 rechthoeken en 4 eenheidsblokken hebben. Dat is zeer analoog aan de manier waarop ze leren tellen met eenheden, tientallen en honderdtallen in de lagere school.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$-2x + 3 + x + 1$
	$-x + 4$
Een blauwe rechthoek (x) en een rode rechthoek (-x) heffen elkaar bij het optellen op. De analogie van $1 + (-1) = 0$ kan hierbij helpen ter verduidelijking.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$3x + 2 - (x - 4)$
	$3x + 2 + (-x + 4)$
	$2x + 6$
Bij het aftrekken, moeten we alle blokken die na de min komen tussen de haakjes van kleur veranderen. Wat niet rood is, wordt rood. Wat rood is, wordt vervangen door de positieve kleurtegel. Daarna hebben we opnieuw een gewone optelling, waarbij rood en blauw elkaar opheffen.	

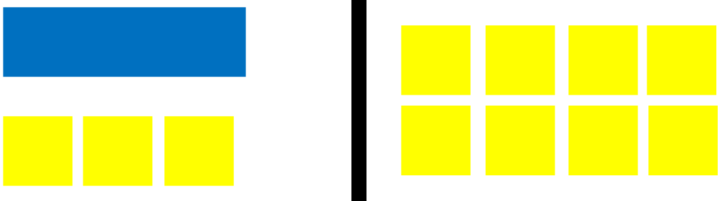
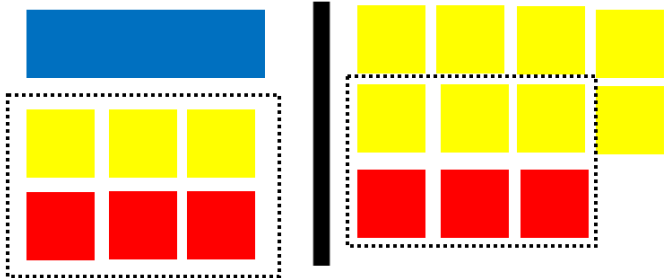
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
$3(x + 2)$	$3x + 6$
Net zoals je bij het eerste voorbeeld flexibel met getallen kan omgaan, kan je ook flexibel rekenen met behulp van algebrategels. Dat is duidelijk in het bovenstaande voorbeeld. Je kan de oefening lezen als 'drie keer $x + 2$' en ook als '3 keer x plus 6'. Zo kan je bewerkingen leren op meerdere manieren bekijken.	

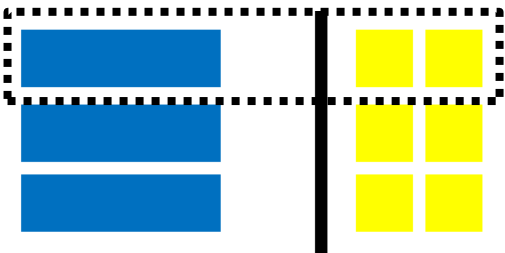
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$2x^2 + 2x + 3 + x^2 - x - 2$
	$3x^2 + x + 1$
Het groeperen van gelijksoortige termen verloopt ook zeer organisch met algebrategels. Het is duidelijk dat x^2 niet kan opgeteld worden bij x.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$2x^2 - 3x - 1 - (-x^2 - 2x - 3)$
	$2x^2 - 3x - 1 + (x^2 + 2x + 3)$

	$3x^2 - x - 2$
Opnieuw worden de kleuren bij het aftrekken verwisseld en komt er een optelling in plaats. Een rode rechthoek heft een blauwe rechthoek op. Een rode eenheidsblok, heft een gele eenheidsblok op.	

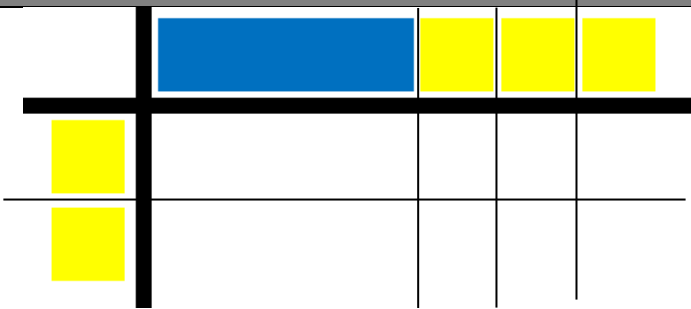
5.2.3 Vergelijkingen oplossen

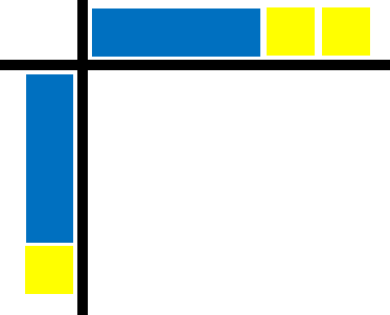
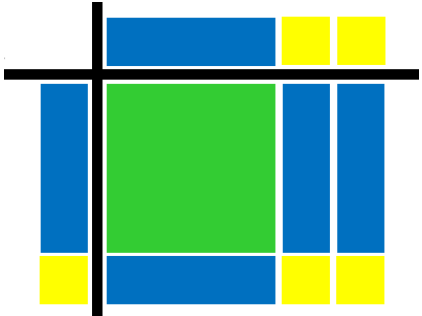
Visuele voorstelling		Algebraïsche voorstelling
		$x + 3 = 8$
		$x + 3 - 3 = 8 - 3$
		$x = 5$
Het oplossen van vergelijkingen lijkt ook zeer logisch met algeblokken. Soms wordt de analogie met een balans getekend. Ik kies hier voor een streep tussen het linkerlid en het rechterlid , omdat een vergelijking niet echt in evenwicht moet komen. We moeten een oplossing voor x vinden. Als we moeten uitrekenen naar x, dan moeten de overige vierkanten weg. Deze kunnen we verwijderen door evenveel rode eenheidsvierkanten toe te voegen in hetzelfde lid. Dat moeten we dan ook in het andere lid toevoegen, om de vergelijking te behouden. Vandaar de eventuele analogie met een balans. Alle rood-gele paren kunnen vervolgens weggelaten worden.		

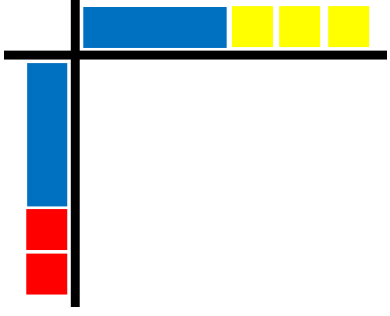
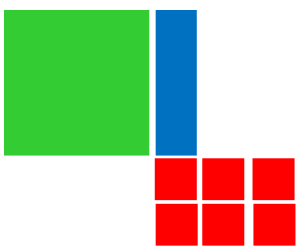
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$3x - 1 = 5$
	$3x - 1 + 1 = 5 + 1$
	$3x = 6$
	$x = 2$
Wanneer er een veelvoud van x voorkomt in de vergelijking, zal er op het einde een deling moeten gebeuren. Met algeblokken is dat handig als x een geheel getal is. Kommagetallen kunnen we niet voorstellen. Je kan eventueel wel het eenheidsblokje nog indelen in tientallen, maar dat gaat het doel van de algebrategels voorbij. Het selecteren van goede voorbeelden is dus zeer belangrijk. Het uiteindelijke doel blijft nog altijd om de blokken niet meer nodig te hebben. Na een tijd valt de visuele kolom dus volledig weg. De leerlingen kunnen dan de algebraïsche vergelijkingen oplossen zonder de aanwezigheid van de tegels. Het beeld van de bewerkingen blijft wel aanwezig en zorgt voor een verhoogd begrip van de vergelijkingen.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$2x + 2 = x - 6$
	$2x - x + 2 - 2 = x - x - 6 - 2$
	$2x - x + 2 - 2 = x - x - 6 - 2$
	$x = -8$
Wanneer in beide leden een onbekende x voorkomt, wordt dezelfde methode gehanteerd zoals bij de vorige vergelijkingen. We willen de vergelijking oplossen naar x. We willen dus maar in één lid onbekenden. We moeten dus in het andere lid de blauwe rechthoek (x) wegstreken. Dat doen we opnieuw door een rode rechthoek toe te voegen. Om dezelfde vergelijking te behouden, moeten we dan ook in het linkerlid een rode rechthoek (-x) toevoegen. De eenheidstegels moeten ook in één lid komen. Er staan dus links twee eenheidstegels te veel. Die doen we weg door twee rode eenheidstegels toe te voegen aan zowel het linker als het rechterlid. Er ontstaan nu nulparen. Dat zijn paren die elkaar opheffen. Een rode en een anders gekleurde tegel van dezelfde vorm in hetzelfde lid, mogen we weglaten.	

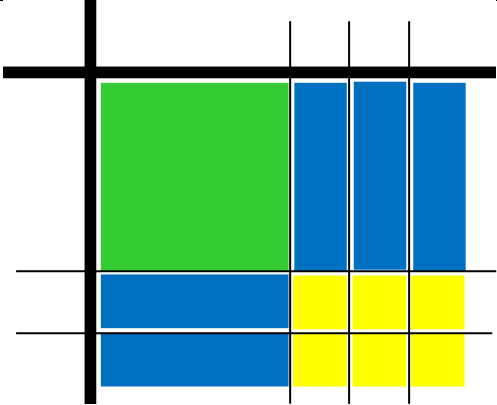
5.2.4 Distributiviteit en het vermenigvuldigen van veeltermen van de eerste graad

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$2(x + 3)$
	$2x + 6$
	$2x + 6$
Distributiviteit wordt meestal aangeleerd met boogjes tussen de verschillende factoren. Aan de hand van algebrategels, kan dat nog visueler doen. Zoals op de bovenstaande afbeelding is er een kruisvormig schema nodig. In de balken boven de horizontale en links naast de verticale lijn komen de twee factoren. Om het uit te rekenen vul je nu de ruimte binnen de twee lijnen op met de algebrategels. Daarvoor is één regel zeer belangrijk. De lijnen gecreëerd door de opgegeven factoren mogen niet onderbroken worden. Hierdoor is het duidelijk welke vormen in het raster moeten komen. Je kan het ook op een andere manier bekijken. Het raster is zoals zeeslag. Om een vakje aan te kunnen duiden moet je de naam van de kolom en de rij met elkaar combineren. In het eerste vak linksboven moet je dus één eenheidstegel (1) combineren met één blauwe rechthoek (x). Als we dat vermenigvuldigen komen we een blauwe rechthoek (x) uit voor dat vak. Een eenheidstegel vermenigvuldigen met een eenheidstegel, geeft als resultaat ook een eenheidstegel. Voor het bepalen van een teken gelden de normale regels. Twee rode algebrategels met elkaar vermenigvuldigen, komt uit op een positieve algebrategel. Als één van de twee factoren negatief is, dan zal het resultaat binnen de oplossing in dat vak ook negatief zijn. Dit komt ook nog in een verder voorbeeld naar voor. Als de rechthoek volledig is opgevuld met algebrategels, dan kan de opgave weggenomen worden. De vergelijking dat overblijft, is de oplossing van het product.	

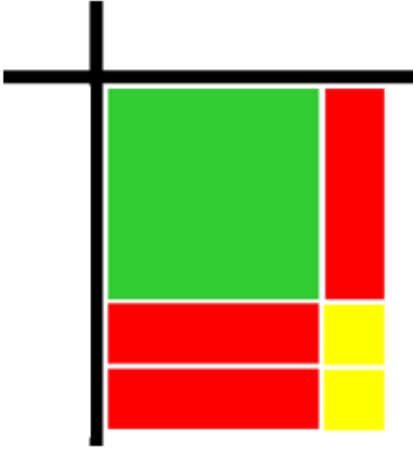
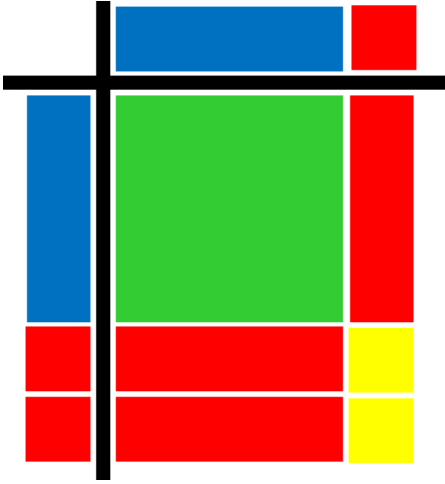
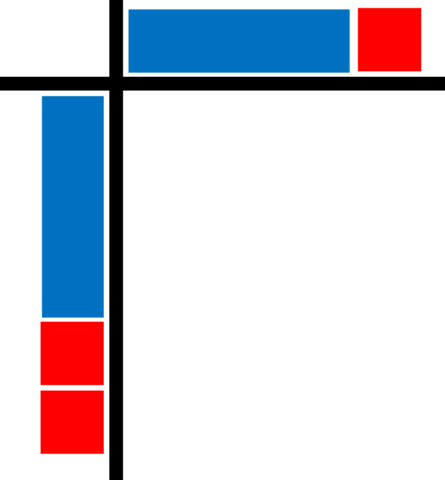
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$(x + 2)(x + 1)$
	$x^2 + 3x + 2$
Deze werkwijze is ook mogelijk voor het product van twee eerstegraadsvergelijkingen. Twee rechthoeken die gecombineerd worden, worden voorgesteld door een vierkant. De andere regels zijn analoog aan het eerste voorbeeld.	

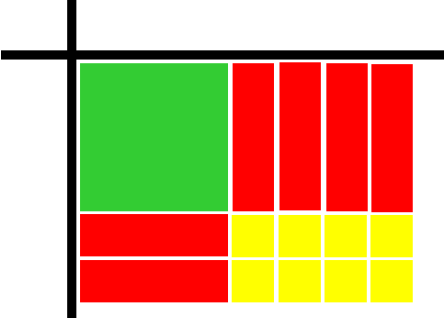
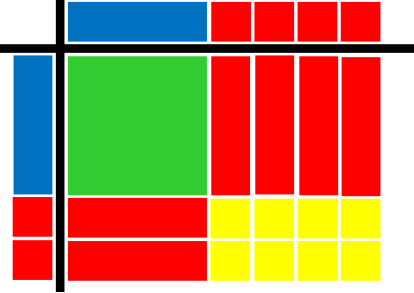
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$(x + 3)(x - 2)$
	$x^2 + 3x - 2x - 6$
	$x^2 + x - 6$

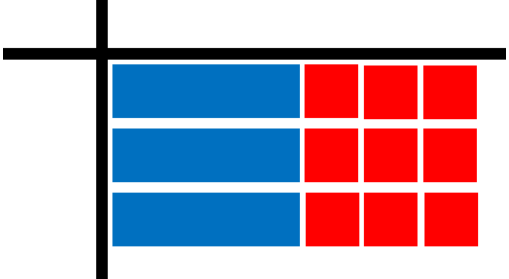
5.2.5 Ontbinden in factoren

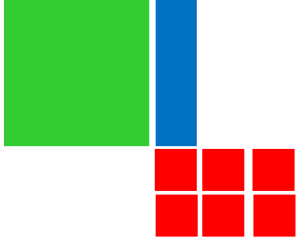
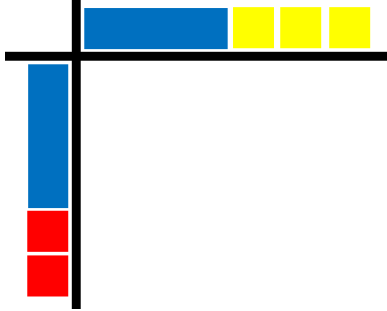
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$x^2 + 5x + 6$
	$(x + 3)(x + 2)$
Dit is een van de mooiste toepassingen van algebrategels. Het oplossen en dus ontbinden in factoren van een tweedegraadsvergelijking, kan tot op een bepaald niveau met algebrategels worden opgelost. Het omgekeerde principe van de distributiviteit wordt hier toegepast. We gaan nu op zoek naar de factoren die tot de vergelijking hebben geleid. Hiervoor moeten we opnieuw de lijnen trekken. Nu is er ruimte om de factoren boven de horizontale lijn en naast de verticale lijn aan te vullen. Het nulpunt is hier -2 en -3. Dat is af te leiden uit de factoren van de vorm $(x-a)(x-b)$, waarin a en b de nulpunten van de tweedegraadsvergelijking zijn.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$x^2 + 5x + 4$
	$(x + 4)(x + 1)$

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$x^2 - 3x + 2$
	$(x - 1)(x - 2)$
	$(x - 1)(x - 2)$
Deze methode is ook mogelijk voor negatieve getallen. Opnieuw moeten we nu vertrekken van de gegeven vergelijking. Het is nu de bedoeling dat de leerlingen nadenken hoe elk van de termen is kunnen ontstaan door een product. x^2 is bijvoorbeeld altijd het product van x en x. Is het hier mogelijk dat x^2 het product is van de factoren $-x$ en $-x$? Hiervoor moeten ze naar het geheel van de vergelijkingen kijken. Opnieuw worden de lijnen dus doorgetrokken. De regels voor het bepalen van het teken blijven hetzelfde. Hebben we een negatief product, dan moet een van de factoren negatief zijn. Hebben we een positief product dan zijn alle factoren positief of dan zijn alle factoren negatief. Zo leren de leerlingen nadenken over hoe een vergelijking is opgebouwd. De nulpunten zijn in dit voorbeeld gelijk aan 1 en 2.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$x^2 - 6x + 8$
	$(x - 4)(x - 2)$
Dit is nog een extra voorbeeld ter verduidelijking. Het is een goede oefening om na te denken over het tekengebruik.	

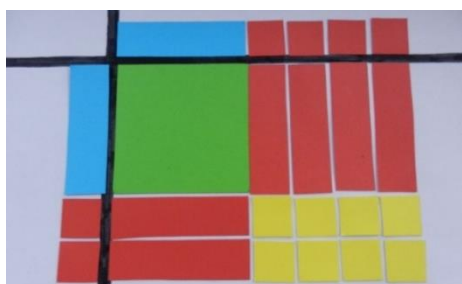
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$3x - 9$
	$3(x - 3)$
	$-3(-x + 3)$
Deze oefening kan je op twee manieren oplossen. Door de leerlingen zelf te laten zoeken, zullen er twee opties gevonden worden. Opnieuw wordt hier de flexibiliteit in algebra aangeleerd.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$x^2 + x - 6$
	$x^2 + x - 6 + 2x - 2x$
	$(x + 3)(x - 2)$
De meeste vergelijkingen zullen echter niet mooi in een rechthoek kunnen geordend worden. Als we toch willen nagaan of er al dan niet ontbinding mogelijk is, kunnen we nulparen toevoegen. Dat wil zeggen dat je gekleurde en rode algeblokken toevoegt, tot je een rechthoek bekomt. Dan kan je opnieuw op dezelfde manier tot een oplossing komen. Kan er op geen enkele manier een rechthoek gevormd worden, dan is het niet mogelijk om deze vergelijking te ontbinden. Niet elke vergelijking is namelijk ontbindbaar. Een andere oorzaak kan ook zijn dat er met kommagetallen gewerkt wordt. Dat is niet mogelijk met de algebrategels. Het is dus belangrijk dat er goede en duidelijke voorbeelden worden geselecteerd om uit te werken met de algebrategels. Het moet tot beter inzicht leiden, niet tot meer verwarring.	

5.2.6 Het delen van eerstegraadsveeltermen

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$
	$(x - 2)$
Een andere toepassing van het ontbinden in factoren is de deling van een tweedegraadvergelijking als deeltal en een eerstegraadsvergelijking als deler. Het quotiënt zal namelijk in het lege vak staan bij de verticale of horizontale lijn.	

5.2.7 Algebrategels in de realiteit



Figuur 29: algebrategels in realiteit

In de bovenstaande voorbeelden werden de algebrategels via de computer geordend. In realiteit zijn het hanteerbare modellen. In figuur 29 staat afgebeeld hoe het model er in werkelijkheid uitziet. Als de leerlingen uiteindelijk gewoon zijn om met dit model te werken, kunnen ze heel snel een dergelijk schema ook schetsen.

5.2.8 Gebruik algebrategels

Tabel 15: Voor- en nadelen algebrategels

Voordelen	Nadelen
Simpel en goedkoop model	Enkel bruikbaar bij tweedegraadsvergelijkingen en eerstegraadsvergelijkingen
Gemakkelijk te begrijpen.	Het model is minder goed wendbaar dan de algeblokken.
Zeer visueel om alle basisbewerkingen te introduceren.	Werken met meerdere onbekenden is niet mogelijk.
Link met de latere structuren van bijvoorbeeld Horner of de Euclidische deling.	Zeer grote getallen en kommagetallen zijn niet mogelijk.

5.3 Algeblokken

5.3.1 Principe



Figuur 30: Algeblokken

In een set algeblokken vinden we verschillende figuren terug die elk een andere term voorstellen. Er is een sterke analogie met algebrategels. Het grote verschil is wel dat er nu niet met negatieve blokken wordt gewerkt. Alle blokken zijn positief. Door gebruik te maken van verschillende matten, is het mogelijk om ook met negatieve termen te werken.

Tabel 16: Betekenis algeblokken

FIGUUR (dimensies)	BETEKENIS
Groene kubus ($1 \times 1 \times 1$)	1
Rode balk ($x \times 1 \times 1$)	X
Rode balk ($x \times x \times 1$)	x^2
Rode kubus ($x \times x \times x$)	x^3
Gele balk ($y \times 1 \times 1$)	Y
Gele balk ($y \times y \times 1$)	y^2
Gele kubus ($y \times y \times y$)	y^3
Oranje balk ($x \times y \times 1$)	XY
Oranje balk ($x \times x \times y$)	x^2y
Oranje balk ($y \times y \times x$)	xy^2

In een set algeblokken zit er een grotere verscheidenheid aan figuren dan bij algebrategels. Dat komt doordat het ook mogelijk is om met twee onbekenden te werken. Het product van deze onbekenden moet dan ook in verschillende vormen aanwezig zijn. De kubusvorm is aanwezig omdat we nu tot de derde graad kunnen werken.

De algeblokken kosten zoals eerder gezegd bij het online aankopen 475 dollar. De modellen die ik zelf maakte, zichtbaar in figuur 30, waren zeer goedkoop, maar arbeidsintensief. Ik gebruikte isomo voor de basis. Dat is zeer licht en dus ook gemakkelijk verplaatsbaar tussen lokalen. Het isomo sneed ik met behulp van een mes. Dat

zorgde wel voor onnauwkeurigheden. Dat speelt echter geen rol in het gebruik van de algeblokken. Ik verfde de blokken in de juiste kleur. Om de afwerking nog te verbeteren kleefde ik ook een gelamineerd papier op elk zijvlak. Voor de leerlingen is het wel moeilijker om zelf na te maken, tenzij in een ander vak of in samenwerking met een VTI of bouwbedrijf.

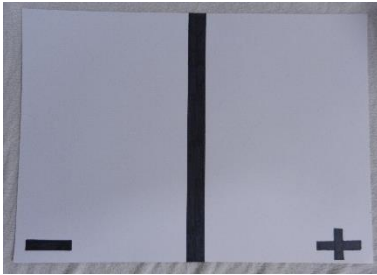
Tabel 17: Voor- en nadelen algebrablokken

Voordelen	Nadelen
Vergelijkingen van de derde graad mogelijk	Moeilijk om voor de hele klas aan te kopen of te maken
Meerdere onbekenden mogelijk	Werkt op een andere manier dan algebrategels, waardoor er verwarring kan zijn.
Kleurgebruik zeer duidelijk door 'mengen' van kleuren in de combinaties van onbekenden	Er is een gewenningsperiode nodig om met de blokken te leren werken. Deze tijd is er misschien niet in het Vlaamse onderwijs.
Kan op heel veel niveaus gebruikt worden, afhankelijk van de noden van de klas	

5.3.2 Formules ontleden met behulp van algeblokken

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
Algeblokken zijn zeer handig om formules die de leerlingen vanbuiten moeten leren te ondersteunen. Door het kleurgebruik van geel, rood en oranje bekom je een logische formule waarbij de leerlingen een beeld associëren. Het principe is gelijk aan het principe bij algebrategels. Je vermenigvuldigt alle delen op de horizontale as met alle delen op de verticale as. Zo vul je de rechthoek aan en bekom je het resultaat. In dit geval is het een vierkant, omdat er twee keer eenzelfde veelterm met elkaar wordt vermenigvuldigd.	
 	$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
Deze formule is voor veel leerlingen moeilijk om te onthouden. Ze lijkt uit het niets te komen. Door een kubus op te bouwen met zijde x + y en te vervolledigen met algeblokken, kunnen de leerlingen de formule linken aan een specifiek beeld. Door de kubus uit elkaar te halen, bekom je de verschillende termen. Als ze de formule dan niet meer goed weten, kunnen ze terugdenken aan de blokken die je eruit hebt gehaald.	

5.3.3 Bewerkingen met behulp van algeblokken

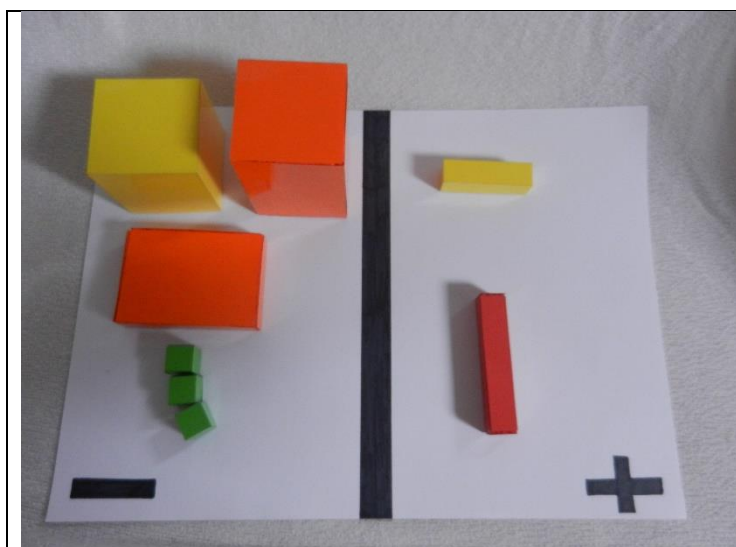


Zoals in de inleiding werd gezegd, gebeuren de bewerkingen met algeblokken altijd op een mat. We onderscheiden drie verschillende matten die elkaar opvolgen in moeilijkheidsgraad en functie. De eerste mat is de telmat. Hierop is het mogelijk om veeltermen te groeperen en de leerlingen te laten inzien wat nulparen zijn.

Figuur 31: telmat

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$-y - 1 + 3y + 2$
	$2y + 1$
De elementen in het rood stellen nulparen voor. Ze staan elk aan een andere kant van de lijn en mogen dus van de mat gehaald worden.	

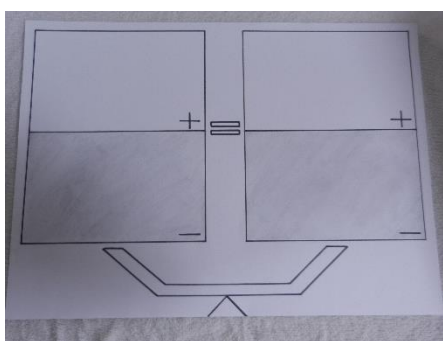
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	Negatieve kant: $-y^3 - xy^2 - xy - x - y - 5$ Positieve kant: $2x + 2y + 2$



$$-y^3 - xy^2 - xy + x + y - 3$$

Groeperen is een vaardigheid die de leerlingen goed onder de knie moeten hebben. Rekenfouten zijn namelijk snel gemaakt. Vaak wordt er met behulp van kleur aan het bord onderstreept welke termen samen horen. Met algeblokken is het echter zeer duidelijk welke blokken je kan weghalen en welke blokken je kan optellen. Niemand zal een staafje bij een kubus tellen.

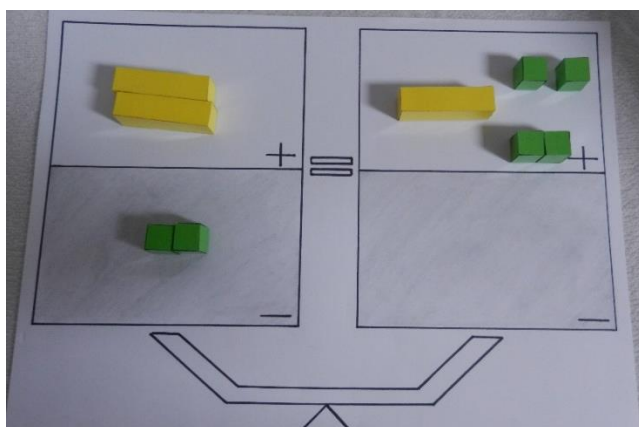
5.3.4 Vergelijkingen oplossen met behulp van algeblokken



De tweede mat is de balansmat. Deze wordt gebruikt om vergelijkingen op te lossen of te vereenvoudigen. Aan beide kanten van de balans, staat eigenlijk een telmat met een negatieve en een positieve kant. Zo kunnen alle termen ook in beide toestandstekens voorgesteld worden. De balans zorgt ervoor dat de leerlingen een bewerking in het ene lid ook moeten uitvoeren in het andere lid.

Figuur 32: balansmat

Visuele voorstelling



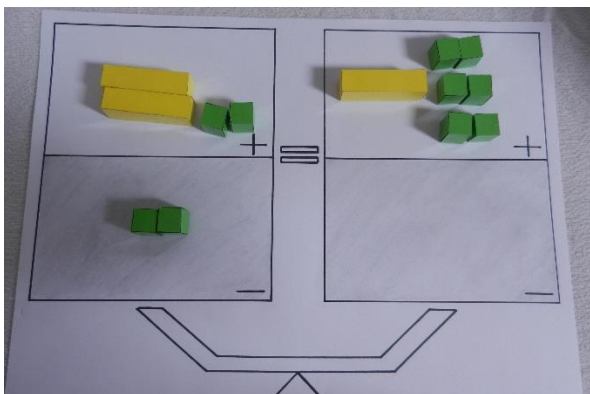
Algebraïsche voorstelling

$$2x - 2 = x + 4$$

OF

$$2y - 2 = y + 4$$

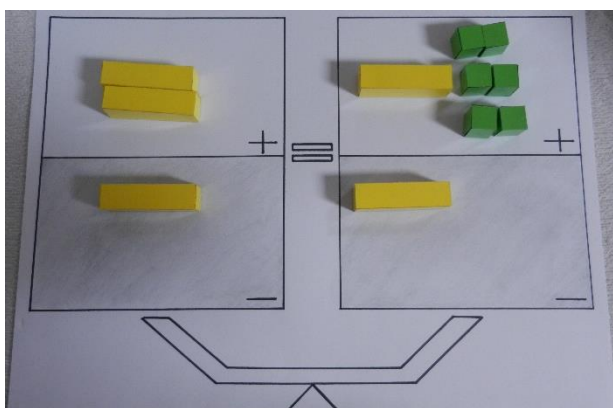
De kleuren rood en geel kan je wisselen van naam. De ene les kan geel x voorstellen, de andere les is geel y. Door hierop in te spelen, kan je werken aan de flexibiliteit van de leerlingen. Consistentie in kleuren kan voor zwakkere leerlingen net een hulpmiddel zijn om vergelijkingen te visualiseren.



$$2x - 2 + 2 = x + 4 + 2$$

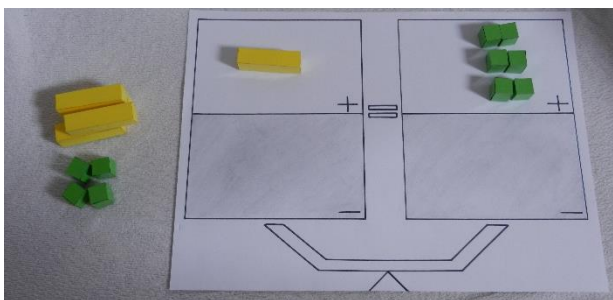
$$\Leftrightarrow 2x = x + 6$$

We willen opnieuw, zoals bij algebrategels het geval was, de variabele aan een kant krijgen en alle constanten in het andere lid. De eerste stap om de constanten in het linkerlid weg te krijgen, is het toevoegen van evenveel constanten met het tegengestelde teken, zodat er nulparen ontstaan. De vergelijking moet in balans blijven, dus je moet deze ook toevoegen in het rechterlid.



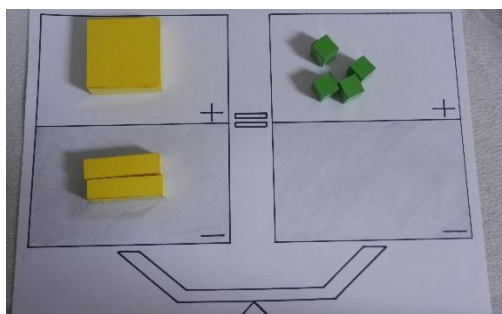
$$2x - x = x - x + 6$$

Hetzelfde geldt voor de onbekenden. We willen de onbekende hier in het linkerlid krijgen, waar de meeste onbekenden staan. Hiervoor voegen we in het rechterlid $-x$ toe. Dat doen we ook in het linkerlid om te balans te houden. Er ontstaan in beide leden nulparen die van de mat mogen.



$$x = 6$$

Visuele voorstelling

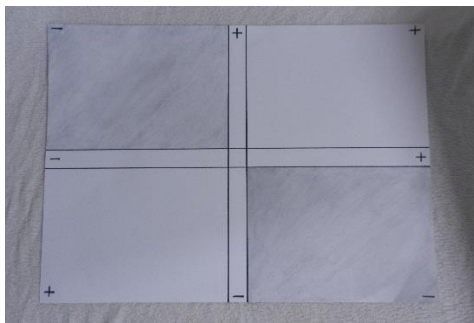


Algebraïsche voorstelling

$$x^2 - 2x = 4$$

Met deze vergelijking kunnen we op de balansmat niets doen. We kunnen dus maar heel klein aantal vergelijkingen effectief oplossen met deze mat. Het hoofddoel is orde krijgen in de vergelijkingen door te schrappen en te groeperen.

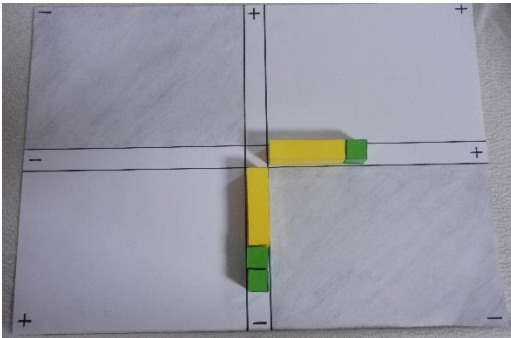
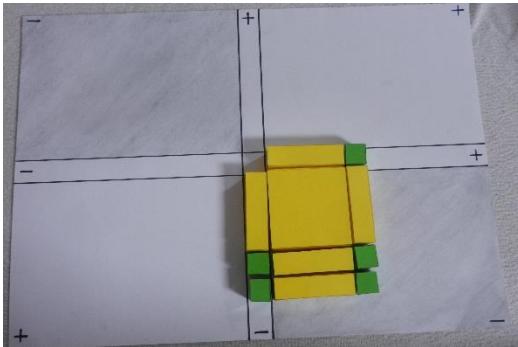
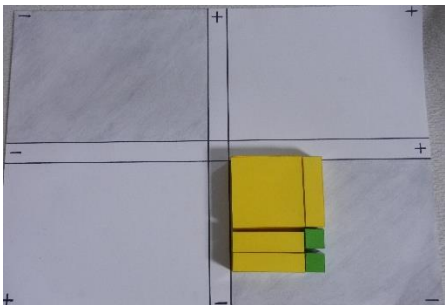
5.3.5 Distributiviteit/vermenigvuldigen van veeltermen

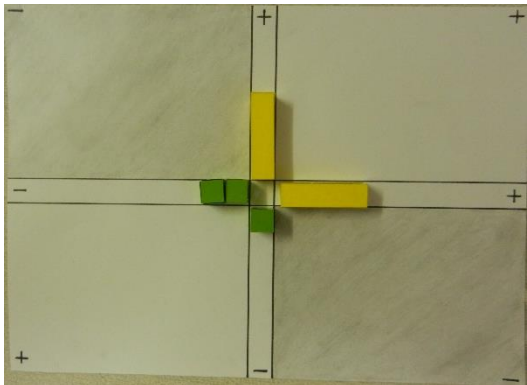


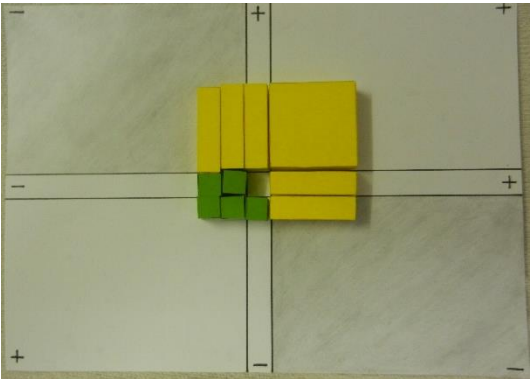
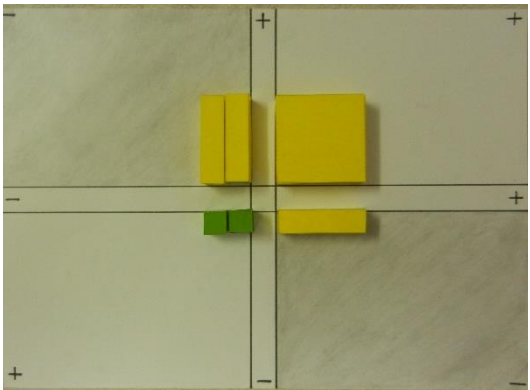
De laatste mat heet de kwadrantmat. Deze mat vertoont gelijkenissen met het rooster bij algebrategels. Er zijn echter geen negatieve algeblokken, vandaar de opdeling in kwadranten. In het kruis in het midden staan de factoren. Door opnieuw rechthoeken te vormen tussen de factoren, bekom je het product. De tekens van het product komen overeen met het teken van het kwadraat waar de figuur ligt.

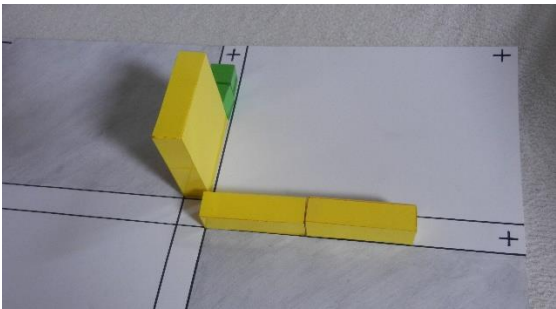
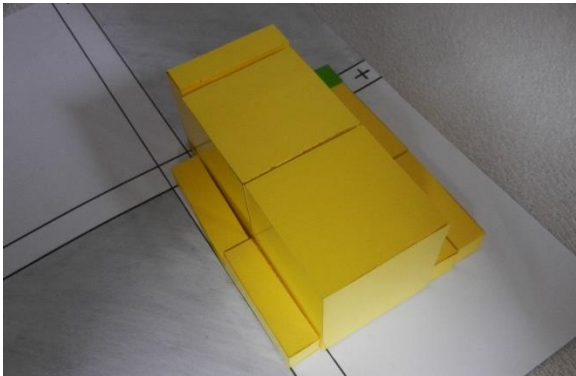
Figuur 33: De kwadrantmat

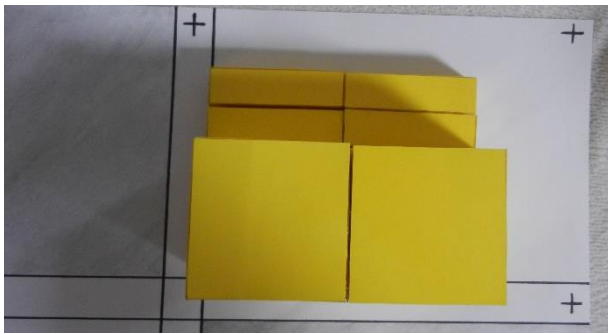
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$(x + 1)(x + 3)$
	$x^2 + 4x + 3$
	$x^2 + 4x + 3$
Zoals je ziet is deze werking gelijkaardig aan de werking van algebrategels. De algeblokken zijn echter iets makkelijker manipuleerbaar. Er is ook meer eenheid op vlak van kleur per onbekende. Zo is het overzicht sneller gemaakt.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$(x + 1)(-x - 2)$
	$-x^2 - 3x - 2$
	$-x^2 - 3x - 2$
Wanneer we nu een negatief getal in de factoren hebben, plaatsen we het overeenkomstig positief blokje in de negatieve as. De figuur draait zich. Alle termen van het product liggen in het vierde kwadrant en zijn bijgevolg negatief. Door te zien welk effect een teken heeft op de uitkomst, krijgen de leerlingen meer inzicht.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$(x - 1)(x - 2)$

	$-2x + x^2 - x + 2$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2$
	$x^2 - 3x + 2$
Dit is een moeilijkere oefening, omdat de vier kwadranten worden gebruikt. Het principe blijft hetzelfde. In de verticale as noteer je één factor. In de horizontale as noteer je de andere factor. In elk kwadrant kan je nu een rechthoek opvullen. Wanneer je de oorspronkelijke factoren dan wegneemt, verschijnt de oplossing. Het kwadrant waar de figuren liggen, bepaalt welk teken de term krijgt.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$(x^2 + 2)(2x)$
	$2x^3 + 4x$



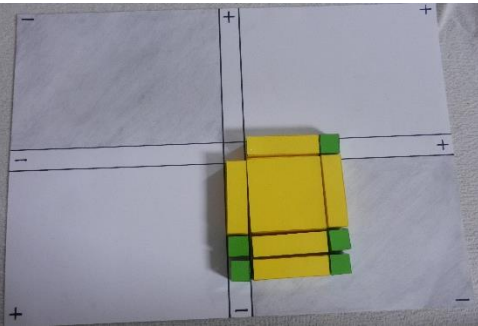
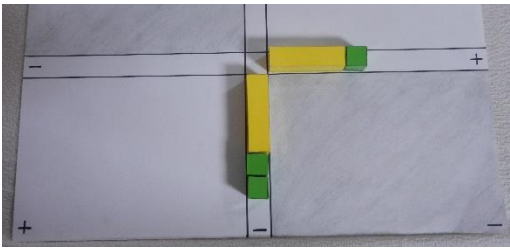
$$2x^3 + 4x$$

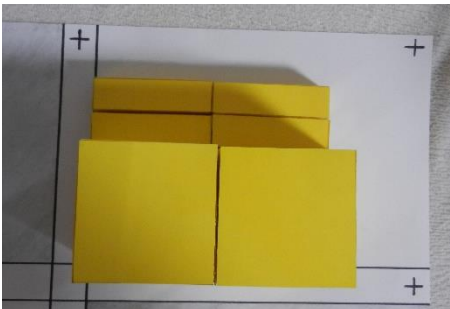
Het grote voordeel van algeblokken is dat je nu in drie dimensies kunt werken. De factoren kunnen nu dus ook van de tweede graad zijn, zoals het geval in bovenstaand voorbeeld. De werkwijze blijft hetzelfde. We vermenigvuldigen de horizontale factoren met de verticale factoren. Een kubus ontstaat wanneer x^2 vermenigvuldigd wordt met x . Na het wegnemen van de opgave blijft de oplossing over.

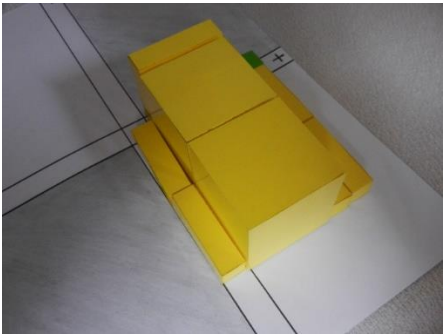
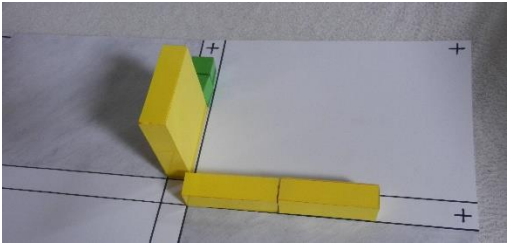
Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$(x^2 + y^2)(x + y)$
	$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$
	$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$
De kwadrantenmat heeft wel zijn beperkingen. Er kunnen geen hele grote oefeningen opgelost worden. Dat is echter ook niet het doel. Let in de bovenstaande oefening opnieuw op het functioneel kleurgebruik.	

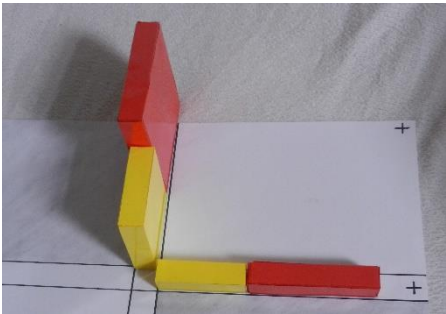
5.3.6 Ontbinden in factoren met behulp van algeblokken

Nu we factoren kunnen vermenigvuldigen met behulp van de kwadrantenmap, kunnen we deze techniek ook opnieuw inzetten om de factoren af te leiden. We bekijken enkele van de bovenstaande voorbeelden, maar nu dus omgekeerde volgorde.

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$-x^2 - 3x - 2$
	$-x^2 - 3x - 2$
	$(x + 1)(-x - 2)$
We krijgen een veelterm gegeven. We maken van de veelterm een rechthoek. Aanvullen met evenveel positieve als negatieve algeblokken mag. Indien de rechthoek niet mogelijk is, is de veelterm ofwel niet ontbindbaar ofwel wordt er gerekend met kommagetallen. Dan zal deze techniek niet werken. We trekken de horizontale en verticale lijnen, zoals we bij de algebrategels deden. We kunnen nu de factoren op de assen plaatsen en aflezen. Het teken in de overeenkomstige as, bepaalt of de term positief of negatief is.	

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$2x^2 + 4x$

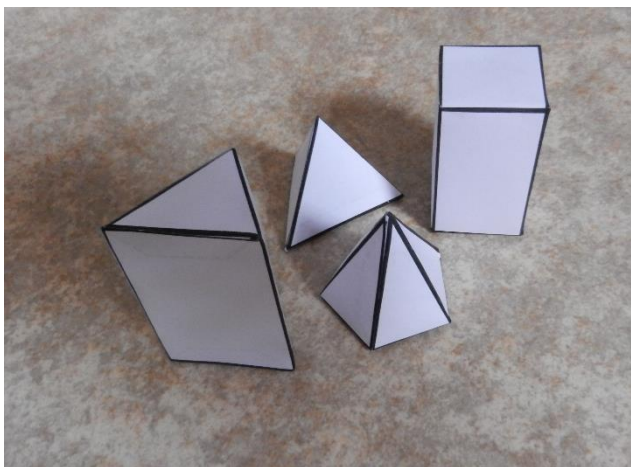
	$2x^2 + 4x$
	$(x^2 + 2)(2x)$

Visuele voorstelling	Algebraïsche voorstelling
	$x^2 + y^2 + x^2y + xy^2$
	$x^2 + y^2 + x^2y + xy^2$
	$(x^2 + y^2)(x + y)$

Wanneer we dus werken met hogere graden, blijft het principe hetzelfde. We moeten nu enkel ook rekening houden met de hoogte. Ontbinden van vergelijkingen van de vierde graad of hoger kan niet met algebrablokken. Op dat moment is de concrete fase ook al voorbij. Er is een overgang naar de formele wiskunde door bijvoorbeeld Horner te gebruiken, waarmee algebrablokken sterk gelinkt zijn.

5.4 Ruimtelijk inzicht

Ruimtefiguren zijn een van de meest voorkomende manipuleerbare modellen in het West-Vlaamse wiskundeonderwijs vandaag. Ze kunnen echter in vele maten, vormen en kleuren voorkomen.



Figuur 34: Statische ruimtefiguren

De meest voorkomende ruimtefiguren zien eruit zoals op de foto links. In bijlage 7 kan je ook heel wat voorbeelden terugvinden die ik ben tegengekomen op mijn klasbezoeken tijdens interviews. We vinden het vaak massief in hout, maar ook draadmodellen met tandenstokers kunnen gebruikt worden. Wat opvalt is dat de wiskundige ruimtefiguren minder populair lijken. Sommige leerkrachten geven aan voorwerpen uit het dagelijks leven nuttiger te vinden om te gebruiken bij het aanleren van de eigenschappen van ruimtefiguren. Dat kwam ook duidelijk voor in de interviews en in het lokaal van Willem Beeuwsaert. Een tobleroneverpakking is hier een voorbeeld van.



Figuur 35: Dynamische ruimtefiguren

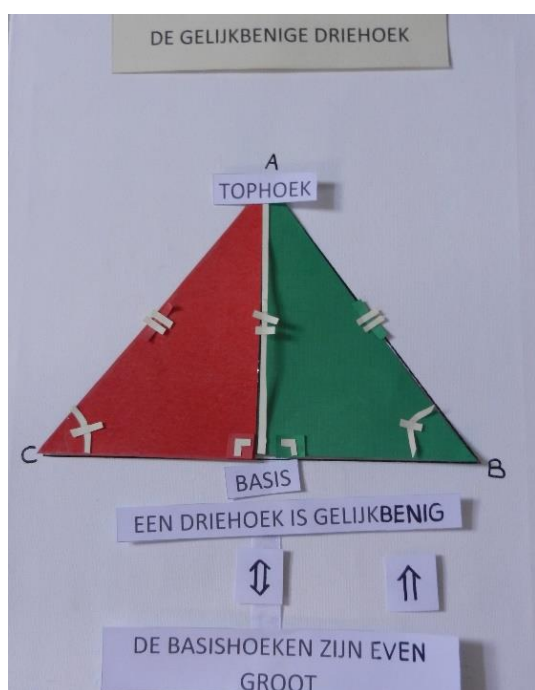
Met de massieve ruimtefiguren op zich kan je niet zoveel handelingen stellen. Zoals je kan zien op figuur 35, zijn er echter ook andere dynamische mogelijkheden. Knex werd ook in de enquêtes en in het interview vermeld als goede voorwerpen om te gebruiken als draadmodellen. Dan kan je met behulp van breinaalden of een stokje duidelijk de onderlinge ligging van twee rechten aantonen. Clicks is daarnaast handig om de verschillende ontplooiingen van een kubus of balk te leren op een onderzoekende manier. Door de zes blokken op verschillende manieren aan elkaar te hangen, kunnen de leerlingen ze zelf ontdekken. Verschillende kleuren kunnen gebruikt worden om grond- en bovenzijde aan te duiden. Om aanzichten aan te leren kunnen deze blokken ook leuk zijn om te gebruiken. De leerlingen kunnen hun eigen vorm samenstellen en kleuren. Bij het interview van Willem Beeuwsaert toonde hij mij een doos met kleine houten kubussen. Deze werden multifunctioneel ingezet om aanzichten te leren. De leerlingen konden er zelf mee werken. De blokken waren gemaakt in samenwerking met het VTI. In een STEM-omgeving is het misschien ook leuk om hierrond een project op te zetten in de eerste graad. (bijlage 7: foto's 35, 38 en 41)

5.5 Bordcanvas



Figuur 36: nagels in een bordcanvas

Aangezien het belangrijk is dat de klas niet te druk wordt door modellen of posters, is het handig dat alles snel en gemakkelijk verplaatsbaar is. Om die reden is het gebruik van een canvas zeer handig. Door in de lengte of in de breedte twee nagels te slaan, is het mogelijk om een draagbaar schema te creëren dat je overal kan uithangen en meenemen. Door de twee nagels is het mogelijk om het aan het bord te hangen, aan de deur, aan een kast, aan een bank, aan een prikbord... Het is eigenlijk een draagbaar bordschema dat multifunctioneel kan ingezet worden doorheen het leren van een bepaald onderwerp. Dat kan als herhaling, inleiding, oefening, begeleiding, verwijzing...



Figuur 37: schema gelijkbenige driehoek



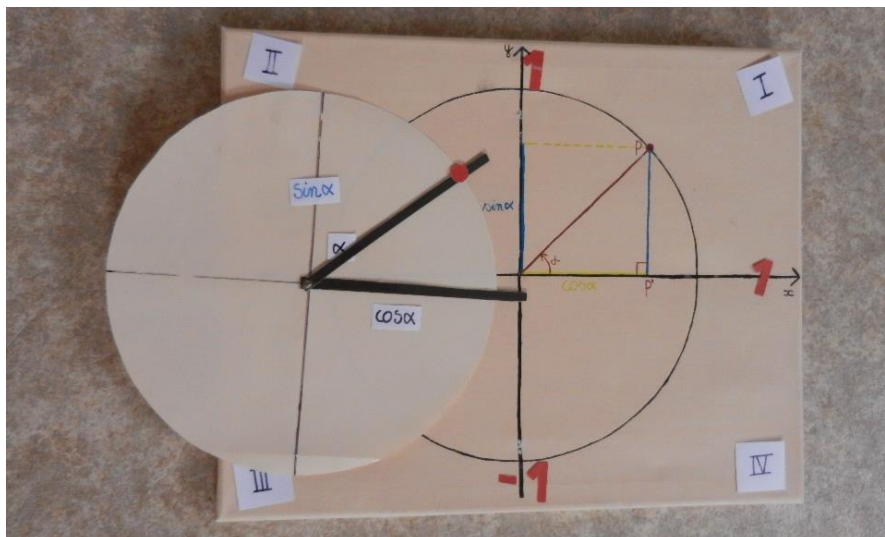
Figuur 38: Benamingen gelijkbenige driehoek

Het eerste voorbeeld van een bordcanvas gaat over de eigenschappen van een gelijkbenige driehoek. Alle onderdelen van deze canvas zijn afneembaar. Op die manier is het mogelijk om stap voor stap het bewijs op te stellen. De verschillende merktekens zijn ook apart afneembaar. Bij dit schema is het wel de bedoeling dat er simultaan een bordschema wordt opgesteld met het uitgeschreven bewijs.

Het voordeel van een dergelijk bordcanvas is dat het de volgende les zeer gemakkelijk is om het beeld opnieuw op te roepen. Door de merktekens te verspreiden in de klas, kan je ook op die manier de eigenschap nog eens ter sprake brengen. De eigenschap in woorden is ook met behulp van velcro bevestigd aan het bord. Het aantonen van het bewijs in twee richtingen is dus mogelijk. Door kaartjes met dubbele pijl en enkele pijl te voorzien.

Als het bewijs gezien is, is het ook niet altijd meer nodig om het volledig op het bord te brengen. Na een tijdje moeten de leerlingen het beeld zelf kunnen vormen op basis van een blanco gelijkbenige driehoek. Dat is ook mogelijk via hetzelfde bord. De driehoeken kan je afnemen en vervangen door een grote gelijkbenige driehoek. Met kaartjes kan je eventueel ook de verschillende benamingen nog eens herhalen.

Als alle leerstof gezien is, kan het bord verdwijnen of eventueel achteraan in de klas nog een tijd blijven hangen. Zo kunnen de leerlingen vanaf de eerste minuut bij het binnenkomen in klas, (on)bewust bezig zijn met wiskunde.



Figuur 39: goniometrische cirkel: model

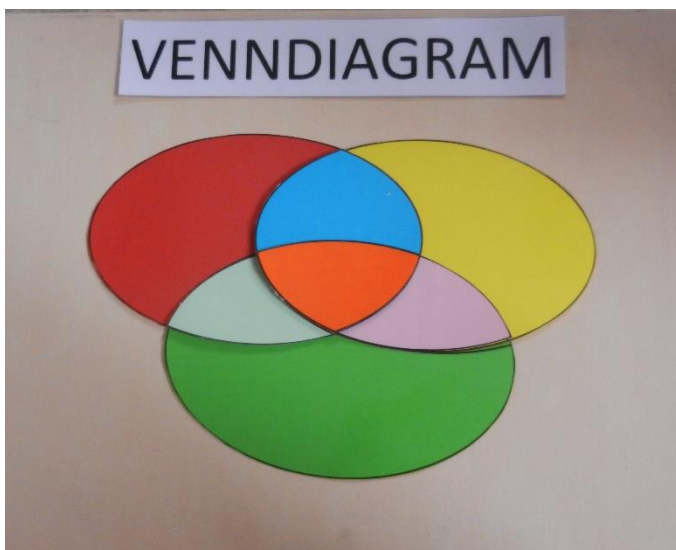
Een tweede voorbeeld van een bordcanvas is bruikbaar binnen het thema goniometrie. De goniometrische cirkel is een zeer dynamisch geheel. Het bordcanvas bestaat dan ook uit beweegbare delen. Het opstellen van de goniometrische cirkel gaat zeer vlot aan de hand van de afneembare kwadranten en cijfers. Elke les kan dit opnieuw worden herhaald, zonder dat de leerlingen de cirkel telkens opnieuw moeten tekenen. Bij de introductie van de goniometrische cirkel en bijhorende getallen is de achterliggende tekening eerst niet zichtbaar. De afneembare cirkel hangt ervoor. Door een splitpen is het mogelijk om de benen van de goniometrische cirkel te bewegen. Zo is het gemakkelijk om verschillende hoeken aan te tonen. De opbouw van de cirkel wordt op die manier ook duidelijker. Op de cirkel plakken kaartjes met 'cos α , sin α en de hoek α zelf. Hierdoor kan je voor elke hoek ook deze kaartjes anders klevens. Door het lamineren is het ook mogelijk om op de cirkel te tekenen met bordstift. Zo kan je de horizontale en verticale lijnen aanduiden. Consistent kleurgebruik is hierbij essentieel.

Je kan ook de leerlingen aanmoedigen om een gelijksoortige goniometrische cirkel in het klein te maken. Zo kunnen ze zelf ook met het model werken en een beter inzicht krijgen in de oefeningen.

Ik wil hierbij wel opnieuw opmerken dat het niet de bedoeling is dat de leerlingen de goniometrische cirkel niet meer moeten tekenen. Dat zorgt nog steeds voor een goede vastzetting. De leerlingen hebben ook een goede cursus nodig om uit te kunnen leren. Door in de klas de oefening op te lossen met het dynamisch model weet de leerling daarom thuis de oplossing niet. Een klassikale bordtekening is ook nog steeds belangrijk. Het model is zoals gezegd bedoeld om inzicht te creëren. Het is bedoeld om onderzoekend een oefening te interpreteren. Op die manier kan je ook gemakkelijke verschillende denkpijsten van leerlingen volgen met de klas. Geogebra is hier ook zeer handig voor door het dynamische aspect. Opnieuw is variatie van voorstellingen belangrijk.

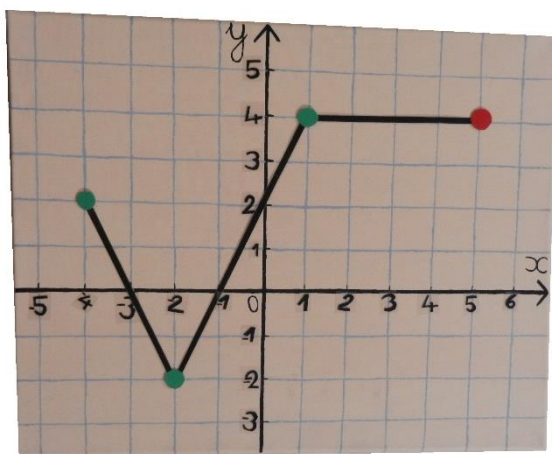
	Een bordcanvas kan niet enkel ingezet worden om beelden duidelijk te maken. Een canvas kan ook een overzicht weergeven van de leerstof in woorden. Op die manier kan snel aan het begin van de les herhaald worden en kan het overzicht aan het bord komen. De leerlingen kunnen erop terugvallen. De leerkracht kan ernaar verwijzen. Door kaartjes te draaien kan er onbewust naar verwezen worden, zonder dat de regel er expliciet staat. Zo wordt er ook een mentaal beeld gevormd van de structuur van de leerstof.
--	--

Figuur 40: bordcanvas met leerstofoverzicht



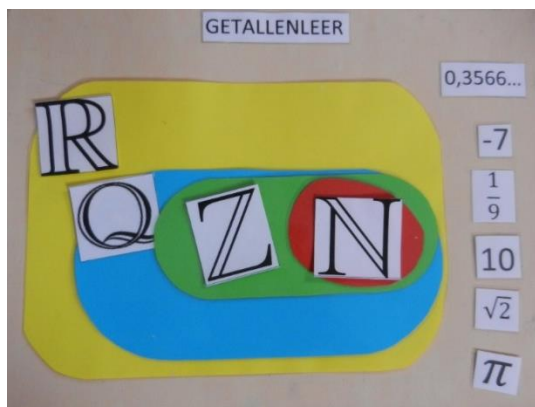
Figuur 41: model venndiagram

Venndiagrammen zijn ook zeer toegankelijk voor visualisatie. In het vierde jaar leren de meeste richtingen hier specifiek mee werken. De moeilijkheid ligt hier bij de vele overlappings. Door een venndiagram te modelleren, waarbij alle 'lagen' afzonderlijk afneembaar zijn. Hierdoor is het voor de leerlingen zeer visueel en logisch om de aantallen in de deelverzamelingen in te voegen. Ik testte dit uit tijdens een stage. Veel leerlingen hadden inderdaad moeite met de overlappings. Na het tonen van het model leken de leerlingen de overlapping beter te snappen en ging het invullen van de aantallen vlot. Het model is gelamineerd, waardoor opnieuw met bordstift op het model kan geschreven worden voor specifieke oefeningen. Het venndiagram kan ook losgemaakt worden van het canvas. Hierdoor kan de leerkracht of de leerling het in handen nemen en zelf manipuleren.



Figuur 42: Model functieleer

In elke chemieklas hangt het periodiek systeem der elementen. In de wiskunde klas zou volgens mij een assenstelsel moeten hangen. Dit voorbeeld is de canvasversie daarvan. Alle cijfers zijn afneembaar, dus de eenheid kan versteld worden. De grafiek is afneembaar. De groene en rode bollen zijn afneembaar. Als je een assortiment aan lijnen en bogen hebt, kan je telkens een standaardbeeld opstellen over een functie. Door met een lat over de functie te gaan kan je ook sneller het domein en het bereik aantonen. Je kan hier zelf het model aanpassen volgens de noden van die specifieke les. Dat kan voor zowel de eerste graad als de tweede graad bruikbaar zijn. Opnieuw moet de opmerking worden gemaakt dat dit maar een klein deel van de beeldvorming is. Het centrale deel om de basis aan te leren, maar bij uitbreiding is het ook nodig om dynamische applets zoals geogebra te betrekken. Grafieken op papier kunnen tekenen is ook nog steeds een vaardigheid die waarde draagt. Het model kan helpen om het inzicht te verwerven, als geheugensteun en als beeld om op te roepen bij de basisbegrippen.



Figuur 43: Verzamelingenleer

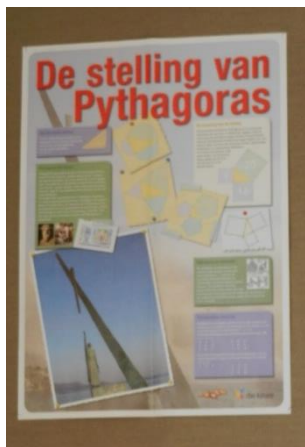
In het interview met Meneer Beeuwsaert kwam de afschaffing van de verzamelingenleer naar boven. Het getalbegrip is hierdoor volgens hem sterk verminderd. Met het model links op de foto, kan dat volgens mij weer wat beter worden. Doorheen de jaren leren de leerlingen steeds meer soorten getallen. Het is belangrijk dat ze daarvoor zichzelf een structuur in zien. Op het moment zelf lijkt dat niet relevant, maar voor leerlingen die verder studeren is dat begrip essentieel. Dit model laat toe om op een zeer eenvoudige manier structuur te brengen in getalrelaties. Het kleurgebruik hierbij is ook zeer functioneel en ondersteunend voor de leerlingen. Ik testte dit uit op stage en ik merkte dat dit goed werkt. Door getallen toe te voegen aan het model kan je het ook integreren in oefeningen. Je kan kaartjes met dezelfde kleuren gebruiken om iedereen te laten antwoorden op vragen. Opnieuw zijn alle delen afneembaar en kan het model ook zonder het canvas gebruikt worden.

B	R	U1	U2
OEF 41		OEF 35	
OEF 43	OEF 36		
OEF 48	OEF 37	OEF 38	
OEF 50		OEF 40	
OEF 51			OEF 39
OEF 52	OEF 52	OEF 43	OEF 46

Figuur 44: Differentiatiemodel

Bordcanvassen kunnen niet enkel ingezet worden bij het leren van leerstof. Het kan ook een begeleidingsinstrument zijn. Het voorbeeld in figuur 37 sluit hierbij aan. Op het bord staan vier kolommen, een voor basis, remediëring, uitbreiding 1 en uitbreiding 2. Het is een manier om flexibel met oefeningen om te kunnen gaan. De te maken oefeningen komen op het bord met een herbruikbare klever. Alle leerlingen beginnen met het differentiatietraject in de basiskolom. Hier maken ze bijvoorbeeld eerst oefening 41. Daarna gaan ze over naar oefening 43. Gaat die moeilijk, kunnen ze oefening 36 als remediëring maken. Anders gaan ze verder met oefening 48. Zijn ze klaar met de basisoefeningen, staat er uitbreiding te wachten. Op die manier kan je als leerkracht ook zeer flexibel met de oefeningen omgaan en het traject aanpassen aan de noden van de leerlingen. Door het canvas op een tafel te leggen, kan er ook een spel rond opgezet worden. Iedereen krijgt een pion en plaatst die naast de oefening waarmee ze bezig zijn op het bord. Zo ontstaat een soort kudde van pionnen, waardoor ook de leerkracht een overzicht heeft van waar de leerlingen zich bevinden in de oefeningen. Door met rode fiches te werken, kunnen de leerlingen de moeilijke oefeningen ook aanduiden. Als er meer dan drie fiches liggen, weet de leerkracht dat er met die oefening problemen zijn en dan is verlengde instructie mogelijk. De leerlingen worden ook gemotiveerd door elkaar. Deze spelvorm kan zeker niet in elke klas. Er moet rekening gehouden worden met het niveau en de openheid van de leerlingen tegenover dergelijke werkvormen.

5.6 Posters in de klas



Figuur 45: Poster Pythagoras (Ardoorie)

Ik deed navraag bij vijf Belgische uitgeverijen naar het aanbod aan posters. Van drie uitgeverijen kreeg ik antwoord dat ze enkele posters rond wiskunde in hun catalogus hadden. Ik kreeg ook een poster horende bij het werkboek Pienter gratis opgestuurd. In de bijlage 7 staan ook enkele posters afgebeeld die in de bezochte lokalen hangen. Ik ben echter geen voorstander van aangekochte poster. Een goed voorbeeld hiervan is figuur 38. Deze poster bevat zeer veel informatie. Er staan enkele kleinere afbeeldingen op. De afbeeldingen zijn schuin geordend. De achtergrond van de poster is één van die afbeeldingen nog eens in het groot. Er staat ook een klein bewijs op. Het druist in tegen alle principes van Mayer. De leerlingen zullen hierdoor geen beter beeld vormen van de stelling van Pythagoras. Zoals in de interviews ook al naar voor kwam is de terminologie ook vaak anders. De posters in de klas van meneer Beeuwsaert waren in het Engels. De lay-out is ook veel te druk. Ik zou dit dus niet ophangen in mijn klas. Ik zou eerder zelf een poster maken of de leerlingen die taak geven.

5.7 Kunst in de klas

Wiskunde is droog en saai. Deze mening kan je door enkele leuke afbeeldingen in de klas al een klein beetje veranderen. Als die afbeeldingen in een van de volgende maanden of jaren dan ook nog eens concreet gebruikt worden in de les, is dat volgens mij nog motiverender. Hieronder staan enkele voorbeelden.



Figuur 46: Escherschilderij

Escher is een bekend voorbeeld voor wiskundeleerkrachten. Een dergelijke intrigerende afbeelding in het wiskundelokaal is volgens mij een goed idee.

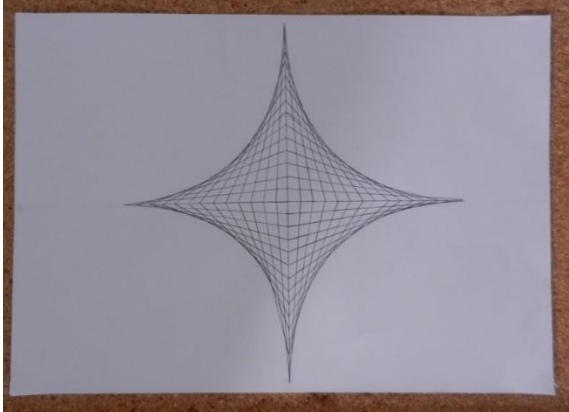
Figuur 39 is een Escherschilderij. Dat vergt wel wat werk om te maken, maar kan ook perfect afgedrukt worden op een grote poster. Het schilderij is zeer bruikbaar bij het thema transformaties. Er zitten verschuivingen en draaiingen in. Door twee van de elementen uit de vlakvulling apart uit te knippen, kan je de transformatie ook echt uitvoeren. Zo zien de leerlingen ook hoe het schilderij is ontstaan.



Figuur 47: wortelspiraal

Vierkantswortels zijn een vrij abstract concept. Naast het werken met algebrategels, kan je dit ook concreet maken door een wortelspiraal op te stellen.

Dit kunstwerk kan zonder de cijfers al een tijd uithangen in de klas. Op het moment wanneer het voorkomt in de leerstof, kan je uitleggen hoe de spiraal is opgebouwd. Dan kan je ook de cijfers toevoegen.

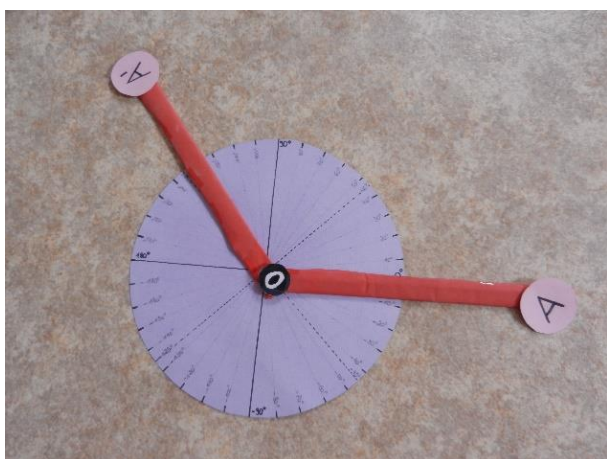


Figuur 48: Tekeningen

Kunst hoeft ook niet vooringesteld te zijn. Door vakoverschrijdend te werken met bijvoorbeeld fysica of P.O. kunnen ook werken van de leerlingen in de klas opgehangen worden. Mooie figuren bij vraagstukken zijn een andere optie. Hiervoor is een prikbord achteraan in de klas zeer handig.

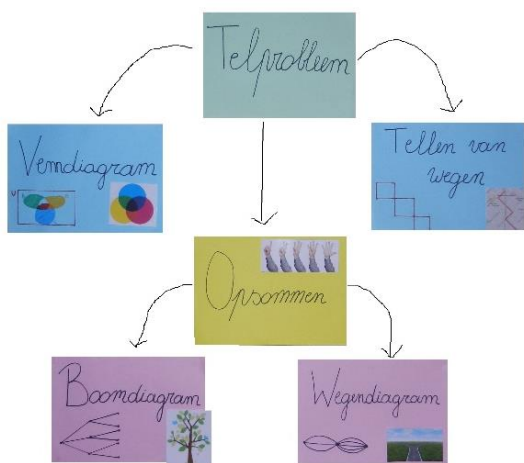
Zo voelen de leerlingen zich volgens mij ook meer betrokken bij de leerstof.

5.8 Extra modellen



Figuur 49: model draaihoek

Met splitpennen kan je heel veel dynamisch voorstellen. Dit is een draaischijf. De schijf is ingedeeld in 360° . Het middelpunt is bevestigd met een splitpen. Zo kunnen de benen draaien. Door nu een punt of een rechte te draaien op het einde van elk been, kan het beeld en het draaibeeld voorgesteld worden. Zo kunnen de leerlingen ook de handeling zelf uitvoeren en inzicht krijgen in de manier waarop een object wordt gedraaid.



Figuur 50: muurschema

Naast posters, kunstwerken, bordcanvassen, kan je ook schema's afbeelden in de klas. Als je een duidelijk overzicht wil creëren in de klas, kan je dat eigenlijk overal doen. Door met kleefgum op de muren te werken, kan je schema's in het groot en duidelijk ophangen.

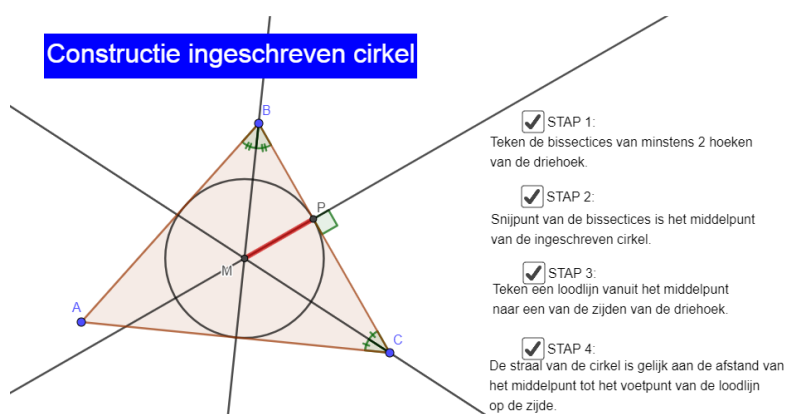
Figuur 43 is hier een voorbeeld van. Elke rechthoek is een A4-blad. Dit schema kan gebruikt worden doorheen het hele hoofdstuk rond telproblemen en kansrekenen. Het is wel belangrijk dat de leerlingen de structuur van het schema goed begrijpen. Het beste is om een dergelijk schema samen met de leerlingen op te stellen.



Figuur 51: Paard

Kleine tekeningen of afbeeldingen kunnen verwijzen naar belangrijke algemene regels. Een paard in de klas is een hulp om rekenfouten te voorkomen. De regel moet zelf aanwezig zijn. De verwijzing naar het paard op zich volstaat.

5.9 Wat met digitale ondersteuning?



Figuur 52: Geogebra-applet: constructie ingeschreven cirkel

De focus in deze bachelorproef ligt bij de analoge middelen om te visualiseren. Via geogebra-applets met aanvinkvakjes kan je echter ook een zeer dynamische visuele ondersteuning bieden. Hier rond werd echter al zeer veel materiaal ontwikkeld op geogebraTube. Meestal is het dus niet nodig om zelf materiaal aan te maken. Er is veel beschikbaar online. De verwerking van deze materialen behoort echter niet tot het bestek van deze bachelorproef.

5.10 Ondersteunend: wiskundeportfolio

Om zo goed mogelijk de leerlingen te kunnen ondersteunen, is het belangrijk om de leerstijl van de klas en dus van de leerlingen individueel te kennen en op te volgen. Tijdens stage gebruikte ik hiervoor een wiskundeportfolio. In bijlage 11 is een deel van een voorbeeld ingescand. Het is een leerlingvolgsysteem dat zeer interactief gebruikt wordt. Bij de start van het schooljaar en op het einde van het schooljaar is er een bevraging. Daar worden vragen gesteld om te polsen naar eerdere ervaringen, het zelfbeeld over wiskunde, de manier waarop ze het liefste wiskunde leren... De vragen zitten ook in bijlage 11. Op basis van de antwoorden kan je heel specifiek gaan clusteren en aan differentiatie doen op basis van de voorkeuren en noden van de leerlingen. De groepsverdeling verloopt ook veel vlotter door middel van kleurstickers. In de rest van het portfolio wordt gewerkt aan de mathematical mindset volgens de principes van Jo Boaler. Er is een focus op reflectie rond specifieke oefeningen. Er wordt op een positieve manier met fouten omgegaan. Er is ook een mogelijkheid om oefeningen te noteren die ze niet begrijpen. Zo leren de leerlingen ook verantwoordelijkheid voor hun eigen leerproces. Het is een extra communicatiemiddel tussen de leerlingen en de leerkracht. Zo zou je kunnen voorkomen dat leerlingen vervallen in een fixed mindset waarin ze niet meer geloven dat ze wiskunde kunnen leren.

6 Discussie en verder onderzoek

Zoals in het begin van de bachelorproef al vermeld werd, is dit werk slechts het begin. Het is nu een overkoepelend overzicht van theorieën, vermoedens en voorbeelden in verband met visuele wiskunde. In elk van deze onderdelen is er echter nog veel werk.

De theorieën die hier zijn opgesomd, stellen maar een fractie voor van wat al geschreven is over het belang van visualiseren. Heel veel mensen hebben iets gezegd over visualiseren, concretiseren, abstraheren, activeren... Iedereen lijkt er ook een andere mening over te hebben. De selectie aan theorieën blijft een selectie van wat ik het interessantste vond. Er is dus zeker nog nood aan een overkoepelde en wetenschappelijk onderbouwde theorie die enkel focust op het ondersteunen van mentale beelden door de instructiemethode aan te passen. Hier rond is ook nog weinig onderzoek gedaan. Men weet nog niet volledig hoe deze beelden in het brein ontstaan. Men kent de grote lijnen, maar ik vermoed dat er in de toekomst nog meer patronen duidelijk zullen worden.

Er is ook nog meer contextgericht onderzoek nodig naar het Vlaamse wiskundeonderwijs. De PISA-onderzoeken en de peilingstoetsen geven ons een ander beeld van hoe het met het wiskundeonderwijs gesteld is. Veel van de bronnen die ik heb beschreven, zijn getest in andere landen. Zij hebben ook andere curricula, andere leermiddelen... We moeten nog steeds kijken naar de implementatie in het Vlaams onderwijs. Dat is nog niet gebeurd.

Het kleinschalig onderzoek, met onder andere de enquêtes en de interviews, moet zeker ook uitgebreid worden. Er kwamen veel interessante besluiten uit een kleine steekproef, een specifieke populatie en een korte enquête. Op die enquête is ook geen statistisch onderzoek gebeurd. Deze uitbreiding naar Vlaanderen, zal een beter en meer onderbouwd overzicht geven van de aan- of afwezigheid van modellen in het onderwijs.

Bij de enquête en de interviews kunnen ook heel wat kritische bemerkingen gemaakt worden. Dat deden we al in het specifieke gedeelte van deze bachelorproef over het onderzoek. Het feit dat de data enkel op basis van zelfrapportering verzameld werd, is een struikelblok. Er is dus nog nood aan data afkomstig van verschillende observaties in klassen, data afkomstig van de leerlingen zelf, data uit testen... Enkel zo kan je met behulp van statistische interpretatie de juiste besluiten nemen. In de enquête werd ook geen onderscheid gemaakt tussen de verschillende richtingen. Het aantal uur wiskunde en de studierichting bepaalt waarschijnlijk ook mee welke aanpak er gebruikt wordt. Het zou interessant zijn om hier verder onderzoek naar te doen. De enquête zelf bevat ook heel wat kritieke punten. Het is te kort, het bevat te weinig controlevragen... Specifieker onderzoek is dus nodig.

Bij de voorbeelden van de modellen is het ook belangrijk om kritisch te zijn. Ten eerste kies ik om mij te beperken tot fysieke, manipuleerbare modellen. Onderzoek heeft het effect hiervan echter nog niet aangetoond, omdat deze modellen nog niet in de praktijk gebruikt worden. Dit leereffect is dus ook een van de zaken die nog moet nagegaan worden.

Rond algeblokken en algebrategels is ook nog zeer veel werk. Er is geen onderzoek die zich specificeert op deze modellen. Er moet ten eerste nagegaan worden of er een leereffect is door het langdurig gebruik. Ten tweede moet ook nog beter nagegaan worden hoe groot het draagvlak is bij Vlaamse wiskundeleraars om dit te gebruiken. Een derde toekomstig onderzoek rond deze specifieke modellen is de toepassing in de klas. Waar kunnen deze modellen het best ingezet worden? Wanneer moeten deze modellen verdwijnen?

Een algemeen discussiepunt is mijn eigen bias. Ik ben jong en enthousiast. Ik ga heel graag creatief om met de leerstof. Ik ben ervan overtuigd dat de leerkrachten een grote invloed hebben op het leerproces. Dat zijn enkele eigenschappen die de selectie van bronnen, vragen, modellen en besluiten hebben beïnvloed.

7 Besluit

Visuele wiskunde situeert zich binnen de trend van het realistische wiskundeonderwijs. Daar ligt de klemtoon op het gebruiken van alledaagse situaties en problemen uit de leefwereld van de leerlingen. Door verticaal en horizontaal mathematiseren wordt het mogelijk voor de leerlingen om kennis zelf op te bouwen en flexibel te gebruiken. Modellen worden als brug gezien om oplossingsstrategieën naar een formeler, abstracter niveau te kunnen brengen. Interactie tussen de leerling onderling en de leerkracht is essentieel. Het doel is om wiskunde als een samenhangend geheel te zien. Het onderwijs tot aan het vierde middelbaar is goed. Dat bleek uit de PISA-resultaten van 2015. We kunnen wel nog meer inzetten op de zwakkere en sterkere leerlingen. Het aantal leerlingen die het basisoniveau niet halen stijgt. De peilingstoetsen voor de derde graad, gaven ook aan dat een groot deel van de leerlingen de eindtermen niet haalt. Tussen het vierde en het zesde middelbaar ontstaan dus problemen.

Er zijn heel veel mensen die iets schreven over het belang van visualiseren. De cognitieve theorie van Mayer beschrijft hoe input verwerkt wordt in het brein. Hij linkt het ook met de mentale modellen die ontstaan. Hij onderzocht verschillende principes om de verwerking optimaal te kunnen ondersteunen door het ontwerp van de lessen aan te passen. Hij toonde empirisch aan dat mensen meer leren van beelden dan van woorden. De informatie op de beelden moet ook sober en gericht geselecteerd zijn. Klemtonen leggen bij het visualiseren is ook zeer efficiënt. Het opdelen van de wiskundeconcepten in hanteerbare delen zorgt voor een groter leerrendement dan bij het aanbrengen van de informatie in één keer. Mensen leren ook beter wanneer ze gestimuleerd worden om zelf begrippen of oefeningen uit te leggen. Pestalozzi schreef de theorie rond het hart, het hoofd en de handen. Om optimaal te kunnen leren, moeten deze drie namelijk gecombineerd worden. Het hart is hierbij volgens hem het belangrijkste. Montessori is een dokter en onderwijskundige die heel wat materiaal ontwierp met specifieke toepassingen voor wiskunde in de lagere school. Haar didactiek focust vooral op de vrijheid van het kind. Leerlingen moeten de ruimte krijgen om te kunnen ontwikkelen. Ze zijn van nature leergierig. Als leerkracht heb je vooral de functie om de leerling te begeleiden in dat leerproces. Boaler is de meest recente auteur die het belang van visuele wiskunde onderzocht. Ze werkte samen met neurowetenschappers om het netwerk die actief is bij het leren van wiskunde bloot te leggen. Ze ontdekte twee visuele wegen in het brein die verantwoordelijk zijn voor visualisatie. Ze concludeerde dat iedereen op een bepaald niveau belang heeft bij een visuele input in de wiskundeles. Om tot abstract begrip te kunnen komen, moet er namelijk eerst een zeer duidelijke, visuele basis gelegd worden. Deze basis wordt al zeer vroeg gelegd door een voorstelling van de vingers te maken. Dat zal uiteindelijk bepalend zijn voor het wiskundig inzicht van de leerling. De theorie van embodied cognition hangt hiermee samen. Hierin wordt het brein en het lichaam als een geheel gezien. De wiskundige concepten worden namelijk zowel in de visuele, sensorische en motorische delen van het brein gehouden. Gebaren zijn in deze theorie ook zeer waardevolle hulpmiddelen.

De ijsbergdidactiek is zeer toepasbaar in een klascontext waar rond visuele wiskunde gewerkt wordt. Er is een belangrijke hiërarchie aanwezig in het leerproces. Er zijn vier grote lagen die de leerling moet doorlopen. In de eerste fase is er een kennismaking met het concept via concreet en manipuleerbaar materiaal. Langzaam wordt het concreet materiaal vervangen door gestructureerde modellen en schematische voorstellingen. Als deze opgesteld zijn, worden de relaties tussen de onderdelen van het onderwerp onderzocht. Pas in de laatste fase zal men procedures automatiseren. Deze didactiek is gebaseerd op het CPA-model, waarin men een groot leereffect noteert bij de overgang van concreet naar picturaal naar abstract. De perceptuele variabiliteit verwijst in de theorie van Dienes naar de mogelijkheid om verschillende voorstellingen in uiteenlopende contexten te kunnen oproepen. Het doel is om het abstractieproces te maximaliseren. Een spiraalaanpak is hierbij belangrijk. Het doel is om geleidelijk meer inzicht in de structuur en samenhang van wiskundige concepten op te bouwen.

Naast het aanreiken van modellen is in de theorie rond visuele wiskunde ook de psychologie belangrijk. Een mathematical mindset verkrijgen bij de leerlingen staat hierbij centraal. Het invoegen van een wiskundeportfolio kan hierbij ondersteunen.

In verband met het leereffect van manipuleerbare modellen, zijn de onderzoeken het niet eens. Sommige onderzoekers noteerden een negatief effect, andere merkten een positief effect. Deze studies werden uitgevoerd in de lagere school en in andere landen en contexten. We kunnen hieruit dus geen besluiten trekken voor het wiskundeonderwijs in Vlaanderen.

Er werd ook een onderzoek opgesteld naar de visie van de West-Vlaamse wiskundeleraars in de eerste en tweede graad van het secundair onderwijs. Ten eerste viel het op dat de West-Vlaamse leerkrachten gebruiken wat voor handen is. De bekende tools, zoals het bord, het bordboek, geogebra en ruimtefiguren worden dan ook vaak ingezet om de les visueel te ondersteunen. Papier, gebaren, voorwerpen uit de klas worden meer gebruikt dan aangekochte modellen. Poster zijn minder populair. Het aanbod sluit namelijk niet aan bij de noden van de klas. De posters zijn te druk, zijn in het Engels, gebruiken andere terminologie... Andere leerkrachten gebruiken de posters niet, omdat ze de klas rustig willen houden. De muren volhangen met materiaal is geen goed idee. Dat kan voor afleiding zorgen tijdens de les.

De helft van de leerkrachten maakte ook bepaalde modellen zelf. Ongeveer de helft van deze mensen kan hiervoor een financiële tussenkomst krijgen. Bij de andere helft is dat niet mogelijk of weten de leerkrachten het niet. De meeste leerkrachten zien het belang van beeldvorming in. De hoofdredenen om deze modellen te gebruiken, blijken dan ook vooral over leerwinst te gaan. Algebra blijkt een moeilijk onderwerp te zijn om te visualiseren. Sommige zien ook hier het belang om met beelden te werken, terwijl andere de noodzaak om te kunnen abstraheren aanhalen. De leerkrachten geven ook aan niet te weten hoe algebra zou moeten gevisualiseerd worden. Algeblokken zijn niet gekend bij de grote meerderheid van de leerkrachten en het wordt dan ook niet gebruikt in de algebralessen.

Toch is er ook een kritische houding aanwezig. Het gebruik moet functioneel zijn. Tijd speelt hierin een grote rol. Het leerplan wordt vaak vermeld als een struikelblok om nieuwe dingen uit te proberen. Ze voelen weinig vrijheid door de hoge druk om alle doelstellingen te behalen. Een nieuwe methode zou dan ook enkel ingezet worden als de leerlingen het hiermee sneller doorhebben. Er is geen groot verschil tussen de oudere generatie en de jongere generatie. In beide groepen staat ongeveer de helft open om nieuwe dingen te proberen.

Er is niet enkel een probleem bij het vinden van visualisatiemogelijkheden bij algebra. Nieuwe modellen of leermateriaal voor wiskunde in het secundair onderwijs, zijn niet aanwezig op de markt. De leerkrachten moeten dus zelf de modellen maken als ze het willen gebruiken. De combinatie met de werkdruk zorgt ervoor dat leerkrachten niet meteen geneigd zijn dit te doen.

In het laatste deel van de bachelorproef worden specifieke voorbeelden gegeven van manipuleerbare modellen. Algebrategels en algeblokken zijn twee voorbeelden bij algebra. Volgens mij kunnen deze meteen ingevoerd worden in het secundair onderwijs, mits een bijscholing van de leerkrachten. Het is een zeer mooie manier om algebra vast te kunnen nemen en flexibel mee om te kunnen gaan. Je kan er ook zeer veel mee doen, waardoor het in meerdere jaren kan gebruikt worden. Verder onderzoek is wel nog nodig. Een venndiagram, een goniometrische cirkel, Knex, Clicks, een draaischijf, schilderijen en schema's zijn enkele andere voorbeelden waarrond een korte uitleg wordt gegeven. Dit zijn echter maar enkele voorbeelden. Het is de bedoeling dat deze fungeren als een inspiratiebron voor leerkrachten. Zij kunnen dan op hun beurt, voor hun specifieke noden en context, zelf gelijkaardige modellen ontwikkelen.

8 Epiloog

Tijdens de bachelorproef werkte ik aan enkele basiscompetenties. De belangrijkste zal ik hieronder opsommen.

Basiscompetentie 3: de leraar als inhoudelijk expert: De diepgang in de les motiveert en maakt de les boeiend.

Het eerste theoretische deel van mijn bachelorproef gaat over de manier waarop leerlingen wiskunde leren en hoe je de lessen boeiend kan maken door meer visueel te werken of activerend te werken met behulp van manipuleerbare modellen binnen het hedendaagse realistische wiskundeonderwijs.

Basiscompetentie 5: de leraar als innovator en onderzoeker: Werkt persoonlijk, creatief en vernieuwend

Het praktische gedeelte van mijn les gaat over voorbeelden om zelf modellen te maken. Mijn bachelorproef is volgens mij zeer vernieuwend. Zeer veel mensen kennen algeblokken of algebrategels niet. Het idee om deze materialen op die manier in te zetten voor het vak wiskunde is niet gekend. Het onderwerp zelf was ook niet opgegeven of voor de hand liggend.

Basiscompetentie 5: reflecteert spontaan en diepgaan: benoemt alle sterke en zwakte punten en legt verbanden met persoonlijke waarden en overtuigingen.

Hier verwijs ik naar elementen doorheen de hele bachelorproef. Misschien, vermoedelijk, waarschijnlijk zijn woorden die vaak voorkomen. Ik verberg zeker niet dat er nog veel werk is en dat er ook zeker zwakte punten in zowel de theorie als de praktijk voorkomen. De twee discussies die in de bachelorproef voorkomen, één algemene en één bij het onderzoek, zijn hier het bewijs van.

Basiscompetentie 11: de leraar als bezielende persoon: Toont passie voor het lerarenberoep.

Tijdens de bachelorproef werd ik heel veel geïnspireerd door uitspraken van leerkrachten. Ik kreeg er steeds meer zin door om les te geven. De vele materialen die ik maakte zijn hier ook het bewijs van.

Basiscompetentie 11: de leraar als bezielende persoon: Getuigt van een eigen onderwijs- en opvoedingsvisie.

Een besluit trekken rond dit onderwerp of een algemene theorie verzinnen, was zeer moeilijk. Iedereen verschilt sterk van mening over hoe onderwijs er eigenlijk uit zou moeten zien. Om rond dit onderwerp te kunnen werken, moest ik dus eerst voor mezelf uitmaken hoe ik onderwijs en opvoeding zie. Ik verwijs hier naar de algemene richtlijnen, die hoofdzakelijk gebaseerd zijn op mijn eigen visie.

9 Bijlagen

Bijlage 1: PISA- resultaten	p. 89
Bijlage 2: Interview Willem Beeuwsaert.....	p.90
Bijlage 3: Interview Els Van Haecke	p.94
Bijlage 4: Interview Filip Tanghe.....	p.97
Bijlage 5: Interview Johanna Mus.....	p. 100
Bijlage 6: Mail met de pedagogische begeleider.....	p.102
Bijlage 7: Foto's modellen in klaslokalen.....	p. 102
Bijlage 8: Verslag Tools 4 schools	p. 105
Bijlage 9: Voorbeeldenquête	p. 107
Bijlage 10: Voorbeeld wiskundeportfolio	p. 113

9.1 Bijlage 1: PISA-resultaten

Tabel 18: PISA-resultaten over de motivatie van de leerling

PISA-index 'Motivatie van de leerling voor wiskunde'	Vlaanderen	Jongens	Meisjes
Doorzetting	-0,26	-0,17	-0,35*
Openheid om problemen op te lossen	-0,28	-0,11	-0,43*
Intrinsieke motivatie (~ interesse)	-0,26	-0,21	-0,31*
Instrumentele motivatie (~ nuttig)	-0,39	-0,28	-0,49*

Tabel 19: Percentage leerlingen volgens hun hoogste niveau voor 'relaties en verandering'

Niveau	Punten	OESO-gem.	Vlaanderen
6	Meer dan 669,3	4,5%	9,5%
5	607,0 tot 669,3	9,9%	17,5%
4	544,7 tot 607,0	17,5%	21,7%
3	482,4 tot 544,7	22,2%	20,1%
2	420,1 tot 482,4	20,9%	15,1%
1	357,8 tot 420,1	14,5%	8,9%
<1	minder dan 357,8	10,4%	7,2%

Tabel 20: Percentage leerlingen volgens hun hoogste niveau voor 'vorm en ruimte'

Niveau	Punten	OESO-gem.	Vlaanderen
6	Meer dan 669,3	4,5%	9,8%
5	607,0 tot 669,3	8,9%	15,4%
4	544,7 tot 607,0	16,3%	19,7%
3	482,4 tot 544,7	22,2%	20,8%
2	420,1 tot 482,4	22,3%	16,8%
1	357,8 tot 420,1	15,8%	10,8%
<1	minder dan 357,8	10,0%	6,6%

Tabel 21: Percentage leerlingen volgens hun hoofste percentage voor 'hoeveelheid'

Niveau	Punten	OESO-gem.	Vlaanderen
6	Meer dan 669,3	3,9%	9,2%
5	607,0 tot 669,3	10,1%	17,6%
4	544,7 tot 607,0	18,5%	21,7%
3	482,4 tot 544,7	22,9%	20,9%
2	420,1 tot 482,4	21,1%	16,2%
1	357,8 tot 420,1	14,3%	8,9%
<1	minder dan 357,8	9,2%	5,5%

Tabel 22: Percentage leerlingen volgens hun hoogste niveau voor 'onzekerheid en data'

Niveau	Punten	OESO-gem.	Vlaanderen
6	Meer dan 669,3	3,2%	9,6%
5	607,0 tot 669,3	9,2%	15,6%
4	544,7 tot 607,0	18,1%	20,1%
3	482,4 tot 544,7	23,8%	21,2%
2	420,1 tot 482,4	22,5%	16,7%
1	357,8 tot 420,1	14,8%	10,1%
<1	minder dan 357,8	8,3%	6,8%

9.2 Bijlage 2: Interview Willem Beeuwsaert

Hebt u al gehoord van het principe ‘visual mathematics’?

Nog nooit van gehoord, maar ik vind het wel een **zeer boeiend** en tof onderwerp. Zo was er een spel ‘how close to hundred’ met dobbelstenen. Volgens mij zou het heel tof zijn om dat eens uit te testen in de eerste graad. Ik had wel het gevoel dat het meer toepasbaar was voor de **lagere school**. Vooral voor het grafisch schikken van getallen vond ik het zeer boeiend.

Welke analoge modellen gebruikt u in de klas?

Meetkundemodellen zijn wel sterk ingeburgerd in de **eerste graad**. Getallenleer kan je in het 2de jaar wel soms visualiseren. Toch ervaar ik dat het soms te moeilijk is en dat leerlingen de overgang van algebra naar het concrete niet snappen. Dat is bijvoorbeeld het geval bij de merkwaardige drieterm bij ontbinden in factoren. Sommige leerlingen begrijpen dat en sommige niet. Vaak zijn het de sterke wiskundige leerlingen die die snel door hebben. Dat komt omdat zij **twee goed functionerende hersenhelften** hebben. Symbolen, grafisch of algebraïsch, voor hen maakt het niet veel uit. Voor zwakkere leerlingen is er vaak een **tekort aan automatisering**. Ze leren de groene kaders. Daar staan eigenschappen in symbolen, in woorden en soms ook een afbeelding. Deze leren ze gewoon **vanbuiten** en soms lukt dat zelf ook niet. Daarbij komt ook nog dat we in een **beeldencultuur** leven. Een groot nadeel hiervan is het verlies van taal. Bij wiskunde heb je die **automatisering van woord naar beeld hard nodig**. Leerlingen zouden veel meer boeken moeten lezen. Hierbij ben je verplicht om zelf het beeld bij het verhaal te visualiseren. Dat gebeurt niet bij televisie waar het beeld voor de kijker wordt voorgeschoteld. Gamen is dan weer een ander verhaal. **Het ruimtelijk inzicht is veel beter** bij leerlingen die vaak gamen. We zien een duidelijk verschil met tientallen jaren geleden. Toch is het opnieuw jammer dat de beelden voor jou gemaakt worden bij gamen, maar het is dus beter dan televisie kijken. Ik zie het gebrek aan automatiseren van het visualiseren vooral in de **meetkunde**. Wanneer je zwaartelijnen aanbrengt, kan je de opdracht geven om een lijn te tekenen van uit het hoekpunt door het midden van de overstaande zijde. Ik doe dat met **intuïtie**. Met een borstelsteel en geodriehoek zoeken we naar het zwaartepunt van een driehoek. Als we de borstelsteel laten samenvallen met een hoekpunt en door het midden van de overstaande zijde van de geodriehoek (en dus samenvalt met de zwaartelijn), dan kantelt hij er niet af. Zo probeer ik dat iets meer visueel te maken. Voor bepaalde leerlingen is dat tof, sommige vertrekken liever vanuit de tekst, andere leert beter en anders dan iemand anders.

Maakte u deze modellen zelf? Wie financiert deze modellen?

Ik heb vooral **ruimtefiguren** in de klas staan. Enkele massieve, zoals een kubus, balk, cilinder, bol, prisma, piramide, kegel en afgeknotte kegel, waren een geschenk van collega's. We werken ook **samen met het VTI** om zo massieve modellen volledig in hout te kunnen krijgen. De draadmodellen van kubus, balk, piramide en prisma maakte ik zelf. Ook de vlakke figuren achteraan in de klas hebben ik en een collega zelf gemaakt. Enkele **posters** kregen we van **uitgeverijen**. Van andere posters kan ik de oorsprong niet. Ik vind het gebruik van posters ook **niet zinvol**. De klas wordt er **te druk door en vaak staat er te veel informatie** op een poster zodat het toch niet blijft hangen. Veel beter is dat je de leerlingen **zelf betrekt in het visualiseren**. Door bijvoorbeeld ontvouwingen van kubussen en balken eens echt te maken. De leefwereld van de leerlingen betrekken bij het aanleren van de ruimtefiguren. Dat is natuurlijk opnieuw meer voor het lager. Op de **ontbijttafel** staat bijvoorbeeld al heel veel bruikbaar materiaal. Laat de leerlingen voorwerpen meebrengen en het zelf ontdekken. Laat hen eens het volume van een cilinder berekenen met een schuifmaat. Ik moet toegeven dat ik het zelf ook te weinig doe. We zitten **gevangen in het boek en het leerplan**. We zitten gevangen in de toetsen. Ze moeten goed scoren op de toetsen. Ik geloof heel sterk in het maken van eigen cursussen. Wanneer men meer projectmatig werkt en een verhaal op kan bouwen aan de hand van wiskunde

is dat volgens mij veel interessanter dan hoofdstuk per hoofdstuk te werken. In het beroepsonderwijs doet men dat al zeer vaak, maar in het TSO en ASO komt dat bijna niet voor. Nando is volgens mij het enige wiskundeboek dat wel projectmatig werkt. Er is wel veel **enthousiasme** voor nodig en **vergt veel werk** van de leerkrachten. We hebben nu al **tijd te kort**.

Financiering is een moeilijke vraag. Mocht ik het vragen aan de directie, zouden ze misschien wel een budget geven, maar dat heb ik **nog nooit gedaan** voor modellen wiskunde.

Gebruikt u ook digitale modellen?

Geogebra is iets wat ik vaak gebruik. Zowel om klassikale demo's te tonen om iets te construeren als actief voor de leerlingen zelf. Hiervoor ga ik altijd naar een computerlokaal. De tablets zijn daar niet zo handig voor. **Constructie op papier** is ook nog altijd belangrijk en kan je combineren door erna een leerling aan de computer te zetten en zo in Geogebra een klassikale instructie te doen.

Ik gebruik ook verschillende andere applets, zoals blockCAD, solid edge, wiris cas, ontvouwingsapplicaties, websites zoals rekenen in Z...

Ik wil wel nog toevoegen dat we al leven in een **zeer digitaal tijdperk**. We moeten niet overdrijven in het digitaal zijn. De bordboeken zijn een goed idee om de leerlingen beter te laten volgen, maar het mag **geen methode** zijn om uw lessen te geven. Te veel alternatieven in de klas kan de lessen ook **zeer druk** maken. Een **krijtbord** is voor mij nog altijd het beste alternatief. Het liefste zou ik een bord hebben waar je even goed op kan schrijven met een stift als met krijt en wat tegelijk ook een projectiebord is.

Wat is volgens u het voordeel/nadeel om analoge modellen te gebruiken?

- + Het slaat aan bij de leerlingen
- **Tijdrovend** in de les
- Tijdrovend voor de **leerkracht**
- Je moet soms heel minutieus werken om de **modellen te laten kloppen met wat je wil aanleren**
- **Verplaatsen** kan problematisch zijn

Wat is volgens u het voordeel/nadeel om met digitale modellen te werken?

De digitale modellen zijn veel **sneller**. Een **beeld blijft nooit lang staan** en blijft dus ook minder hangen. De leerlingen worden ook dagelijks al geconfronteerd met digitale afbeeldingen. De apparatuur is vaak ook duur en moet ook aanwezig zijn en werken. Digitale modellen zijn vaak wel **interactiever** met de individuele leerlingen door het gebruik van tablets.

Hoe is het gebruik van modellen gedurende uw carrière geëvolueerd?

Er is sprake van een **hele evolutie**. Aanvankelijk werd **alles analoog** gedaan. Dat veranderde zo'n 30 jaar geleden met de Commodore 64. Nu zijn de leerlingen hierdoor ook veel beter in **ruimtelijk inzicht**. Nu beginnen ze met **de leefwereld en gaan dan naar de vlakke figuren**. In getallen zijn we echter een **visuele factor kwijt door het verdwijnen van verzamelingenleer**. Er is sprake van **begripverarming** in getalbegrip en inzicht in getalbegrip. Vroeger werden de rationale getallen meteen voorgesteld als een equivalentierelatie van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}_0$. De strikte wiskunde is weg. De wiskunde sluit beter aan bij de lagere school. Als het een beetje goed is, dan is het goed. Dat vind ik fout.

U gebruikt deze modellen in de eerste graad van het secundair onderwijs. Denkt u dat dit principe doorgetrokken kan worden naar de hogere jaren?

Ik heb nooit in de hogere jaren gestaan. Het is wel **gevoelig**. Sommige **licentiaten staan minder open** voor vernieuwingen dan regenten. De grote struikelblok blijft hierbij **tijdsgebrek**. Dat fnuikt de vernieuwing en het enthousiasme. Het peil gaat achteruit.

Alles van algebra en functieleer kan handig zijn om het digitaal te **plotten**. Daar zou ik niet kiezen voor analoge modellen. Om het domein en het bereik aan te brengen kan je wel met een combinatie werken door bijvoorbeeld met een stok over het verloop van de grafiek te gaan.

Bij welke thema's gebruikt u modellen?

Bij het aanbrengen van het getal pi, bepalen we de **omtrek** met lintmeter en de diameter met een schuiflat. Zo komen we tot de verhouding van de omtrek op de diameter, wat het getal pi is. Vaak zie ik hier veel miserie met onder andere de balansmethode en met het feit dat er een limiet is. Op een gegeven moment moet je een synthese doen. Deze lukt meestal wel.

Ruimte meetkunde is natuurlijk een **logisch** thema waar modellen worden gebruikt.

Bij **merkwaardige lijnen** gebruik ik ook veel **visueel inzicht**. Het zwaartepunt kan je met een naald en een geodriehoek aanbrengen. De middelloodlijn en bissectrices met respectievelijk een omgeschreven en een ingeschreven cirkel. Hoogtelijnen doe ik via oppervlaktes.

Bij **transformaties** maak ik meer gebruik van **digitale modellen**. Ik zet de instructies op een platform waarmee ze een spiegelbeeld of een schuifbeeld moeten bepalen. De omkaderen zoals tekst en **kleur** moet ook aanwezig zijn. Ik heb ook samen met mijn collega techniek een online oefening op de wetenschappelijke schrijfwijze. Het is een quiz van vijf oefeningen waarvan ze een screendump moeten maken en die ze moeten indienen. De leerlingen kunnen de oefeningen steeds opnieuw maken. Het verhoogt ook de motivatie om zo lang bezig te blijven tot ze 15/15 hebben.

Maken we het de studenten hierdoor niet te gemakkelijk?

Je mag **natuurlijk niet zelf de tekening of de strategie geven**. De leerlingen moeten het wel nog zelf vinden. Je moet opbouwen zodat je de modellen niet meer nodig hebt. Je moet zorgen dat ze de juiste bagage voor later mee hebben.

Beoordelen we leerlingen die visueel leren hierdoor niet?

Je moet **altijd een combinatie** blijven hanteren van de verschillende leerstijlen. De woorden moeten er zijn voor taalvaardige leerlingen en het visuele moet ook tijdens het proces ter sprake komen. Je mag wel niet te veel slingeren van de ene aanpak naar de andere.

Zijn de leerlingen zelf soms bezig met de modellen te hanteren?

Ja, een goed voorbeeld hierbij is **de blokjes voor het tekenen** van aanzichten. Iedere leerling maakt zijn eigen samenstelling en kiest zo de moeilijkheidsgraad van de aanzichten.

Ik heb de leerstof nog eens via mindmaps willen herhalen. Ik wou een overzicht behouden. Iemand met NLD kan daar bijvoorbeeld al niets mee doen. Verbaal zijn ze wel sterk. We moeten dus inzetten op het gebruik van **beide hersenhelften**. Je moet bij elk item iets zoeken.

Mogen ze de modellen dan ook gebruiken bij toetsen? Vraag je soms om een stelling te visualiseren?

In het examen is er altijd een deel wiskunde met GRM en zonder GRM. Echte modellen heb ik hen nog nooit laten gebruiken. Bij het tekenen van aanzichten bij samenstellingen van kubussen gebruiken we wel houten modellen. Ze kunnen te stapel nabouwen, inkleuren en zo beter de aanzichten tekenen. In de klas heb ik ook

doorzichtige bakjes waarmee ik de aanzichten toon aan de hand van een verfrol. Op het moment van een toets zijn we al verder en moeten leerlingen dat zelf in hun hoofd kunnen opbouwen. Ik ben niet tegen het gebruik, maar ik heb het nog nooit gedaan op een SB of een examen. **Je moeten het zelf kunnen visualiseren.** Toch moet je het altijd vertalen vanuit de klassituatie. Ik **differentieer heel weinig.** Mijn ervaring leert me dat het slecht is voor het zelfbeeld van de leerlingen en ze raken achterop. Als de leerlingen later in het beroepenveld komen, zal men daar niet gaan differentiëren. Een optimale begeleiding is stappen zetten naar het beroepsleven. Als school en leerkracht moet je jezelf eigenlijk overbodig maken. Leerlingen moeten hun **plan leren trekken.** Wiskunde is hier zeer belangrijk voor iedereen. Probleemoplossend leren denken heeft voordelen in het dagelijks leven. We moeten hier meer op inzetten.

Ik ben misschien wel een voorstander van het inzetten van jokers. Voor een deel van de punten mogen ze dan bijvoorbeeld op het examen een blokkendoos vragen. Ik heb hier wel enkele praktische vragen bij. Bij rekenen in Z zou je bijvoorbeeld het doosje met de rekenregels kunnen vragen.

Gebruikt u posters actief in de klas?

Nee, ik ben geen voorstander van posters. In de lagere school wordt dat zeer veel gebruikt. De hele klas hangt vol met zaken die erin gepropt moeten worden. Voor mij moet een **klas rustig blijven.** Het zijn afleidingspunten. Ik zou daar niet in aarden en hanteer het principe '**less is more**'. Je kan de klas wel eens aankleden voor actuele situaties. Om even naar voren te halen waar je mee bezig bent. Maar bij te veel afleiding volgen de leerlingen de les niet meer. Je moet daar ook mee opletten bij het geven van een toets. Alles moet **afneembaar** zijn. Daarbij komt ook nog dat vele **posters van uitgeverijen andere terminologie** hanteren. Hierdoor kan het zelf voor nog meer verwarring zorgen bij leerlingen.

Hebt u nog aanvullingen?

Ik denk wel dat er nog werk is aan het wiskundeonderwijs. Ik merk dat elke dag in de les en de fout ligt volgens mij in de **lagere school.** Bij het aanleren van merkwaardige producten merk ik dat de tafels niet meer gekend zijn. De leerlingen kunnen niet meer hoofdrekenen. Cijferen is niet meer gekend en ze zijn bang voor grote getallen. Staartdelingen leren ze in het lager. Daar is een beetje goed, goed genoeg. Frans moeten ze niet meer kunnen schrijven. Dat is niet voldoende in het middelbaar. **Automatiseren is zo belangrijk en dat start in de lagere school.** Tafels moeten via associatie gekend zijn. De basis moet er zijn en die gaat verloren. Door stappenplannen te gebruiken raken automatisen niet geautomatiseerd. Er zou niemand door het examen zijn van 30 jaar geleden. Er **is nood aan structuur in alles,** zowel in tijd, ruimte en handelingen. In India leren ze al programmeren in het eerste leerjaar. We hebben wel een **beter zelfvertrouwen** tegenover 30 jaar geleden. Er zijn dus zeker nog positieve punten, maar er is ook werk aan de winkel.

9.3 Bijlage 3: Interview Els Van Haecke

Hebt u al gehoord van het principe 'visual mathematics'?

Ik ken de term niet. Het heeft volgens mij iets te maken met het **abstracte concreet voor te stellen**. Bij ruimtemeetkunde is dat logisch. De vraag of het mogelijk is bij **algebra**, is **moeilijker**. Waarschijnlijk is het wel mogelijk. Bij **merkwaardige producten kan dat bijvoorbeeld aan de hand van vierkanten**. Pythagoras wordt ook concreet voorgesteld.

Welke modellen hebt u ter beschikking?

Wij hebben doorzichtige modellen uit **plexiglas** voor **ruimtemeetkunde**. Sommige hebben een **gekleurde doorsnede**. Vroeger werkten we met K'nex, tot de directie deze set aangekocht heeft. We hebben verschillende ruimtefiguren, zoals kubussen, piramide... Toblerone en andere **alledaagse voorwerpen** gebruik ik ook in de les. De leerlingen mogen ook ferrero rocher dozen gebruiken **op het examen**. Dat is heel erg nodig bij de oefeningen. De keuze om het al of niet te gebruiken ligt bij de leerlingen. De leerlingen kopen namelijk zelf zo'n doos aan. Voor mij zijn deze modellen meer dan voldoende. Het is wel **echt nodig** om zo'n modellen te gebruiken. Bij algebra weet ik niet goed hoe ik dat zou moeten doen. In de **hogere graden is het ook nodig om abstract te kunnen denken**. Het is dus wel minder nodig als we naar een vijfde jaar of een zesde jaar gaan. Ze moeten toch abstract kunnen denken als ze verder zouden studeren.

We hebben ook **wiskundespeken**. Dat is er gekomen na een bezoek van de begeleidingsdienst. Er was nood aan **bufferlessen waar alle thema's door elkaar werden gebruikt**. In het eerste trimester doen we dat in de vorm van een ganzenbordspel. In het tweede trimester is er een cluedospel en in het derde trimester stratego. De competitie is hier **zeer motiverend**.

Welke digitale middelen gebruikt u ter ondersteuning?

Geogebra gebruik ik vooral bij functies ter controle. Als er een vraagstuk is waar een figuur nodig is, is Geogebra gemakkelijk om te **illustreeren**. De leerlingen hanteren Geogebra **niet zelf**. Een keer per jaar laat ik de leerlingen wel een groepswork uitwerken bij het onderwerp analytische meetkunde. Daar moeten ze een probleem oplossen en kunnen ze wel Geogebra gebruiken ter ondersteuning. Het is vooral de **tijdsdruk** die ons tegen houdt om hier meer mee te werken. We hebben ook het gevoel dat Geogebra niet meer in de **eerste graad** wordt aangeleerd. Dat maakt het moeilijk om er in de hogere graden snel mee te werken. Ik gebruik ook een **ingesproken** filmpje over de abc-formule voor de discriminant. De leerlingen kunnen dat thuis opnieuw gebruiken. Dat is zeer gemakkelijk. Ik gebruik ook **wekelijks Kahoot om parate kennis te testen**. Per trimester wordt er zo een winnaar gekroond.

Heeft u een evolutie gemerkt in de manier waarop leerlingen wiskunde leren?

Ja, ik heb het gevoel dat leerlingen in het begin van mijn carrière alles meer bijhielden. De **basiskennis** is volgens mij ook **gedaald**. Het rekenen met breuken of het oplossen van vergelijkingen gaan vaak samen met **rekenfouten**. Hoofdrekenen gaat ook moeilijk. De moeilijkheid bij functies ligt vaak in het rekenwerk. De rekenmachine heeft hier een invloed op gehad. Er is volgens mij sprake van een **mentaliteitswijziging**. Leerlingen vinden het vaak voldoende om enkel de theorie te snappen of te leren. Ze hebben de attitude om **oefeningen spontaan opnieuw** te maken veel minder. Ik heb het gevoel dat leerlingen vroeger hun leerstof spontaan bijhielden. Leerlingen hebben ook **veel minder tijd** om echt te leren. Hun weekends zijn volgepland. De computer zorgt voor afleiding. Leerlingen zijn hierdoor ook vaak moe in de les. Als er dan een toets komt, schrikken ze van de achterstand die ze hebben. Er wordt ook voor alle vakken veel verwacht van de leerlingen. Zowel voor talen, godsdienst, geschiedenis als voor wiskunde moeten de leerlingen taken maken en hun lessen bijhouden. De **druk is hoog**.

Wat denkt u over posters in de klas?

Voor ons is het ophangen van posters **moeilijk**. De meeste klassen hebben **geen vast lokaal** voor wiskunde. In een viertal klassen hangen er wel effectief posters. Ik vind dergelijke posters wel nuttig als ze functioneel gebruikt worden. Ze **kunnen interesse wekken en je kan ernaar teruggrijpen** in de les.

Is het gebruik van modellen en specifieke visualisatie van abstracte concepten nuttig in de hogere graden?

Ik denk persoonlijk dat dat zeker nuttig kan zijn. Zeker in de minder wiskundige richtingen kan die ondersteuning helpen. Ik denk wel dat het moeilijk zal zijn om de leerkrachten hiervan te overtuigen. Wij merken soms in de vakwerkgroep een kloof tussen de leerkrachten van de tweede en de derde graad. Volgens de leerkrachten van het vijfde en zesde jaar mag je leerlingen niet te veel 'bepamperen'. Zij doen dat ook niet en dat maakt de overgang naar de derde graad te groot. Ik denk persoonlijk ook dat de leerkrachten van de hogere graden hier ook **minder open voor staan**.

Maken we het de leerlingen niet te gemakkelijk door deze ondersteuning?

Dat denk ik niet. Het visueel geheugen ondersteunen is een meerwaarde. Dat merk ik zeker bij het filmpje over de abc-formule van de discriminant. De **kloof kan ook verkleind** worden door meer verschillende methoden te gebruiken om iets uit te leggen. Door meer te visualiseren, maak je de kans op succeservaringen ook groter. In de derde graad is die extra begeleiding misschien wel minder nodig. De zelfstandigheid van de leerlingen moet groeien naarmate ze ouder worden.

Vraagt u soms specifiek om een stelling te visualiseren?

Het bewijs van Pythagoras wordt visueel gegeven aan de hand van de figuren van Bashkara en Garfield. We hebben natuurlijk bij elk bewijs ook bijhorende **figuren**. Die teken ik vaak op **het** bord. Grafieken stellen we ook samen op. Nulpunten en dergelijke kan je zo beter uitleggen als je de grafische betekenis weet. Ik denk dat het altijd visueel maken van bepaalde abstracte concepten ook heel moeilijk is. Leerlingen die minder snel zijn, kan je hierbij verliezen. Het zou dan wel zeer nuttig zijn om het inzicht van sterkere leerlingen te vergroten. We zouden ook meer moeten inzetten op het samenkomen van inhouden over verschillende jaren. Dat zou ook de mogelijkheid om te visualiseren vergemakkelijken. Ik denk hierbij bijvoorbeeld aan de visualisatie van de merkwaardige producten.

Kent u algeblokken?

Nee, ik ken het niet. Ik weet wel dat ze in Nederland veel meer visueel werken in wiskunde. Ik denk dat opnieuw de tijdsdruk bij ons een grote rol speelt. De **leerplannen** zijn gedetailleerd en we moeten alles gezien hebben binnen een bepaalde tijd. Modellen zoals de algeblokken zijn ook gewoon **niet gekend**. Ik heb het nog nooit gezien op een spelletjesmarkt of op de dag van de wiskunde. Ik denk wel dat algeblokken kunnen nuttig zijn. Algebra is een moeilijk onderwerp voor veel leerlingen. Functies die hieruit volgen zijn vaak ook een heikel punt, maar volgens mij ligt dat **niet aan een tekort aan inzicht**. De leerlingen maken hier vooral fouten bij het **rekenwerk**. Het voortbouwen op eerder geziene leerstof is ook vaak moeilijk. De problemen bij goniometrie en analytische meetkunde zijn hier een gevolg van. Ruimte meetkunde is dan in vergelijking veel minder een probleem.

Wat is volgens u de beste manier voor leerlingen om wiskunde te leren?

Herhaling is volgens mij de sleutel. Je moet zaken meerdere keren doen om ze onder de knie te krijgen. Oefeningen moet je niet bekijken, maar effectief **opnieuw maken**. Zo wordt dat volgens mij veel beter verwerkt in de hersenen. De theorie moet je wekelijks herbekijken. Theorie moet je voor het examen dan ook nog opnieuw leren. De leerlingen krijgen van mij een zeer uitgebreid leerstofoverzicht. Dat helpt om de leerling te sturen doorheen de theorie. Er zijn ook wel leerlingen die meer interesse hebben voor wiskunde dan andere leerlingen. Dat is normaal. De verdiepingsoefeningen in de mappen worden door die leerlingen

dan ook spontaan gebruikt. Deze leerlingen gaan vanuit hun **interesse** op zoek naar extra leerstof. Toch is wiskunde zeker niet voor iedereen moeilijk. **Inzicht is bijvoorbeeld volgens mij moeilijk aan te leren.** Door heel veel te oefenen en concepten in andere situaties over te brengen, kan je dat wel verbeteren. Mocht een individuele begeleiding mogelijk zijn, zou dat nog gemakkelijker zijn. Dat is echter in het huidige systeem wegens tijdsgebrek niet mogelijk. Principes als flipped the classroom kunnen hierbij wel helpen, maar dan **verhoog je de werkdruk** van zowel de leerkrachten als de leerlingen. Deze is volgens mij al hoog genoeg in combinatie met alle andere vakken. Via **verlengde instructie** is het wel mogelijk om meer individueel te werken met sterkere of zwakkere groepen.

Overleg kan ook interessant zijn. Met de vakwerkgroep komen we regelmatig samen tot een keer per week. Zo kunnen we ideeën wisselen en het curriculum bespreken. **De werking met het handboek** is nu heel belangrijk. De vakwerkgroep met de tweede en de derde graad komt maar een keer per trimester samen. Zoals eerder gezegd **verschilt de aanpak tussen deze twee graden in onze sterk.**

Stelt u soms specifieke vragen naar een strategie?

Ik doe dat zowel in de klas als op toetsen. Bij **analytische meetkunde is het 'stappenplan'** die ze volgen zeer **belangrijk**. Leerlingen schrijven ook soms hun antwoorden niet volledig uit. Door hen op voorhand even te laten stilstaan bij de oefening en een strategie te noteren, zie ik als leerkracht de gebruikte methode. Ik merk dat dat **vooral bij jongens** soms moeilijk is. Vaak krijg ik enkel het antwoord op een vraagstuk. Bij constructies vraag ik soms ook om de strategie te noteren. Het bepalen van de multipliciteit is ook een vast stappenplan. Bij leerweg vier kunnen ze dat stappenplan op toets ook gebruiken. Dat is een houvast voor die leerlingen. Diezelfde leerlingen krijgen in de les ook een **formulekaart**, maar deze mogen ze niet gebruiken op het examen.

Op welke manier gebruikt u het bord in de lessen?

Ik schrijf meestal de **formules** die we gebruiken op het bord. Zo kan ik er ook naar **verwijzen**. **Kleur en pijlen** op het bord zijn ook zeer belangrijk volgens mij. **Grafieken** teken ik samen met de leerlingen op het bord en in de schriften. Met de figuren in het handboek werk ik minder vaak. Bij **statistiek en kansrekenen** ligt dat anders. Ik gebruik daar wel vaak figuren die we niet zelf opstellen om af te lezen via een onderwijsleergesprek. Histogrammen en boxplots doen we wel een keer aan het bord. Vooral de **tijd** speelt hier een grote rol.

Hebt u nog aanvullingen?

Ik vind dat de **theorie vaak niet goed in handboeken** staat. Vaak is het maar deels uitgeschreven en moet je het toch nog in een schrift aanvullen. Mocht het mooi in het handboek staan, zouden de leerlingen minder moeten schrijven. Rekenen met reële getallen is hiervan een voorbeeld. De leerlingen vinden het onderwerp moeilijk en eigenlijk staat er **te weinig in het handboek**. Voor statistiek en telproblemen hebben we zelf een cursus. De infoboeken zijn nogal **apatisch**. We maken ook de transitie van de boeken van WP+ naar Matrix in het derde jaar. Daarbij hoort een correctiesleutel en een plusboek. We kunnen ook gedifferentieerder werken met openleertrajecten met die boeken. Op het examen worden ook basis en verdiepingsvragen gesteld. De ouderraad is alvast zeer enthousiast. Ik hoop **in de toekomst ook om over meer materiaal te beschikken**. Jonge leerkrachten zullen ook nieuwe ideeën brengen. De handboeken zullen ook veel veranderen door de discussie. Er zal een andere benadering van onderwijzen komen volgens mij.

9.4 Bijlage 4: Interview Filip Tanghe

Hebt u al gehoord van het principe van de visual mathematics?

Ik ken de specifieke term niet. Er zijn heel wat termen die in het onderwijs gebruikt worden die ik niet ken, maar wel toepas. Als ik dan denk aan visuele wiskunde, dan denk ik aan **tekenen op het bord**, de ruimtefiguren die we hebben. Het is eigenlijk de theorie rond het overzetten van woorden in beelden.

Het probleem bij het gebruiken van veel extra materiaal dat we **geen vast lokaal** hebben. Er is ook meer tijd nodig om dat materiaal te gebruiken, uit te leggen... We hebben maar vier of vijf uur per week. **Tijdsgebrek** is hier dus zeker een factor die mee zal spelen. De eerste jaren wordt dat wel nog gedaan.

Welke analoge modellen hebt u ter beschikking op school?

We hebben een bol, kegel, balk en een kubus, maar **ik weet ze eigenlijk zelf niet staan**. Ze zijn **verouderd en worden niet gebruikt**. Ik zie er **het nut** ook niet helemaal van in. Je zou de leerlingen veel meer leren door ze op wandel te nemen. De **realiteit** bevat alle zogenaamde modellen. Voor algebra ben ik niet bekend met modellen. We hebben wel een interessante workshop gevolgd over **origami in de klas**. Daar werkten ze ook zeer visueel door papier te vouwen en zo tot eigenschappen te komen. Je kon daar ook zeer ver in gaan. Zo kan je origami gebruiken om het bestaan van vierkantswortel twee aan te tonen.

Hoelang heeft u al les?

Ik geef al 17 jaar les.

Heeft u evoluties opgemerkt bij het wiskunde geven?

Ik merk bij mezelf vooral dat ik **me sneller erger**. De leerlingen zelf kunnen wel aan problem solving doen door te tekenen, maar ze staren zich soms blind op de cijfers. **Hoofdrekenen** is ook een probleem. De **rekenvaardigheden zijn volgens mij wel verslechterd**. Het gebruik van het rekentoestel speelt daarbij wellicht een rol. Het cognitieve is minder aanwezig in het onderwijs. Soms is het ook niet nodig, doordat we kennis kunnen bundelen. Ook het vele werken met schermmpjes heeft volgens mij geen goede invloed. Alles moet je opnieuw oproepen. Op de Ipad staat de leerstof wel ergens, **maar de leerstof is ook snel weg**.

Ik merk ook wel dat ze **weinig bezig zijn met hun studies**. In de klas zijn ze meestal wel begaan, maar daar stopt het. Het verwerkingsproces gebeurt niet. Dat merk ik als ik onverwacht vraag om op te schrijven wat ze nog weten van de vorige les. We hebben ook een toetsenkalender, waardoor ze niet elke week leren voor wiskunde. Ze leren alles in één keer voor een toets.

Gebruikt u vaak digitale middelen?

Weinig. Ik denk dat je **de handelingen vaak echt moet tonen**. Door de werkwijze effectief te doen aan het bord te doen, leren ze volgens mij beter. Met **een Ipad is dat misschien sneller en kwalitatief ook goed**, maar ik prefereer toch het **bord**. Ik pak mijn oefeningen dan wel **tijdsefficiënt** aan. In de Broederschool maken ze alle oefeningen. Ik maak een **selectie**. We noteren de opgave. De meeste oefeningen verbeteren de leerlingen zelf aan de hand van een verbeterleutel. Sommige oefeningen maken we mondeling samen. Op die manier is er meer tijd voor individuele uitleg bij moeilijkheden.

Wat is volgens u het voordeel om analoge modellen te gebruiken?

Het realisme is zeker een voordeel. Met de Ipad heb je soms het gevoel dat de leerstof nog steeds een ver-van-mijn-bedshow is. Door voorbeelden te gebruiken, zoals een rolluik voor 12-hoekig prisma, breng je de leerstof in de leefwereld. Het **plooien van papier** is ook een voorbeeld hoe je iets gewoon kan ervaren door dergelijke modellen. Je **ziet de eigenschappen gewoon**. Ik denk wel dat het belangrijk is om **afwisseling** te steken in de manier waarop je aandacht trekt. Ik maak vaak mopjes en dat kan ook een manier zijn om

interesse te wekken. Je kan dus zeker niet voor alles analoge modellen gebruiken. Het is volgens mij een zaak om **zelf te ontdekken waar het nuttig** is.

Probeert u vaak zelf nieuwe dingen uit?

Ja, ik sta zeker open om **nieuwe zaken** te testen. Als ik iets wil doen, zorg ik wel dat ik eerst een stap achteruit kan zetten. Je moet daarvoor niet alles dat we hebben, weg willen smijten. De factoren die mij soms tegenhouden zijn **tijd en geld**. Zo maak ik soms BZL-opdrachten, omdat deze wel efficiënt zijn. Ik gebruik wel een geodriehoek, maar **geen passer**. In de klaslokalen is ook niet standaard een geodriehoek aanwezig. Elke leerkracht heeft er normaal wel één.

Kunt u bij de directie terecht om kosten terug te vragen?

Ja, dat is geen probleem. We hebben **smartgames** aangekocht die het **ruimtelijk inzicht** bevorderen. Elke laatste les spelen we zo'n smartgames. Ik heb ook zelf nog een paar andere puzzels liggen, zoals de schuifpuzzels, een houten doos met blokken, mix & match met kaartjes... Inzicht is moeilijk te meten, maar ik geloof wel dat dergelijke games kunnen helpen. Bij transformaties worden dergelijke games **geïntegreerd** in de les zelf. Het motiveert ook.

Het zou misschien wel handig zijn om duidelijke afspraken te maken over budgetten.

Waarom vinden veel leerlingen wiskunde volgens u saai?

Dat heeft volgens mij een dubbele oorzaak. Ten eerste zijn er **heel veel saaie leraars**. Als je enkel het boek volgt, geen tijd maakt voor een babbeltje of geen mopje kan maken, dan is dat vaak ook niet motiverend voor de leerlingen. Daarbij komt ook nog dat de **leerkracht de leerstof heel goed moet beheersen**. Ten tweede hebben de leerlingen ook **te weinig succeservaringen** volgens mij. Ze hebben een laag zelfbeeld in verband met wiskunde. Dat heeft heel veel gevolgen voor de manier waarop die leerlingen over wiskunde denken en leren.

Maken we het de leerlingen niet te gemakkelijk door meer visuele ondersteuning aan te bieden?

In Roeselare zit het niveau in het algemeen wel goed. Nationaal zien we wel een daling in inzet, motivatie en interesse. Ik denk dat we het te goed hebben. Er is **altijd een vangnet** door remediëring, CLB, GON... Er is volgens mij wel geen correlatie met het stijgend aantal hobby's. Volgens mij leer je net **plannen** als je een druk schema hebt.

Is het visueel ondersteunen ook nog nuttig in de 3de graad?

Ik denk dat het wel **nuttig** zou kunnen zijn voor bepaalde leerlingen. In hogescholen zou dat zeker ook nuttig kunnen zijn voor bepaalde concepten. Het draagt volgens mij wel bij aan het **verwerven van kennis**. De inhoud zal beter onthouden worden. Bij het tekenen is het wel belangrijk om de **combinatie te hebben tussen zelf tekenen en tekenen door de leerkracht** aan het bord. Leerlingen kunnen ook aan het bord komen om een oplossing te tekenen. Het kunnen schetsen van **probleemsituaties** is vaak al een belangrijke stap om een oefening te kunnen oplossen.

Vraagt u soms om stellingen te visualiseren?

Bij eigenschappen doe ik dat wel vaak. Bij verwisselende binnenhoeken en andere meetkundige afleidingen kan dat zeker nuttig zijn. Het kan volgens mij wel **niet bij alle onderwerpen**. Opnieuw moet je denken aan de combinatie middelen en leereffect. Bij merkwaardige producten kan je de voorstelling doen, maar volgens mij gaan ze de formule hierdoor niet meer onthouden. Bij **Pythagoras** kan je wel veel doen met een **touw**. De overgang naar de realiteit bij dergelijke onderwerpen is zeer belangrijk voor de motivatie en het begrip. Je moet ook altijd rekening houden met de **tijdsdruk**.

Denkt u dat een model zoals op de foto (zie eerder) nuttig zou zijn in de klas?

Ja, maar het mag **niet te groot en niet te duur** zijn. Je gebruikt het maar **één keer**. Het is wel leuk en ze zullen het misschien later wel onthouden, maar het **leerrendement** voor deze specifieke toepassing is volgens mij niet groot genoeg.

Wat denkt u van posters in de klas?

Ik ben daar zeker fan van als je in een **vast lokaal** zou zitten. Wij zeulen vaak van klas naar klas, waardoor het niet mogelijk is heel veel modellen mee te nemen.

Welke onderwerpen gaan bij u het vlotste/het slechtste?

Transformaties, gelijkvormigheid, driehoeken, vierhoeken gaan zeer goed. Ook de theorie van de andere onderwerpen gaat meestal goed. **Statistiek** is ook een onderwerp dat gemiddeld **goed scoort**. **Algebra, rekenen met vierkantswortels, functies en ruimtemeetkunde gaan meestal minder goed**. De problemen met algebra gaan we volgens mij **niet oplossen met visualisatie**. Algebra moet je niet voor u zien. Teveel vragen stellen, kan soms tot nog meer problemen leiden. Daartegenover staat wel dat veel leerlingen de **regels in algebra vaak als aapjes toepassen**. Volgens mij is het wel belangrijker om verhaaltjes op te bouwen om de abstracte problemen zo in een **realistische setting** te kunnen plaatsen.

Welk soort bord gebruikt u het liefst?

Ik gebruik het liefste een **stiftbord**. Op een witte achtergrond komt alles veel meer uit. Op een krijtbord moet je ook voorzichtig zijn met de **kleuren**. Oranje, rood, bruin kan je bijvoorbeeld moeilijk onderscheiden. Onze krijtborden hebben ook heel wat slijtage. Het is in het algemeen properder.

Een smartboard gebruik ik vooral om te **projecteren**. Geogebra is een van de toepassingen die ik gebruik. In het vierde jaar voor statistiek gebruik in Excel, maar we doen het ook met de GRM. Een nadeel van projecteren is wel dat de beelden meteen weer weg zijn.

Hoe leren leerlingen wiskunde het best volgens u?

Ten eerste moeten ze **een goed, fris moment** uitkiezen. Ze moeten niet meteen na school, zo snel mogelijk hun werk willen doen. Een lijst met zaken die ze **moeten kennen en kunnen** is ook altijd goed om op voorhand te overlopen. Volgens mij moeten ze eerst de theorie overlopen en deze in eigen woorden kunnen uitleggen. Daarna moeten de leerlingen oefeningen maken **per onderdeel**. Het is belangrijk dat ze de oefeningen niet enkel bekijken, maar ook effectief (her)maken.

Hebt u nog aanvullingen?

Ik gebruik ook **Youtube** als hulpmiddel. Zo kan ik de uitleg inspreken en kunnen de leerlingen deze zaken alles achteraf opnieuw beluisteren op hun eigen tempo. Soms verstop ik wachtwoorden in de filmpjes om de leerlingen te motiveren. Ook toetsen kan je op die manier zelfstandig laten verbeteren. Achteraf is er dan natuurlijk wel tijd om nog extra vragen te stellen.

9.5 Bijlage 5: Interview Johanna Mus

Waar aan denkt u als u de term visuele wiskunde hoort?

Ik denk vooral aan dingen tonen, figuren tekenen, applicaties gebruiken, posters uithangen, spelletjes spelen... Ik denk aan **tekeningen maken voor meetkunde** op het bord of via Geogebra. Ik gebruik bijvoorbeeld een blad papier om de deellijn aan te leren. Voor de som van de hoeken van een driehoek gebruik ik ook papier. Wij hebben echter **geen specifiek wiskundelokaal**, zoals in Ardooie. Ik vind dat principe zeer interessant, maar dat is volgens mij **enkel mogelijk met zeer gemotiveerd collega's**.

In het derde jaar gebruik ik bij Pythagoras de **computer** om de stelling af te leiden. Het handboek 'Van Basis tot Limiet' heeft bij dat thema een applet gemaakt. De verschillende bewijzen zitten daar ook in verwerkt. Die applicatie is zeer duidelijk. Ook bij goniometrie gebruik ik geogebra-applets. Bij gelijkvormige driehoeken gebruik ik ook geogebra en het bord voor de **visuele ondersteuning**. Ik gebruik het bord wel minder voor **afleidingen**. Met de **computer kan dat veel dynamischer**. Het bord gebruik ik vooral voor de oefeningen. Daarop maak ik wel soms de tekening zoals de leerling ze moeten maken. Het tegelijk tekenen op de computer vraagt meer tijd. Voor statistiek gebruik ik vooral Excel en de GRM.

Gebruikt u analoge modellen in de wiskundeles?

Papier gebruik ik zoals gezegd bij het aantonen van de som van de hoeken in een driehoek en bij de bissectrice. Ik gebruik ook een **kubus** bij de onderlinge ligging van rechten. Ik combineer dat met balpennen om zo via draaien de leerstof aan te leren. Je zou het ook met **Knex** en breinaalden kunnen tonen. Bij ruimtemeetkunde gebruik ik ook die kubus, maar ook dagdagelijkse voorwerpen zoals een tobleroneverpakking, een doosje krijtjes...

Wie financiert deze modellen?

Ik heb eigenlijk **geen modellen die financiering nodig hebben**. We hebben wel een spel gekocht (3D io) om aanzichten aan te leren. De **school** heeft dat zelf aangekocht. Er is ook een zeer open cultuur om voorstellen te doen. Modellen die zelf gemaakt zijn, zullen waarschijnlijk wel moeilijker zijn om te verantwoorden.

Hanteren de leerlingen zelf ook de modellen?

Nee. In het derde jaar gebruiken de leerlingen wel zelf **geogebra**. Ze leiden daar de **goniometrische getallen** in driehoeken af. In het tweede gebruiken ze geogebra ook om transformaties te leren. Dat gaat zeer vlot.

Wat is volgens u het voordeel/nadeel om analoge/digitale modellen te gebruiken?

Ik zie **voordelen in beiden**. Ik vind het handig om eerst een projectie te geven van een oefening en daarna het **bewijs op het bord** te brengen. Als een figuur dan nog eens telkens terugkomt, maar met andere letters en een andere opgave, dan blijft dat volgens mij veel beter hangen.

Ziet u mogelijkheden om visueel te werken binnen algebra?

Nee. Ik zie niet meteen hoe dat zou kunnen... Bij **merkwaardige producten** zou je dat eventueel wel kunnen doen met vierkanten. Dat kan zeker **nuttig** zijn. Volgens mij is het ook niet goed om bij **zeer abstracte wiskunde visueel te maken**. Het is ook een leerproces om abstract te leren denken.

Hebt u al gehoord van algeblokken?

Nee, ik ken het niet. Voor ik zoiets zou uittesten zou ik er **thuis en met collega's eerst mee experimenteren**. Het grootste probleem bij dergelijke vernieuwingen is de **tijdsdruk**. Vaak zijn dergelijke leuke dingen **minder efficiënt** dan de huidige aanpak. Het **leerplan** zit nu al zeer vol. Het zou dus enkel mogelijk zijn voor remediëring/uitbreiding of in klassen waar meer tijd is.

Waarom kennen de meeste leerkrachten algeblokken niet?

Het gaat **goed zoals het nu gaat**. Het is niet nodig om het onnodig moeilijker te maken. Er is ook geen tijd voor om veel nieuwe dingen uit te testen.

Maken we het de leerlingen hierdoor niet te gemakkelijk?

Voorstellen, leren, helpen is deel van het leerkracht zijn. Visuele ondersteuning is een **hulpmiddel**, maar het mag **niet de overhand** nemen. Niet alle leerlingen zullen hier ook evenveel baat bij hebben. Niet iedereen leert visueel. Het is dus zeker belangrijk om een **combinatie van strategieën** te voorzien. Ik zou het zeker wel gebruiken in oefeningen en om stellingen te visualiseren in meetkunde.

Stelt u soms strategievragen in de les of op toetsen?

Ja, dat doen we vaak. Het wordt wel eerder mondeling tijdens de les gevraagd dan schriftelijk op een toets. Bij vraagstukken met een vergelijking volgen we een **vast stappenplan**. Bij bewijzen volgen we het bekende gegeven, te bewijzen en bewijs. Vaak is er ook ruimte voorzien om **te reflecteren en om antwoorden te controleren**. Er is in wiskunde zeker een nood aan **structuur**.

Hoelang geeft u al les en hebt u bepaalde veranderingen in het wiskundeonderwijs opgemerkt?

Ik heb twaalf jaar ervaring. Ik heb het gevoel dat **leerlingen vroeger beter konden leren**. We mochten ook **meer verwachten** van de leerlingen. We mochten **moeilijkere dingen** vragen. Nu denken ze veel minder zelf na. Er worden veel fouten gemaakt bij basiszaken, zoals omzetten. Leerlingen studeren voor een toets en **vergeten de leerstof achteraf**. Ik heb het gevoel dat ze minder voorbereid uit de lagere school komen dan vroeger.

Hoe staat u tegenover posters in de klas?

In het derde jaar gebruiken we enkele posters. Een voorwaarde hiervoor is natuurlijk wel dat er **vaste wiskundelokalen** zijn. We hebben er voor **de stelling van Pythagoras**, de stelling van **Thales** en voor **evenwijdige rechten en een snijlijn**. We krijgen deze posters van de uitgeverij Die Keure. Ze horen bij het handboek. Ik vind de posters handig, omdat je er altijd kan naar verwijzen. Ik zou een klas wel niet volhangen met afbeeldingen. Te veel prikkels zullen volgens mij een **negatief effect** hebben op het **leerproces**.

Gebruikt u wiskundespelletjes?

Ja, ik plan soms lessen in het eerste jaar moderne waar ze per vier via een doorschuifstelsel spelletjes spelen. Ik vind wel dat het **geen groot effect** heeft.

Waarom is wiskunde geen populair vak volgens u?

Meestal start de aversie wanneer wiskunde **moeilijker en abstracter** wordt. In de eerste graad is het vooral rekenwerk. In de tweede graad komen daar de functies bij. Hiervoor is meer begrip nodig. Er zijn natuurlijk ook andere redenen. Sommige leerlingen zijn **niet geïnteresseerd**. Het is een **abstract vak**, waar minder experimenten mogelijk zijn als we het vergelijken met vakken zoals fysica of chemie. Andere leerlingen haten wiskunde door slechte ervaringen uit het verleden.

Hoe leren leerlingen wiskunde het best?

Als eerste moeten ze hun **theorie** lezen. Definities schrijven is volgens mij een volgende stap. De laatste en belangrijkste stap is het maken en **opnieuw maken van oefeningen**. **Herhaling** is ook essentieel. Veel leerlingen beginnen pas de dag voor de toets, maar eigenlijk zouden ze dagelijks moeten herhalen. **Uitstelgedrag** is een groot probleem.

Wat zijn de 'best scorende' onderwerpen bij u?

In het eerste jaar zijn er geen zaken die eruit springen. In het tweede jaar is **congruentie moeilijk** voor sommigen. In het derde jaar zijn er minder definities, maar meer bewijzen. **Gelijkvormigheid**, de stelling van Pythagoras en statistiek zijn de betere onderwerpen. Functies zijn moeilijker. In het vierde jaar is **ruimte meetkunde een variabel onderwerp**. Sommige jaren is dat zeer goed, andere jaren veel minder. **Functies blijven moeilijk**. Om die reden proberen we de delen functie leer te spreiden over de verschillende trimesters. Zo komt er ook steeds herhaling aan te pas en hopen we dat de leerstof meer blijft hangen.

9.6 Bijlage 6: Mail met de pedagogische begeleider

Dag Astrid

Ik heb al heel veel klasbezoeken gedaan en stel vast dat het visuele aspect in de wiskundelessen **zich beperkt tot het gebruiken van grafieken (functie leer) en statistische voorstellingen, voornamelijk met de grafische rekenmachine en in heel wat mindere mate met geogebra of excel.**

In een eerste graad en in **de B-stroom zie ik soms ruimte figuren opduiken** (kubus, piramide, cilinder ...) of de leerkracht die zelf ruimte figuren meebrengt om de leerlingen bv. inhouden te laten schatten of vergelijken (flessen, melkblikjes, conservendozen). Maar om eerlijk te zijn, ik heb nog maar een paar lessen gezien waarin die zaken even ter sprake kwamen (dit op een totaal van 1000 lessen).

Veel verder gaat het echt niet. Ik vrees dat ik je hieromtrent dan ook niet veel meer kan zeggen.

Wellicht staan ze op dat vlak veel verder in het basisonderwijs.

Met vriendelijke groet

Geert Delaleeuw

9.7 Bijlage 7: foto's modellen in klaslokalen



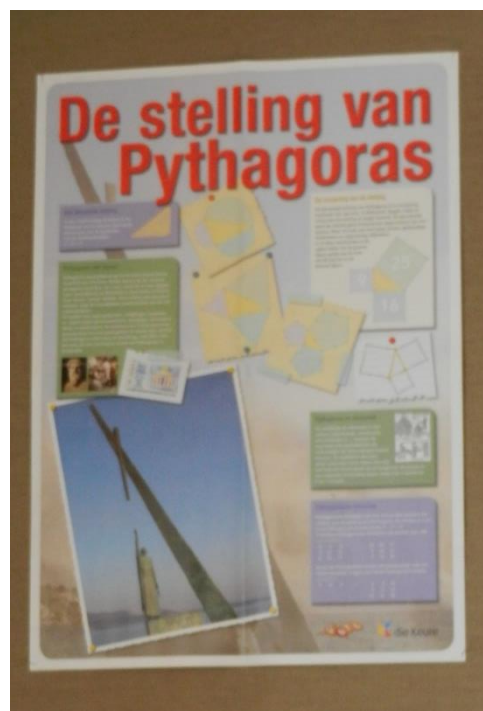
Figuur 53: Poster lokaal Willem Beeuwsaert



Figuur 54: Poster 2 lokaal Willem Beeuwsaert



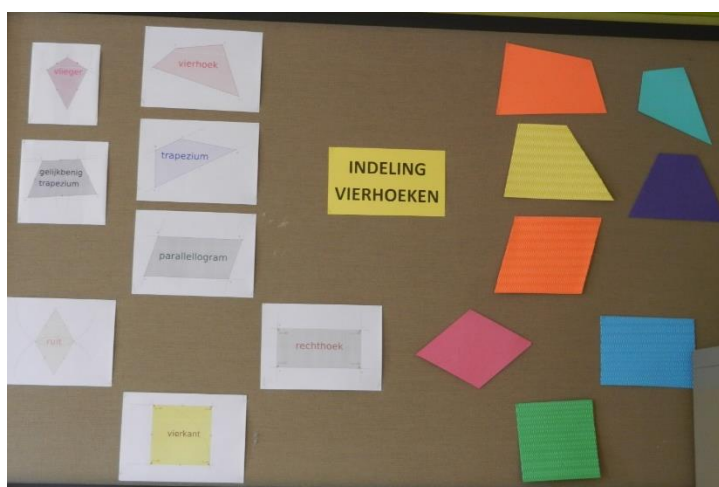
Figuur 55: Poster Ardoorie



Figuur 56: Poster Ardoorie



Figuur 57: Toren van Hanoi in Ardoorie



Figuur 58: Schema op prikbord (Willem Beeuwsaert)



Figuur 59: Schema op prikbord (Willem Beeuwsaert)



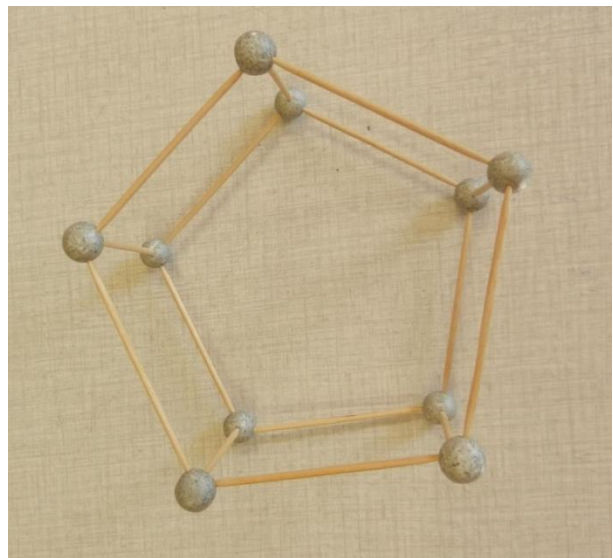
Figuur 61: Knex in Ardoorie



Figuur 60: Houten modellen (Willem Beeuwsaert)



Figuur 62: Gevel wiskundelokaal in Ardoorie



Figuur 65: Tandenstoker model (Willem Beeuwsaert)



Figuur 64: Model om aanzichten te leren (Willem Beeuwsaert)



Figuur 63: Houten modellen (Ardoorie)



Figuur 66: Wiskundekast Willem Beeuwsaert



Figuur 67: Transparante blokken voor ruimtelijk inzicht (Willem Beeuwsaert)

9.8 Bijlage 8: Verslag Tools 4 schools

Tools 4 Schools is een onderwijsbeurs voor leraren kleuter-, lager en eerste graad secundair onderwijs. Dit jaar was het centraal thema STE@M. Dat staat voor science, technology, engineering, arts en mathematics. Onderwijs voor de 21ste eeuw werd als uitgangspunt genomen.

Enkele interessante standen:

- WIA Educational is een organisatie die onderwijskundige toepassingen en technologieën beschikbaar stelt en ontwikkelt. Op de beurs stonden ze met een laserprinter waarmee je een naamkaartje op kon laten afmaken. In het onderwijs worden deze machines vooral in het basisonderwijs gebruikt. Er worden werkplekken gecreëerd waar leerlingen nieuwe technologieën kunnen uitproberen. Hun assortiment bestaat uit werkplekken met 3D-printers en scanners, snijplotters, programmeren in arduino's, Lego Education, SpaceClaim, Lasersnijders en meer. De apparaten zijn wel duur. Een BRM-laser kost zo'n 3000 euro. Vooral in Nederland kan je dat al in veel scholen terugvinden. De laatste jaren wordt dit ook populairder in Vlaanderen. In secundaire scholen wordt dit ook gebruikt, maar merkbaar wel minder vaak.
- Er waren ook heel wat standen over digitale borden. Een eerste was er een van Ergo Educo. Je kon er een nieuw soort interactief bord uittesten. Het was geen projectiescherm, maar een scherm waarvoor geen computeraansluiting nodig was. Je zou dus met een dergelijk bord geen computer in de klas meer nodig hebben. Een USB-stick kan rechtstreeks in het bord worden geplaatst. Je kan ook met twee tegelijk op het bord werken. Het heeft zeer veel toepassingen en extra gadgets, zoals een projectiecamera. Toch vond ik het bord wat te klein. (55" - 87") Zeker voor een vak als wiskunde heb je meer ruimte nodig om oefeningen op te noteren. Het heeft voor wiskunde volgens mij niet echt een meerwaarde. Op geogebra kan je natuurlijk

dan iets meer manipuleren, maar het creëren van een bestand is volgens mij iets onhandiger, omdat het allemaal via de touchscreen is.

Op de beurs stond Ergo Educo er enkel met het nieuwe interactieve smartboard. Op hun site kan je echter nog andere zaken bekijken.

Een tweede mogelijkheid die ik interessanter vind, is de eBeam. Het is een soort horizontale beamer die je op een whiteboard kan bevestigen en die het whiteboard interactief maakt. Niet tot op de hoogte van een echt smartboard, maar volgens mij hoeft dat niet altijd. Zo kan je de voordelen van een gewoon bord en een digitaal bord combineren.

Je kan alle borden leasen of huren voor €85 per maand.

Naast de borden kon je ook informatie krijgen over het gebruik van camera's in de klas. Documentenviewer Speechi is daar een voorbeeld van. Het is een oculair dat documenten, afbeeldingen... live kan projecteren. Zo kan je ook met tekeningen en antwoorden van leerlingen werken aan het bord. Ik zou dat zeker een meerwaarde vinden in mijn klas.

- Een andere stand met interactieve borden was van het bedrijf Vanerum. Dit vond ik zeer interessant, omdat het ging over smartboards met de grootte van een gewoon krijtbord. Voor het vak wiskunde is dat namelijk een groot probleem met de hedendaagse smartboards. Ze zijn te klein om volledige oefeningen op te schrijven en te laten staan. Vanerum heeft borden tot 135". Het is een whiteboard in combinatie met meerdere projectiegebieden waar je met verschillende leerlingen tegelijk op kunt werken. Persoonlijk vond ik dit het beste bord op de beurs.

- Het thema van de beurs was STEM. Er was dus heel wat materiaal voorzien voor dergelijke lessen. Toch viel het me op dat er weinig materiaal was voor de hogere jaren. Er was zeer veel beschikbaar voor de stimulatie van de wetenschappen in het lager onderwijs. Er was zeer speels en creatief materiaal zoals dat van creatool. Iedere kind wordt gestimuleerd om uitvinder te worden. Voor wiskunde had je de SMART-games. Hier zijn verschillende moeilijkheidsgraden in, maar alle games zijn ontworpen voor het lager onderwijs. De woordvoerders benadrukten wel dat de spelen ook uitdagend kunnen zijn voor leerlingen van de eerste en tweede graad secundair onderwijs. Toch leek mij vooral het ontwerp hier niet geschikt voor het secundair onderwijs. Enkel de IQ-reeks, waar visueel inzicht gestimuleerd wordt, vind ik wel zeer bruikbaar. Ik gebruikte het ook al eens tijdens mijn stage en dat viel zeker in de smaak.

Een uitzondering waren de robots waarmee je leerde programmeren. Hier kan je wel ver in gaan. Lego Mindstorms zijn een goed voorbeeld. Toch is Lego zeker niet de enige speler op de markt. De robots leken een centraal thema binnen STEM. Toch vraag ik mij af waar de verschillende onderdelen van STEM hierbij naar voren komen. Dit zou ons echter te ver leiden. Wij zijn op zoek naar de wiskundetoepassingen. Die vond ik niet meteen bij de robots.

- Een andere stand met schoolmateriaal was Bekius. Dat is een Nederlands bedrijf dat een groot assortiment aan didactisch materiaal, exclusief schoolblokken, levert. Opnieuw kreeg ik het gevoel dat het vooral bedoeld was voor het lager onderwijs. De boxen van Geosmart zijn heel leuk om de basis van geometrische figuren mee aan te leren. Het zou zeer handig zijn als ze dergelijke dozen ook zouden beschikbaar stellen op het niveau van het secundair onderwijs. Doorsnedes en dergelijke kunnen op die manier ook inactief met de leerlingen aangeleerd worden. Wiskunde visualiseren staat in de lagere school centraler dan in het secundair onderwijs. Getallen worden voorgesteld door blokken, stippen... Er bestaat ook heel wat spel materiaal voor leerlingen in het lager onderwijs. Zijn de leerlingen in het middelbaar daar niet meer in geïnteresseerd? Leren oudere leerlingen hier niet meer van bij? Het spel materiaal voor wiskunde speelt in op het visualiseren. Tangram, puzzelspelletjes, IQ-tests, Level 8... Is visualiseren minder belangrijk in het secundair onderwijs?

- Er was ook heel wat aandacht voor online platforms als Questi en Smartschool. Daar ga ik echter niet verder op in aangezien dat niets met mijn bachelorproef te maken heeft.

Ik kan besluiten dat ik de beurs zeer interessant vond. Zeer veel modellen voor het secundair onderwijs vond ik er wel niet. Juist het feit dat die afwezig waren, zorgt bij mij voor heel wat vragen. In het algemeen vond ik de info over de verschillende interactieve borden ook interessant. Zeker de borden van Vanerum lijken mij handig voor het vak wiskunde, waar we smartboarden nog niet vaak gebruiken. Zo kunnen we een tussenweg vinden tussen manipuleerbare modellen en digitale applets en afbeeldingen.

9.9 Bijlage 9: Voorbeeldenquête

Visuele wiskunde

Beste

Deze enquête stelt enkele vragen over visuele wiskunde in 2017-2018.

Het is een begrip dat heel ruim gezien kan worden.

Ik beschrijf het als alle middelen die de vorming van mentale beelden bij leerlingen kunnen verbeteren.

Het doel van deze enquête is het in beeld brengen van de manier waarop dit in de wiskundeklassen van de 1ste en 2de graad secundair onderwijs in 2017-2018 gebeurt.

De antwoorden van deze enquête worden anoniem verwerkt.

Alvast bedankt voor uw deelname.

Astrid De Vriendt

Wat is uw geslacht?

- ☐ Man
- ☐ Vrouw
- ☐ Anders: _____

In welke leerjaren geeft u les? (meerdere antwoorden mogelijk)

- ☐ 1ste graad 1ste leerjaar
- ☐ 1ste graad 2de leerjaar
- ☐ 2de graad 1ste leerjaar
- ☐ 2de graad 2de leerjaar

Hoelang geeft u al les?

- ☐ Ik studeer om wiskundeleerkracht te worden.
- ☐ 1-5 jaar
- ☐ 6-10
- ☐ 11-15
- ☐ 16-20
- ☐ 21-25
- ☐ 25-30
- ☐ > 30 jaar

Geeft u nog een ander vak naast wiskunde? Zo ja, welk(e) vak(ken)?

Jouw antwoord

Hoe vaak gebruikt u verschillende strategieën om tot een oplossing te komen?

	0	1	2	3	4	5	
Nooit	☐	☐	☐	☐	☐	☐	5 maal per les

Hoe belangrijk is beeldvorming van de te leren wiskunde in uw les?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Onbelangrijk	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	Zeer belangrijk

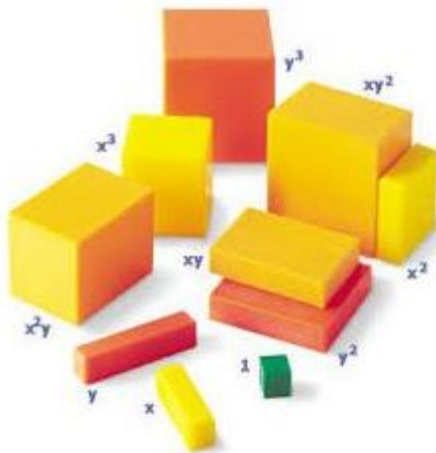
Stelling van Pythagoras



Hoe nuttig is bovenstaand model volgens u?

	1	2	3	4	5	
Nutteloos	☐	☐	☐	☐	☐	Zeer nuttig

Algeblokken



Kent u bovenstaand model (algeblokken)?

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ Ik heb er al over gehoord.

Hebt u algeblokken (zie bovenstaande afbeelding) al gebruikt in uw lessen?

- ☐ Ja
- ☐ Nee

Zou u de algeblokken gebruiken indien ze beschikbaar waren?

- ☐ Ja
- ☐ Nee

Welke visuele middelen gebruikt u? (Vul eventueel aan)

- ☐ Ruimtefiguren
- ☐ Gebaren
- ☐ Posters
- ☐ Spelletjes
- ☐ Geogebra
- ☐ Desmos
- ☐ Bordtekeningen
- ☐ Bordboeken
- ☐ Anders: _____

Waarom kiest u al dan niet voor de bovenstaande middelen?

Jouw antwoord _____

Maakte u de eventuele modellen zelf?

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ Ik beschik niet over dergelijke modellen.
- ☐ Anders: _____

Indien u de modellen niet zelf maakte, hoe kwamen ze dan bij u terecht?

- ☐ School kocht de modellen zelf aan.
- ☐ Een collega maakte de modellen.
- ☐ Leerlingen maakten de modellen.
- ☐ Ik maak de modellen zelf.
- ☐ Anders: _____

Kunt u de kosten voor het maken van deze modellen terugkrijgen van de school?

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ Ik maak zelf geen modellen.
- ☐ Anders: _____

Hoe vaak volgt u de opbouw van het handboek?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Nooit	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	Altijd

Waarom volgt u al dan niet de opbouw van het handboek?

Jouw antwoord

Wat kunnen volgens u redenen zijn waarom sommige leerlingen wiskunde niet graag doen?

Jouw antwoord

Voorbeeld

Wiskundeportfolio

Naam leerling

FOTO
LEERLING



2017-2018

NAAM: _____

STARTBEVRAGING

Vul aan met tien verschillende adjectieven:

- Wiskunde vind ik moeilijk.
- Wiskunde vind ik onlogisch.
- Wiskundelessen vind ik ok.
- Wiskunde leren vind ik knaght af van het HSGT.
- Theorie leren vind ik makkelyk.
- Oefeningen lezen vind ik leiden.
- Oefeningen maken vind ik niet meer leiden.
- Oefeningen opnieuw maken vind ik verrompeld.
- Toetsen maken vind ik stresserend.
- Oefeningen verbeteren vind ik leerrijke.

Plaats een kruisje op de schaal bij het overeenkomstige antwoord:

VRAAG 1: Ik ben goed in wiskunde.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☒	☐	☐	☐	☐	☐	Akkoord

zecht

VRAAG 2: Ik weet meestal waar ik fouten maak bij oefeningen/toetsen.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☒	☐	☐	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 3: Als ik het moeilijk heb, vraag ik de leerkracht altijd om uitleg.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☒	☐	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 4: Ik kan goed inschatten of ik de leerstof begrijp.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☒	☐	☒	☐	☐	☐	Akkoord

NAAM: _____

VRAAG 4: Ik haal goede resultaten voor wiskunde.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☒	☐	☐	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 5: Ik maak altijd een schets bij meetkunde-oefeningen.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☐	☒	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 6: Ik maak een stappenplan voor ik een oefening volledig uitwerk.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☒	☐	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 7: Ik geloof erin dat wanneer ik leer, ik goede resultaten voor wiskunde zal halen.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☒	☐	☐	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 8: Ik herhaal elke week mijn wiskunde.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☐	☒	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 9: Hoewel ik veel werk voor wiskunde, haal ik geen goede resultaten.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☒	☐	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 10: Ik gebruik veel kleur als ik wiskunde studeer.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☐	☐	☐	☒	☐	Akkoord

NAAM: _____

VRAAG 11: Als een oefening niet lukt, ga ik snel naar een volgende oefening.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☐	☐	☐	☐	☒	Akkoord

VRAAG 12: Ik werk graag zelfstandig.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☒	☐	☐	☐	☐	Akkoord

VRAAG 13: Ik help graag medeleerlingen die een oefening niet begrijpen.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☐	☐	☐	☐	☒	Akkoord

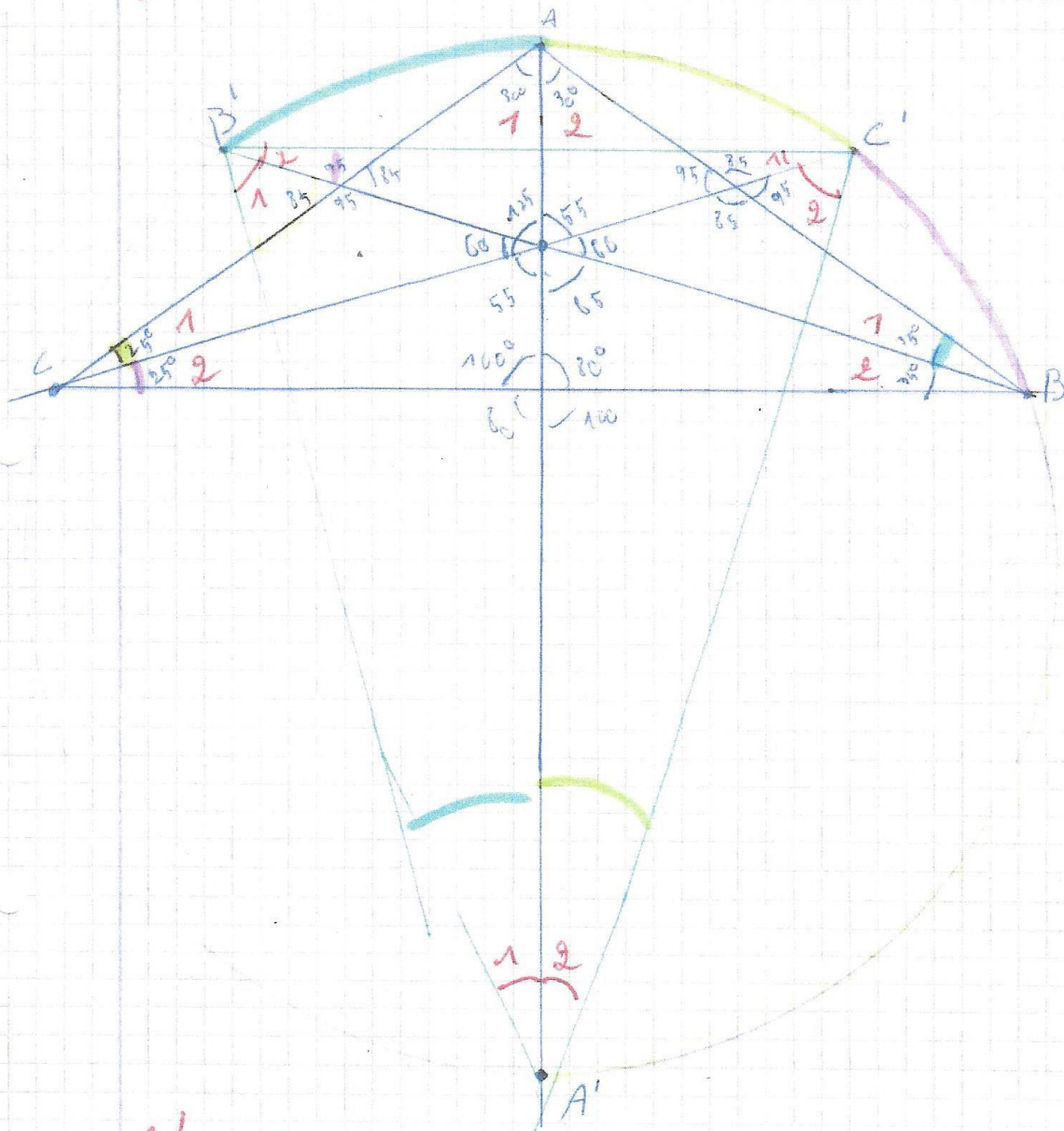
VRAAG 14: Ik werk graag in groep.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☐	☐	☐	☐	☒	Akkoord

VRAAG 15: Ik zoek vaak lang op een oefening, zonder dat ik een antwoord/methode vind.

	1	2	3	4	5	6	
Niet akkoord	☐	☐	☐	☐	☐	☒	Akkoord

25



$$\left. \begin{array}{l} A'_2 = C_1 = 25^\circ \\ A'_1 = B_1 = 35^\circ \end{array} \right\} A' = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} B'_1 = A_2 = 30^\circ \\ B'_2 = C_2 = 25^\circ \end{array} \right\} B' = 30^\circ + 25^\circ = 55^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} C' = 180^\circ - 60^\circ - 55^\circ \\ \quad \quad \quad = 65^\circ \end{array} \right\}$$

Toets de cirkel:

Naam leerling

Totaal: 6,5/20	
Theorie: 4,5/11	Praktijk: 2/9

Feedback leerkracht:

J kent de theorie niet genoeg. Dit kan je leren. Jammer...
TIP Schrijf een stappenplan uit voor het bepalen van de (beide) vergelijkingen van een cirkel. Maak oefeningen opnieuw.

Zelfreflectie:

1. Probleem: oef 21 pg 74. hoe moet ik de hoeken bereken
2. Probleem: '3 eigenschappen voluit' wat bedoelt u?
welke eigenschappen zijn dat?
3. Probleem:

Te verbeteren:

- Uitwerking algemene vergelijking van een cirkel tot cartesische vergelijking van een cirkel.
- Bereken de hoeken
- A, B, C, D opnieuw maken (zie toets): zie oefeningen klas voor methode!

Remediëring

- Oef 21 p. 74
- Oef 25 p. 75
- Oef 2 c) p. 84
- Oef 6 d) p. 84

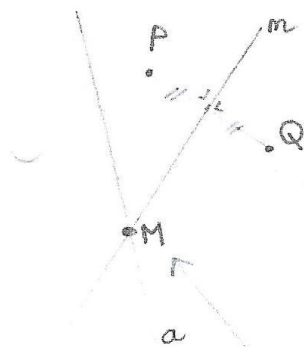
Theorie

- 3 eigenschappen voluit
- Bewijs middelpunts- en omtrekshoek
- Bewijs koordenwielhoek

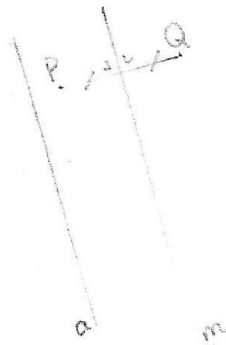
Oef 1.

We zoeken cirkel waarvan het middelpunt op een gegeven rechte a ligt en door twee punten P en Q gaat.

Als we een cirkel door 2 punten willen laten gaan, dan moet het middelpunt van die cirkel op de middelloodlijn van die twee punten liggen.



Optie 1: $a \perp PQ$
 $\perp$ mogelijk
 middelpunt M
 (ligt op a en op PQ)



Optie 2: $a \perp PQ$
 $m \parallel a$
 Er zijn geen
 snijpunten van a en
 m , dus geen mogelijke
 cirkels.



Optie 3: $a \perp PQ$
 $m \neq a$
 ∞ veel oplossingen
 heel veel punten
 voldoen. liggen
 op a en m

→ zie geogebra boek!

Oef 34 (stappenplan)

raakt in punt a : loodlijn in A op rechte a
 = middelloodlijn gevraagde cirkel

gaat door P en A : M ligt op l_{el} van $[PA]$

{ Mis het snijpunt van loodlijn en $l_{el}[PA]$.
 { straal $= |MA| = |MP|$

OEFENINGENREEKS VERGELIJKING CIRKELS

BASIS	REMEDIËRING	UITBREIDING
1 a ✓ c	1 b (lees p.79-82 opnieuw)	1 d
2 b ✓ d ✓	2 a c e	
3 b ✓	3 a	3 c
4 pg 84		5 (TIP: $co(M) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$)
6 c ✓	6 a b d	6 f g h
7 c OK e	7 a b d f	
8 b	8 a	8 c
10 b	10 d	10 a 11 a 14

TIP: Een stappenplan maken bij de verschillende situaties kan helpen!

TIP: Als je niet weet hoe je aan een oefening moet beginnen, begin dan eens met een schets...
Wat weet ik? Wat moet ik zoeken? Welke formules ken ik?

Opmerkingen/vragen/frustraties:

Deze oefeningen begrijp ik echt niet:

6c, 10b (zie ggbtrek)

10 Literatuurlijst

- Alibali, M. W., & Nathan, M. (2011). *Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence from learners' and Teachers' Gestures*. London: Routledge.
- Beunk, G. (2014). Hoofd, hart en handen. In P. Murre, B. de Muynck, & H. Vermeulen, *In Vitale idealen, voorbeeldige praktijken II* (pp. 90-105). Amsterdam: Buijten & Schipperheijn.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, inspiring Messages and Innovative Teaching*. Chappaqua, NY: Jossey-Bass/Wiley.
- Boaler, J. (2017, Januari 5). *Mistakes 'grow' your brain*. Opgehaald van Youcubed: <https://www.youcubed.org/resource/brain-science/>
- Boaler, J., Chen, L., Williams, C., & Cordero. (2016, oktober 12). *Seeing as understanding: The importance of Visual Mathematics for our brain and Learning*. Opgehaald van Journal of Applied & Computational Mathematics: <https://www.omicsonline.org/open-access/seeing-as-understanding-the-importance-of-visual-mathematics-for-our-brain-and-learning-2168-9679-1000325.php?aid=80807>
- Brentwood (Regisseur). (2009). *Pythagorean theorem water demo* [Film].
- Claes, B. (2016). *Ijsbergdidactiek*. Opgehaald van Leerstudio: <http://www.leerstudio.be/leerstudio/ijsbergdidactiek/>
- De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). Het succes van de nieuwe wiskunde. *Karakter*, 16-20.
- De Ridder, I., & Vanwalleghem, S. (2010). *Realistisch rekenen in de klas. Een studie naar het handelen van leerkrachten in het vierde leerjaar*. Gent: Universiteit Gent.
- Depaepe, M. (2012). *In Between Educationalization and appropriation: selected writing on the History of Modern Educational Systems*. Leuven: Leuven University Press.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gerjets, P., & Kirschner, P. (2009). Learning from multimedia and hypermedia. In Balacheff, *Technology-enhanced learning*. New York: NY: Springer.
- Gravemeijer, K. (1993). *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*. Utrecht: Technipress.
- Hand2Mind. (z.j.). *Algeblocks deluxe classroom kit*. Opgehaald van Hand 2 mind: <http://www.hand2mind.com/item/algeblocks-deluxe-classroom-kit/9240>
- Jacobs, B., & Steels, L. (2017, mei 12). *Rekenen onder de ijsberg*. Opgehaald van Go! Onderwijs van de Vlaamse Gemeenschap: <http://www.g-o.be/rekenen-onder-de-ijsberg/>
- Kiefer, M., & Trumpp, N. M. (2012). *Embodiment theory and education: the foundations of cognition in perception and action*. Ulm: Elsevier.
- KNAW. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool: analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse akademie van weenschappen.
- KU Leuven. (2015, mei 28). *Peiling wiskunde in de derde graad secundair onderwijs*. Opgehaald van Onderwijs Vlaanderen: <http://onderwijs.vlaanderen.be/nl/peilingsresultaten-wiskunde-vragen-om-ambitieuze-aanpak>
- KU Leuven. (2017, augustus 17). *Metacognitie*. Opgehaald van KU Leuven: <https://www.kuleuven.be/onderwijs/ken-je-studenten/leren-van-studenten/metacognitie>

- Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Dauoust, C., & Murray, A. (2015). *What makes mathematics Manipulatives effective? Lessons from cognitive science and montessori education*. Boston: Sage.
- MathBits. (z.j.). *Working with algebratiles*. Opgehaald van Mathbits:
<https://mathbits.com/MathBits/AlgebraTiles/AlgebraTiles/AlgebraTiles.html>
- Mayer. (2001). *Multimedia Learning*. New York: Cambridge University Press.
- Mayer, R. E. (2014). Multimedia instruction. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen, & M. J. Bishop, *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (pp. 385-399). New York: NY: Springer.
- Montessori. (1921). *De methode montessori. Zelfopvoeding van het Jonge Kind*. Amsterdam: J. Ploegsma.
- Montessori, M., George, A., & Holmes, H. (1912). *The Monessori method*. New York: Frederick A. Stokes Company.
- Moyer-Packenham, P. S. (2001). *Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics*. Utah: DigitalCommons.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York: NY: Holt, Rinehart & Winston.
- Rivera, F. (2011). *Toward a Visually-oriented school mathematics curriculum*. New York: Springer.
- Rogers, A. (2014). *The base of the iceberg: Informal learning and its impact on formal and*. Berlin: Barbare Budrich Publishers.
- Speld, N. (2016, Oktober s.d.). *Visualisation and the Concrete Pictorial Abstract Approach*. Opgehaald van Judy Hornigold.uk:
<http://www.speld.org.nz/downloads/1%20Visualisation%20&%20the%20Concrete%20Pictorial%20Abstract%20Approach.pptx>
- Sriraman, B., & Wu, K. (2014). Embodied Cognition. In S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 207-209). Dordrecht: Springer.
- Streefland, L. (1991). *Mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer.
- Sweller, J. (2005). Implications of cognitive load theory for multimedia learning. In R. E. Mayer, *Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 19-30). New York: Cambridge University Press.
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs.
- Treffers, A., & de Goeij, E. (2004). Vierkant tegen zelfstandig werken. *Panama-Post*, 8-13.
- Universiteit Gent. (2013, december 5). *Pisa 2012*. Opgehaald van Pisa:
<http://www.pisa.ugent.be/nl/resultaten/vlaamse-publicaties/2012>
- Universiteit Gent. (2015). *Wiskundige geletterdheid: overzicht van de eerste Vlaamse resultaten van Pisa 2015*. Gent: Academic press.
- Universiteit Gent. (2017, mei 23). *PISA 2015*. Opgehaald van PISA Ugent:
<http://www.pisa.ugent.be/nl/resultaten/vlaamse-publicaties/2015>
- Valcke, M. (2005). *Onderwijskunde als ontwerpwetenschap*. Gent: Academia Press.
- Van der Leij, L. (2013). *Fysieke versus virtuele manipulatieven via het digibord*. Twente: Universiteit Twente.
- van Gelder, L., Wijdeveld, E., Goffree, F., & Krooshof, G. (1968). *Moderne wiskunde en het basisonderwijs*. . Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Van Ruyskenvelde, S. (2018). *Geschiedenis van onderwijs, opvoeding en vorming*. Kortrijk: Acco.

- Verschaffel, L. (2005). All you wanted to know about 'mathematic education' in Flanders, but were afraid to ask. In E. de Goeij, & R. Keijzer, *Rekenen-wiskunde als rijke bron*. (pp. 65-85). Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Vincent Leermiddelen. (z.j.). *wiskunde*. Opgehaald van Vincent Leermiddelen:
<http://www.leermiddelen.be/nl/wiskunde>
- Vlaamse overheid. (2017, oktober 1). *Alle vestigingsplaatsen met methode montessori*. Opgehaald van Onderwijs vlaanderen: <https://data-onderwijs.vlaanderen.be/onderwijsaanbod/lijs.aspx?methode=03&tekst=Montessori>
- Webb, D. C. (2014). Blooms taxonomy in mathematics education. In S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 63-67). Dordrecht: Springer Science.



Campus Torhout
Sint-Jozefstraat 1
8820 TORHOUT
T 050 23 10 30

