



Faculteit Wetenschappen
Departement Fysica

Statistische fysica van economische ongelijkheid en segregatie

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN MASTER IN DE FYSICA

Auteur:

Lennart Fernandes

Promotor:

Prof. Dr. Jacques Tempere



Academiejaar 2018-2019

Abstract

The distribution of wealth and income in society has been the subject of study for many years. These distributions are generally exponential for the vast majority of people, while displaying robust power law behaviour for the wealthy elite. The basic assumptions giving rise to the exponential Boltzmann law for the distribution of energy in many-particle physical systems also hold for simplified models of economic transactions in a large population. The development of kinetic exchange models has been a primary focus of econophysics since the 1990s. A variety of refinements such as saving propensity and taxation give rise to deviations from the Boltzmann law, both increasing and decreasing inequality.

Segregation is another classic topic in economic research. Thomas Schelling showed in 1971 that agents belonging to one of two groups on a two-dimensional lattice have a tendency to segregate, even when individual preferences are highly tolerant towards members of different groups in their immediate neighbourhood. The macroscopic configuration undergoes a sharp phase transition to desegregation at a non-trivial value of the tolerance. The Schelling model has physical analogues in clustering and the famous Ising model of ferromagnets. It can be expanded to finite temperature, where thermal fluctuations are interpreted as social tolerance or trouble leading to moves into non-optimal sites.

In the present work, several models of kinetic exchange are adapted to a 2D lattice in which agents interact locally with their nearest neighbours. The emerging macroscopical dynamics are diffusive with exponent $\alpha \approx 1$. The steady state still follows the Boltzmann distribution. A Hamiltonian is proposed to favor segregation on the basis of a continuous variable like wealth. This mechanism prevents the lattice from reaching Boltzmann equilibrium through kinetic exchanges, instead reaching a steady state in which inequality is dramatically increased. This is explained by the fact that poor agents no longer interact with those of higher wealth, and therefore have no access to the vast portion of wealth in the economy.

The spatial separation of classes also magnifies the distinction between local and global mechanisms of combatting inequality. Inequality still decreases with the addition of a uniform saving factor, but nonetheless stays higher than in non-localized models. However, a small redistributive tax suffices to nullify the inequality caused by segregation. When thermal fluctuations are added, we observe a sharp phase transition to lower segregation and inequality at a critical temperature T_C . We show this is fundamentally related to a sudden change of the distribution in the wealthy elite.

Dankwoord

Aan het begin van deze thesis -en het einde van vijf mooie jaren- verdienen een aantal mensen een woord van dank. In de eerste plaats wil ik mijn promotor, professor Jacques Tempere, bedanken om me dit interessante onderwerp aan te bieden. Ik heb veel geleerd uit onze besprekingen, en kreeg voor ieder antwoord steeds twee nieuwe vragen. Zonder zijn ideeën en onafgebroken enthousiasme was dit werk niet geworden wat het is. Ook professor Michiel Wouters wil ik bedanken voor enkele nuttige suggesties.

Verder dank ik de Algemene Directie Statistiek België (Statbel) voor het bereidwillig bezorgen van meer gedetailleerde gegevens omtrent de Belgische inkomensverdeling.

During my final year, I had the opportunity of spending a semester on Erasmus exchange at Sorbonne Université. The courses I attended in the Physics of Complex Systems programme were not only enriching but have proven particularly useful for completing this thesis. I could not have undertaken this adventure without the kind help and guidance of professor Milorad Milosevic. I am grateful for all the people I had the pleasure of meeting. Thank you all for your contagious *joie de vivre* and for making these 5 months in Paris the time of my life!

Ik ben veel dank verschuldigd aan mijn ouders, grootouders en broer Vincent voor alle steun die ze mij hebben geboden tijdens deze studie en erbuiten, en voor het - onder lichte dwang - nalezen van een voorlopige versie van dit werk. Ook mijn vrienden binnen en buiten de universiteit mogen in deze lijst niet ontbreken. Tot slot wil ik mijn vriendin Marjan bedanken om er de voorbije jaren altijd voor mij te zijn, mijn enthousiasme te delen en steeds voor de nodige afleiding te zorgen.

Lennart Fernandes,
27 mei 2019

Inhoudsopgave

Inleiding	4
I Achtergrond	6
1 Rijkdom en ongelijkheid	7
1.1 Introductie	7
1.2 De Boltzmann-verdeling en economische interacties	8
1.3 Exponentiële staarten en machtswetten	9
1.4 Empirische verdeling van inkomen en kapitaal	11
1.5 Rijkdom, geld en kapitaal	15
1.6 De Gini-index als maat voor ongelijkheid	15
2 Segregatie	17
2.1 Residentiële segregatie	17
2.2 Segregatie in netwerken	20
2.3 Het meten van segregatie	22
II Agent-gebaseerde modellen	25
3 Kinetische modellen voor financiële transacties	26
3.1 Uitwisselen zonder sparen	27
3.2 Uitwisselen met vaste spaarfactor	28
3.3 Uitwisselen met uniform verdeelde spaarfactor	33
3.4 Herverdelende belasting	37
4 Modellen voor spontane segregatie	40
4.1 Roostermodellen	40
4.2 Het Schelling-model	42
4.3 Het Ising-model en thermische fluctuaties	49
5 Segregatie in kinetische uitwisselingsmodellen	53
5.1 Kinetische uitwisselingen op een rooster	53
5.2 Segregatie op basis van rijkdom	58
5.3 Dynamica en evenwicht van de segregatie-Hamiltoniaan	60
5.4 Kinetische uitwisselingen en segregatie gecombineerd	64
Besluit	76

Bibliografie	79
A Het Metropolis-Hastings algoritme	83
B Matlab-implementaties	85
B.1 Kinetische uitwisselingsmodellen	85
B.2 Schelling-model	86
B.3 Kinetische uitwisseling op een rooster	88
B.4 Segregatie op basis van rijkdom	88
B.5 Kinetische uitwisselingen en segregatie gecombineerd	89

Inleiding

De verdeling van rijkdom is in elke samenleving een relevant gegeven. Economische ongelijkheid en armoede liggen niet zelden aan de grond van maatschappelijke spanningen. De robuuste statistische eigenschappen van inkomens- en kapitaalverdelingen hebben de laatste decennia ook de aandacht van de exacte wetenschappen weten te vangen. Inmiddels vormt dit onderwerp één van de centrale onderzoeksthema's in het domein van de *econofysica**. Geïnspireerd door de gelijkenis tussen economische verdelingen en de Boltzmann-verdeling voor de energie van thermische systemen, worden sinds de jaren '90 modellen voor de uitwisseling van rijkdom voorgesteld naar analogie met de botsingen van deeltjes in een ideaal gas. Wegens de benadering van de statistische eigenschappen startend vanuit het gedrag van een groot aantal individuele agenten, spreekt men in deze context ook over *agent-based* of agent-gebaseerde modellen (ABM).

Segregatie, de grootschalige scheiding van bevolkingsgroepen, is een ander fenomeen met een lange onderzoekstraditie in de sociologie en economie. Thomas Schelling ontwikkelde in 1971 een eerste computationeel model waarin abstractie wordt gemaakt van onderliggende oorzaken, en grootschalige segregatie in een tweedimensionaal rooster voorkomt als macroscopisch gevolg van microscopische beslissingen. Ook dit onderzoeksthema vertoont sterke gelijkenissen met fysische systemen zoals het Ising-model voor ferromagneten.

In dit werk doen we een poging om de uitgebreide literatuur over beide thema's te combineren, en de twee fenomenen in één model te gieten. Het spreekt voor zich dat de beschrijving van enigszins realistische systemen aanleiding geeft tot een quasi eindeloze reeks verfijningen en bijkomende parameters. De vereenvoudigde modellen in dit werk worden dus best met enige voorzichtigheid geïnterpreteerd.



©SMBC Comics

* Over het moeilijke huwelijk tussen statistische fysica en sociale wetenschappen valt veel te vertellen. De bijdrage van de econofysica aan economische vraagstukken staat na 30 jaar nog steeds ter discussie^[1].

Doelstellingen

Het onderwerp van deze thesis is het effect van segregatie in kinetische uitwisselingsmodellen. We onderzoeken hoe de statistische verdeling van rijkdom, en de daaruit volgende ongelijkheid, wijzigt wanneer de economie wordt gesegregeerd op basis van rijkdom. Een dergelijke volledig gekoppelde beschrijving van uitwisselingen en bewegende agenten wordt op het moment van schrijven niet in de literatuur teruggevonden. Concreet stellen we volgende onderzoeksvragen:

- Hoe verandert de dynamica en evenwichtstoestand van bestaande modellen voor kinetische uitwisselingen wanneer interacties worden beperkt tot economische agenten en hun naaste naburen in een tweedimensionaal rooster?
- Kan men, steunend op de bestaande modellen voor etnische segregatie, een mechanisme opstellen dat segregatie op basis van rijkdom teweegbrengt?
- Wat is het effect van het segregatiemechanisme op de evenwichtsverdeling van rijkdom in een eenvoudig uitwisselingsmodel?
- Hoe wijzigt segregatie het effect van verfijningen zoals spaargedrag en herverdelende belastingen op de ongelijkheid in het uitwisselingsmodel?
- Kunnen we, naar analogie met magnetische modellen, onzekerheid toevoegen in de vorm van thermische fluctuaties?
- Hoe verlopen de ongelijkheid en segregatie als functie van de parameters van het model, en zijn hierin faseovergangen te vinden?

Opbouw

In het eerste deel (Hoofdstukken 1 en 2) worden economische ongelijkheid en segregatie als maatschappelijke verschijnselen geïntroduceerd. We illustreren beide fenomenen met empirische data, en bespreken de grootheden waarmee ze kunnen worden gekwantificeerd.

In Hoofdstuk 3 wordt de modellering van financiële uitwisselingen behandeld. Startend van een eenvoudig model, geïnspireerd op elastische botsingen in een ideaal gas, wordt uitgezocht welke verfijningen aanleiding kunnen geven hogere of lagere ongelijkheid en verschillende regimes in de statistische verdeling van rijkdom. Hoofdstuk 4 is gewijd aan computationele modellen voor segregatie. We bestuderen het Schelling-model en de link met het Ising-model voor ferromagneten. In het bijzonder focussen we op faseovergangen in functie van individuele voorkeuren en stochastische fluctuaties.

In Hoofdstuk 5 komen we tot het uiteindelijke doel van deze thesis. De kinetische uitwisselingsmodellen worden uitgebreid naar een tweedimensionaal rooster met lokale interacties. Steunend op de bestaande literatuur voor segregatie in discrete groepen, wordt een mechanisme voorgesteld om segregatie te genereren op basis van een continue variabele zoals rijkdom. We combineren het kinetische uitwisselingsmodel en het segregatiemechanisme, en bestuderen hoe bestaande verfijningen van het uitwisselingsmodel wijzigen onder invloed van segregatie. We breiden het segregatiemechanisme ook uit met thermische fluctuaties, en onderzoeken hun invloed op de ongelijkheid en de segregatie.

Deel I

Achtergrond

Hoofdstuk 1

Rijkdom en ongelijkheid

*“Some is rich, and some is poor
And that’s the way the world is
But I don’t believe in laying back
Sayin’ how bad your luck is”*

– Joe Strummer

1.1 Introductie

De systematische studie van de verdeling van rijkdom begint wellicht in 1897 bij de Italiaanse econoom Vilfredo Pareto. In zijn *Cours d’Économie Politique*^[2] publiceerde Pareto voor het eerst de bevinding dat de individuele inkomens en kapitalen in een samenleving niet Gaussisch of zelfs symmetrisch verdeeld zijn rond een gemiddelde, maar een aanzienlijke ongelijkheid vertonen. Steunend op uiteenlopende statistieken gaande van 15e eeuwse belastingsaangiften uit Augsburg tot 19e eeuwse huurinkomsten in Parijs, vond hij in het bijzonder dat de waarschijnlijkheidsverdeling van hoge inkomens en kapitalen een machtswet volgt. Dit is de inmiddels naar hem vernoemde *Pareto*-verdeling,

$$P(m) \sim m^{-(1+\nu)}, \quad (1.1)$$

waarin de Pareto-exponent ν aangeeft hoe snel de verdeling afneemt naarmate m naar oneindig nadert. Hoe lager de exponent, hoe dikker de staart van de verdeling, hoe meer kapitaal of inkomen geconcentreerd is bij een rijke elite. Pareto dacht een universele wet te hebben ontdekt, en was gedesillusioneerd door de onafwendbaarheid van ongelijkheid en armoede. In de woorden van Benoit Mandelbrot:

Society was not a “social pyramid” with the proportion of rich to poor sloping gently from one class to the next. Instead, it was more of a “social arrow”-very fat at the bottom where the mass of men live, and very thin at the top where sit the wealthy elite. Nor was this effect by chance; the data did not remotely fit a bell curve, as one would expect if wealth were distributed randomly. It is a social law, he wrote: something “in the nature of man.”^[3]

Pareto's bevindingen en politieke interpretaties worden tegenwoordig dan wel met de nodige scepsis benaderd, niettemin blijkt er inderdaad een universaliteit uit de waargenomen verdelingen van inkomen en kapitaal. Onderzoek van steeds beter beschikbare data doorheen de twintigste eeuw bevestigde het machtswet-regime, maar enkel in de limiet van grote inkomens en kapitalen^[4;5;6]. De lagere economische klasse, die typisch de grote massa bevat, blijkt beter beschreven door een staart van exponentiële of lognormale vorm. De lognormale verdeling werd historisch het meeste gebruikt door economen, terwijl in meer recente literatuur de exponentiële vorm de voorkeur geniet. De meeste waargenomen verdelingen worden goed beschreven door het volgende voorschrift^[6]:

$$P(m) \sim \begin{cases} m^\gamma \exp\{-m/\theta\} & m < m_c, \\ m^{-(1+\nu)} & m > m_c. \end{cases} \quad (1.2)$$

Hierin is de kritische waarde m_c de overgang tussen het exponentiële en het Pareto-regime. De schalingsfactor θ werd gekozen naar analogie met de thermische Boltzmann-verdeling voor de energie van een fysisch systeem. De geldigheid van deze formule wordt in Sectie 1.4 besproken aan de hand van enkele voorbeelden. Nu is echter een goed moment om dieper in te gaan op de rol van statistische fysica in de economie. Welke aanspraak heeft Boltzmann op de beschrijving van menselijk gedrag?

1.2 De Boltzmann-verdeling en economische interacties

In de vorige sectie werd de exponentiële verdeling geïntroduceerd. De gelijkenis tussen deze verdeling en de Boltzmann-distributie, die optreedt als de waarschijnlijkheidsverdeling voor de energie van deeltjes in een fysisch systeem, is een eerste hint dat ook de onderliggende dynamica gelijkenissen vertoont. In deze sectie tonen we aan hoe een eenvoudige economie inderdaad kan worden gemodelleerd naar het evenbeeld van een thermodynamisch systeem.

De Boltzmann-verdeling kan op verschillende manieren worden afgeleid. We kiezen hier voor een argumentatie die in haar eenvoud de universaliteit van het resultaat benadrukt^[7;8]. Beschouw een systeem bestaande uit een groot aantal deeltjes $\{i\}$ van eenzelfde soort. Elk deeltje bezit een hoeveelheid m_i van een bepaalde grootheid. De deeltjes bewegen ongeordend en komen op willekeurige momenten met elkaar in aanraking, waarbij willekeurige hoeveelheden m worden uitgewisseld. In de statistische fysica gaat het hier typisch over gasdeeltjes die een kinetische energie bezitten, maar het kan evenzeer een verzameling mensen zijn die elk een hoeveelheid geld bezitten en onderling transacties uitvoeren. De enige voorwaarden zijn dat geen enkel deeltje een negatieve of oneindige waarde kan hebben, en dat de som over alle deeltjes behouden blijft:

$$\begin{cases} 0 \leq m_i < \infty, \\ \sum m_i = M. \end{cases} \quad (1.3)$$

De laatste voorwaarde, die uitdrukt dat het systeem gesloten is, impliceert dat een toename van m_i ten koste gaat van alle andere deeltjes. Buiten dit behoud van totale M zijn de deeltjes onafhankelijk: de waarde van m_i heeft geen invloed op die van $m_{j \neq i}$.

Ten slotte wordt aangenomen dat het systeem *ergodisch* is, d.w.z. dat alle microscopische configuraties $\{m_i\}$ na lange tijd met eenzelfde waarschijnlijkheid worden gerealiseerd.

Door de frequente en willekeurige botsingen zullen de individuele m_i sterk fluctueren, maar gemiddeld* volgen ze dezelfde waarschijnlijkheidsverdeling $P(m)$. Na verloop van tijd veronderstellen we dat een evenwichtstoestand bereikt wordt. Om deze te achterhalen, beschouwen we twee deeltjes in het systeem. De kans dat het eerste deeltje een waarde m_1 heeft is $P(m_1)$. De kans om het tweede deeltje met waarde m_2 terug te vinden is $P(m_2)$. Doordat de deeltjes niet gecorreleerd zijn, is de gecombineerde waarschijnlijkheid $P(m_1)P(m_2)$. We beschouwen nu alle mogelijke manieren waarop de twee deeltjes hun gezamenlijk behouden waarde $m_1 + m_2$ kunnen delen. In elke configuratie bevat de rest van het systeem $M - m_1 - m_2$. Omwille van de ergodiciteit zijn al deze configuraties even waarschijnlijk, waardoor de gecombineerde kans $P(m_1)P(m_2)$ slechts een functie van de som $m_1 + m_2$ kan zijn:

$$P(m_1)P(m_2) = f(m_1 + m_2). \quad (1.4)$$

Hieraan voldoet enkel de exponentiële functie, die dalend moet zijn om aan voorwaarde (1.3) te voldoen:

$$P(m) = \frac{1}{\theta} \exp\{-m/\theta\}. \quad (1.5)$$

De voorfactor volgt uit de normalisatie van de kansverdeling en de effectieve temperatuur θ is gelijk aan het gemiddelde $\int mP(m)dm$. De Boltzmann-verdeling (1.5) is de hoeksteen van de klassieke statistische fysica, maar blijkt te volgen uit erg algemene veronderstellingen.

1.3 Exponentiële staarten en machtswetten

Exponentiële functies en machtswetten of *power laws* zijn beiden monotoon dalende functies, zoals weergegeven in het linkerpaneel van Figuur 1.1. Machtsfuncties divergeren in de oorsprong[†] terwijl exponentiëlen hier eindig zijn. Hun limietgedrag voor $x \rightarrow +\infty$, het relevante regime in de hier beschouwde verdelingen, lijkt op het eerste zicht echter gelijkaardig. Aangezien zowel de gevolgen als de onderliggende processen van deze functies fundamenteel verschillen, is het nuttig kort op in te gaan op de eigenschappen van beide verdelingen[‡]. Uit de log-lineaire en log-log weergaven van Figuur 1.1 blijkt het gelijkaardige verloop vooral een artefact van de lineaire schaal waarop we gewoon zijn te kijken. De exponentiële staart vervalt veel sneller dan de machtswet. De staart van de machtswet omvat een groter aandeel van de totale waarschijnlijkheid, waardoor hoge waarden en uitschieters sterker bijdragen. De exponentiële functie is lineair in log-lineaire weergave; de machtswet is lineair in log-log weergave. Het logaritme van beide functievoorschriften levert immers:

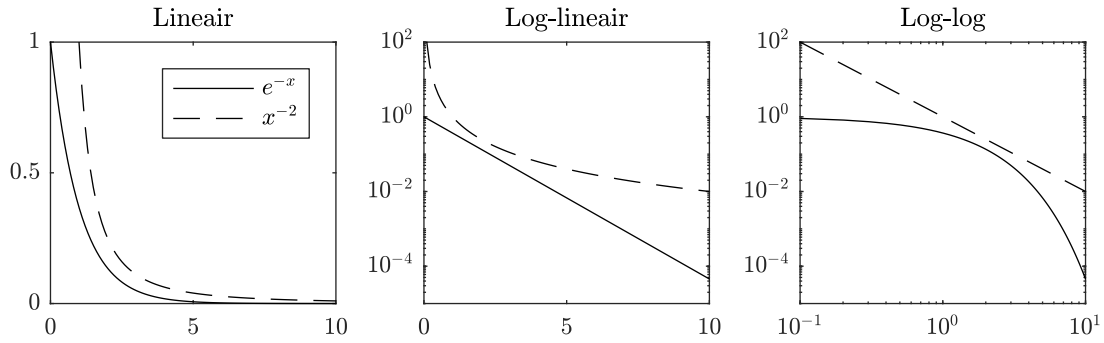
$$\begin{aligned} y = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} &\Rightarrow \log y = -\log \theta - x/\theta, \\ y = Cx^{-(1+\nu)} &\Rightarrow \log y = \log C - (1 + \nu) \log x. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Uit de richtingscoëfficiënt haalt men eenvoudig de parameters θ en ν .

* Het ensemble-gemiddelde is te interpreteren als een gemiddelde over alle mogelijke configuraties van het systeem.

† Om deze reden zijn distributies met een machtswet gedefinieerd vanaf een bepaalde x_{min} . Normalisatie van de Pareto-verdeling in (1.2) levert dan een voorfactor $C = \nu x_{min}^\nu$.

‡ Een frappant voorbeeld van de verwarring tussen deze twee functies kan worden gevonden in de Nederlandse editie van Thomas Piketty's *Kapitaal in de 21ste eeuw*, waarin "fonction puissance" foutief wordt vertaald als "gewoon een exponentiële functie".^[9] p. 433



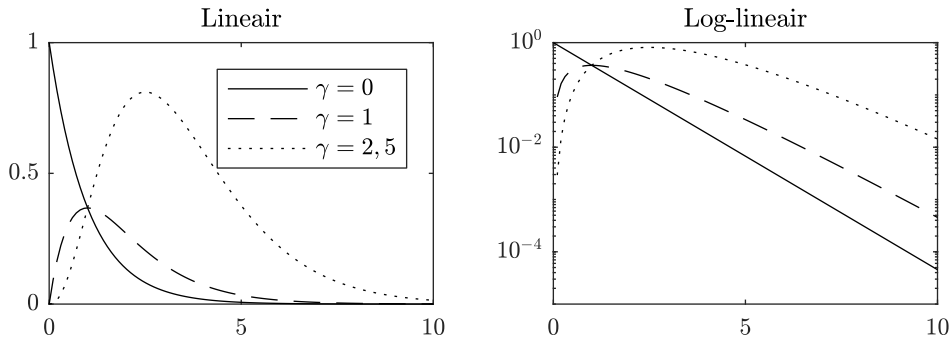
Figuur 1.1 – De exponentiële functie en machtsfunctie, weergegeven op verschillende schalen.

Naast de Boltzmann-distributie treedt de exponentiële verdeling op in een groot aantal stochastische processen. Relevant voor dit werk is de link met additieve processen, waarvan de uitwisseling van energie tussen deeltjes in thermisch evenwicht slechts één voorbeeld is. Een additief stochastisch proces voldoet algemeen aan

$$m^{(t+1)} = m^{(t)} + X. \quad (1.7)$$

Hierin is X een stochastische variabele. De toename of afname in een tijdsstap is onafhankelijk van de huidige waarde. Een voorbeeld hiervan is inkomen uit arbeid: een maandelijks loon schaalt niet met de spaarrekening van de arbeider. Dit verklaart het exponentiële regime voor lage inkomens in vergelijking (1.2).

We merken nog op dat de factor m^γ in (1.2) de exponentiële functie uitbreidt tot een gamma-verdeling. Zoals weergegeven in Figuur 1.2 dient deze uitbreiding om ook verdelingen te omvatten waarbij de kans op $m = 0$ nul is. Op de toepassing van deze uitbreiding komen we terug bij het bespreken van numerieke modellen in Hoofdstuk 3.



Figuur 1.2 – De exponentiële functie en gamma-verdeling, weergegeven op verschillende schalen.

Ook machtswetten kennen veel toepassingen. De zoektocht naar *power laws* in natuurlijke, sociale en economische fenomenen is de laatste decennia een populaire bezigheid geworden voor menig onderzoeker. Een uitgebreide lijst van fenomenen kan worden gevonden in Newman^[10]. In de huidige context benadrukken we de link met multiplicatieve stochastische processen, waarbij de toename in een tijdsstap schaalt met de huidige waarde:

$$m^{(t+1)} = m^{(t)} \times X. \quad (1.8)$$

Het voorkomen van de machtswet als verdeling $P(m)$ is niet onverwacht aangezien $\log m$ een additief proces volgt: $\log m^{(t+1)} = \log m^{(t)} + \log X$. Een exponentiële verdeling $P(\log m)$ impliceert een machtswet voor $P(m)$. De machtswet is even natuurlijk voor multiplicatieve processen als de exponentiële voor additieve^[11].

De correcte identificatie van machtswetten in beperkte datasets is niet evident. In de praktijk kan men met voldoende zekerheid een machtswet aannemen wanneer deze een regime van twee of meer grootteordes beschrijft, en niet het gevolg is van de schaarste van datapunten^[12]. Dit laatste kan voorkomen in de verre staart van de verdeling bekomen uit een eindige dataset. Om machtswetten wordt in deze thesis gebruikt gemaakt van een softwarepakket ontwikkeld door Clauset et al.^[12]. Hiermee wordt de schalingsexponent α bepaald via een methode van *maximum likelihood* (MLE), en de ondergrens m_c gekozen zodanig dat deze de afstand (gegeven door de Kolmogorov-Smirnov toetsingsgrootte) tussen de waargenomen verdeling en een machtswet minimaliseert.

1.4 Empirische verdeling van inkomen en kapitaal

Zoals eerder aangegeven vertonen de verdelingen van inkomen en kapitaal verrassend robuuste eigenschappen over verschillende landen en tijdperken heen. Dit werk zou dan ook niet compleet zijn zonder enkele voorbeelden om deze universaliteit te illustreren. Bovendien is het een kans om de lezer vertrouwd te maken met de manieren waarop de verdelingen en de ongelijkheid worden geanalyseerd. Economische verdelingen worden vaak weergegeven in de vorm van de empirische cumulatieve verdelingsfunctie (CDF), gedefinieerd als:

$$Q(m) = \int_m^\infty P(x)dx. \quad (1.9)$$

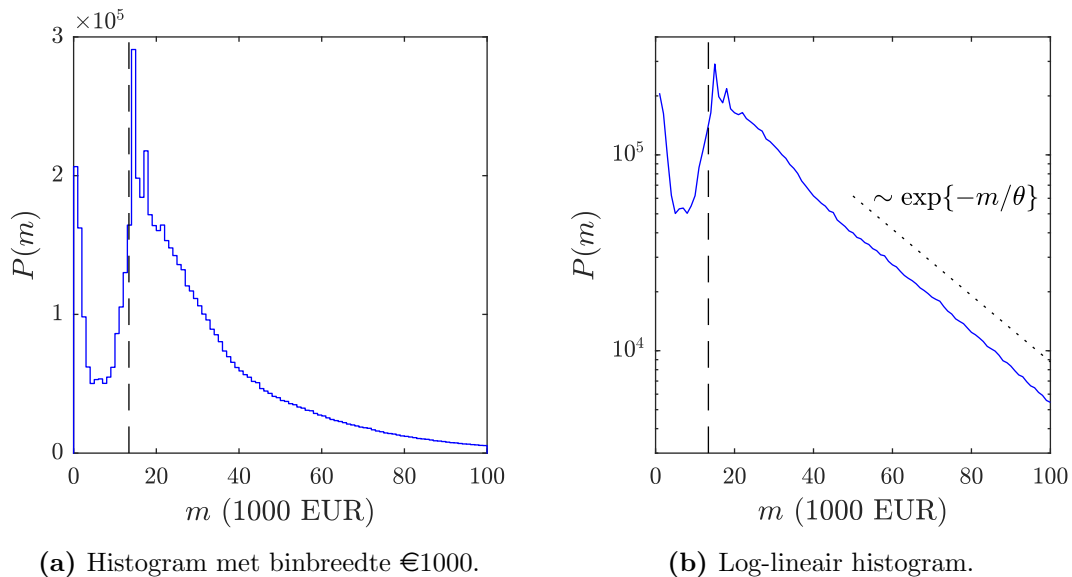
Machtsfuncties blijven machtsfuncties* bij overgang van de PDF naar de CDF, en exponentiële functies blijven exponentiële functies. Voor de weergave van de verdeling in een grote dataset van individuele metingen heeft de empirische CDF bovendien het voordeel dat ze geen keuze van een binbreedte vereist, wat bij het histogram wel nodig is. Een nadeel van de CDF is dat informatie over lage inkomens minder zichtbaar wordt.

1.4.1 Belgische inkomens in 2016

Figuur 1.3 toont de verdeling van Belgische inkomens, zoals blijkt uit de aangiften van het netto belastbaar inkomen uit inkomstenjaar 2016. In het regime van de lage inkomens spelen herverdelingsmechanismen een belangrijke rol. Uitkeringen en andere sociale vangnetten tillen een deel van de armste bevolking boven de armoedegrens, wat leidt tot een groot aantal inkomens net boven deze waarde^[13]. In de hogere klassen volgt de verdeling een relatief stabiel verloop. De log-lineaire weergave in de rechterfiguur toont dat de verdeling voor jaarlijkse inkomens boven €50,000 goed beschreven wordt door een exponentiële curve. De factor θ van deze verdeling is bij benadering €25,648. Recent onderzoek toont dezelfde trend voor de inkomensverdeling van de lage en middenklasse in 67 landen, waaronder alle landen van de EU en Amerika^[14].

* Tenzij in het zeldzame geval $\nu = 0$.

De Belgische aangiften per schijf van €1000 lopen slechts tot €100,000. De 179,260 aangiften boven dit bedrag vertegenwoordigen slechts 2.59% van het totale aantal aangiften, maar omvatten wel 14.42% van het totale belastbare inkomen. De structuur van de hoogste inkomens blijkt in iets meer detail uit de cumulatieve verdeling, die in het hoogste deciel van de bevolking per percentiel is gedifferentieerd. Figuur 1.4 toont dat hoge inkomens afwijken van de exponentiële verdeling en beter worden beschreven door een machtswet. Een verdere differentiëring van het hoogste percentiel is niet beschikbaar, hoewel dit 7.7% van het totale inkomen omvat. Een machtswet-regime kan in de Belgische data bijgevolg niet met zekerheid worden gevonden. Piketty merkt terecht op dat zulke rapporten mogelijk een geflatteerd beeld van de ongelijkheid geven^[9]. Bovendien moet bij deze gegevens worden opgemerkt dat niet alle bronnen van inkomsten in België moeten worden aangegeven. Een voorbeeld hiervan zijn inkomsten van de verhuur van gebouwen, welke vermoedelijk vooral in de hogere inkomensklassen een significante bijdrage leveren. Ook de meerwaarde op aandelen en andere assets die niet verkocht worden, verschijnt niet als inkomen.

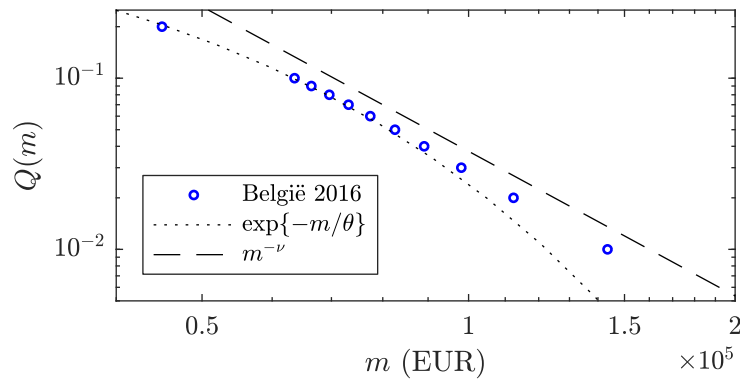


Figuur 1.3 – Verdeling van het netto belastbaar inkomen in Belgische belastingaangiften uit 2016. De streepjeslijn op €13,377 is de armoedegrens voor alleenstaanden in België. Totaal aantal aangiften: 6,139,205. Niet inbegrepen zijn 589,521 aangiften van €0 en 179,260 aangiften van meer dan €100,000. De exponentiële fit heeft parameter $\theta = \text{€}25,648$. Gegevens afkomstig van de Algemene Directie Statistiek Statistics Belgium^[15;16].

1.4.2 Amerikaanse inkomens in 1998

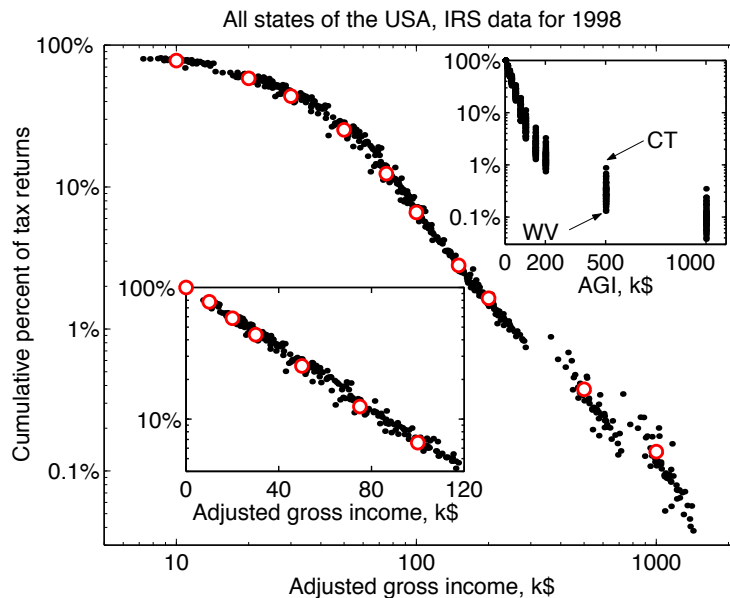
Een meer illustratieve dataset wordt gevonden in de belastingaangiften van individueel inkomen in de Verenigde Staten, waar hoge inkomens verder worden opgedeeld in inkomens hoger dan \$100,000, \$200,000, \$500,000 en \$1,000,000.

De oorspronkelijke data, rechtsboven weergegeven in Figuur 1.5, bevat voor elke staat slechts deze bins in het histogram. De bedragen werden door Drăgulescu and Yakovenko^[17] herschaald met de factor θ die voorkomt in de exponentiële fit aan de middenklasseverdeling in individuele staten. Zoals blijkt uit de hoofdfiguur valt hiermee de spreiding



Figuur 1.4 – Het hoogste deciel van de Belgische inkomensverdeling. Elk datapunt is de ondergrens van het percentiel in kwestie. De dataset en exponentiële fit zijn dezelfde als in Figuur 1.3. De machtswet heeft exponent $\nu \approx 2.8$.

weg; de inkomensverdeling van alle staten volgt nagenoeg exact hetzelfde verloop. Dit duidt op een *scaling*: de verschillende verdelingen $P(m)$ volgen na nondimensionalisatie dezelfde functie $f(m/\theta)$. De log-lineaire inzet linksonder toont opnieuw een exponentieel verband voor de lage en middenklasse inkomens, welke 95% van de bevolking omvatten. Voor deze verdeling geldt $\theta \approx \$36,400$. Voor inkomens vanaf $\$120,000$ volgt de verdeling een machtswet, zoals blijkt uit de hoofdfiguur. De exponent werd bepaald als $\nu \approx 1.7$. Gelijkaardige data voor het Verenigd Koninkrijk en Japan leveren eveneens een machtswet met $\nu \approx 2$ voor de hoogste percentielen^[17;18]. Aangezien een dikkere staart een grotere concentratie van kapitaal bij een rijke elite impliceert, kan men de Pareto-exponent interpreteren als een maat voor ongelijkheid in de samenleving^[17]. België, het VK en Japan zijn in deze zin meer egalitaire staten dan de VS.

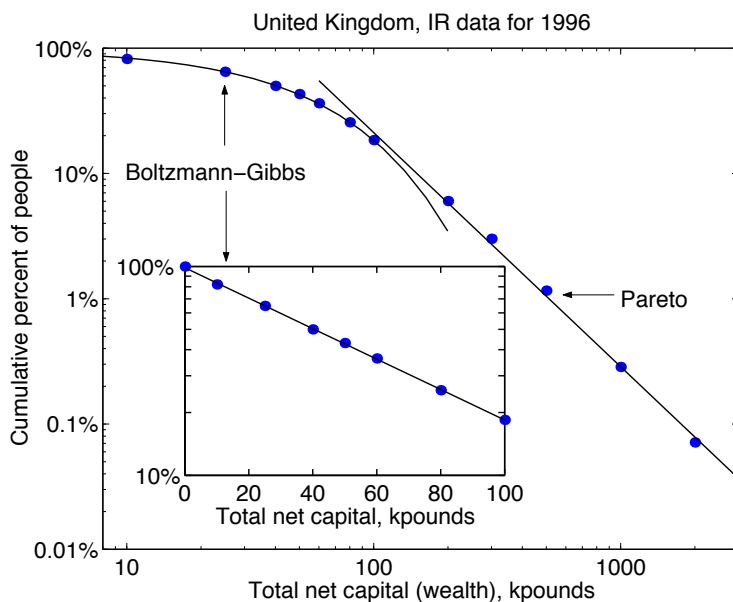


Figuur 1.5 – De inkomensverdeling in de Verenigde Staten, afkomstig uit belastingaangiften uit 1998. De zwarte bolletjes zijn de data van afzonderlijke staten, de rode bolletjes zijn het gemiddelde voor de hele VS. De inzet rechtsboven toont de oorspronkelijke data. De hoofdfiguur en de inzet linksonder tonen de herschaalde data respectievelijk op een log-log en log-lineaire schaal. Figuur overgenomen uit^[17].

1.4.3 Brits kapitaal in 1996

Aangezien de aangifte van kapitaal voor belastingdoeleinden niet zo systematisch gebeurt als bij inkomens, zijn de beschikbare data over deze verdelingen veel schaarser. Een van de voornaamste bronnen zijn de aangiften van eigendommen en schulden voor erfbelasting. Figuur 1.6 toont een op deze manier verkregen schatting van de kapitaalverdeling in het Verenigd Koninkrijk in 1996. De verdeling is analoog aan die voor inkomens. Het grootste deel van de bevolking volgt een exponentiële verdeling met $\theta \approx \text{£}59,600$. De rijkste 10%, met kapitalen boven $\text{£}100,000$, blijkt te voldoen aan een machtswet met exponent $\nu \approx 1.9$. Deze trend wordt bevestigd in andere datasets, al varieert de exponent sterker dan bij inkomens^[17]. Zo zijn kapitalen in de Forbes 400 lijst verdeeld volgens een machtswet met $\nu \approx 1.36$, wat wijst op een grotere ongelijkheid in deze elite dan in de rest van de samenleving^[19].

De beperkte data omtrent eigendom hebben aanleiding gegeven tot creatieve methodes voor het bepalen van kapitaalverdelingen. Zo vond Abul-Magd^[20] eveneens een Pareto-verdeling (met $\nu \approx 3.8$) voor de verdeling van woonoppervlakte in de Egyptische stad Akhetaten omstreeks 1400 v.C.



Figuur 1.6 – De kapitaalverdeling in het Verenigd Koninkrijk, afkomstig uit belastingaangiften uit 1996. De interpolaties tonen de verdeling in de verschillende klassen. De inzet toont de lagere kapitalen in log-lineaire weergave. Figuur overgenomen uit^[17].

1.4.4 Conclusies over empirische verdelingen

Inkomen en kapitaal vertonen beide een exponentiële verdeling voor de grote massa in de lage en middenklasse, en een Pareto-verdeling voor de rijkste 5-10% van de bevolking. De temperatuur θ van het exponentiële regime varieert sterk tussen landen en tijdperken. De Pareto-exponent ν van de inkomensverdelingen vertoont een zekere universaliteit, met een waarde variërend tussen 1.5 en 2.2. Bij kapitaalverdelingen vindt men gelijkaardige waarden voor ν , al komen anomaal lage exponenten vaker voor, met name in de elite. De

robuustere machtswet in inkomensverdelingen kan evenwel te wijten zijn aan onbelastbaar inkomen dat in dit regime een grotere rol speelt.

1.5 Rijkdom, geld en kapitaal

De inkomens in de vorige sectie betreffen steeds inkomsten in de vorm van geld. De weergegeven kapitalen daarentegen zijn schattingen gebaseerd op iemands totale vermogen, inclusief roerende en onroerende goederen. Een fundamentele veronderstelling in de afleiding van de Boltzmann-verdeling in Sectie 1.2, is het behoud van de totale rijkdom $\sum m$ in de hele samenleving. Daar in realiteit noch geld noch kapitaal behouden zijn, kan men zich terecht afvragen in hoeverre deze ansatz verantwoord is. Financiële producten als geld kunnen geïnterpreteerd worden als tegoedbonnen die het recht op de ontvangst van andere goederen of diensten uitdrukken. Deze kunnen meermaals worden uitgeschreven met betrekking tot hetzelfde goed. In moderne economieën hebben centrale banken een monopolie op de productie van geld. Het bankwezen buiten beschouwing gelaten, zijn economische agenten niet in staat om fysiek geld (munten en briefjes) te produceren of te vernietigen. Bijgevolg kan men een vereenvoudigd systeem opstellen waarin de totale hoeveelheid geld behouden blijft^[8]. Het behoud van kapitaal wordt daarentegen op een fundamentele manier geschonden. Door economische activiteit worden arbeid en grondstoffen omgezet in kapitaal. Bovendien wordt geld doorgaans geruild voor arbeid of andere vormen van kapitaal, waardoor financiële transacties slechts één aspect van economische activiteit weergeven.

De modellen die in dit werk aan bod komen, behandelen de uitwisseling van slechts één grootte m . Deze rijkdom kan bijgevolg worden beschouwd als geld, maar niet als kapitaal^[8;5].

1.6 De Gini-index als maat voor ongelijkheid

Ongelijkheid is een breed begrip en er bestaat dan ook een hele reeks technieken om deze te kwantificeren. Eén van de meest gebruikte maten in de context van inkomens- en kapitaalverdelingen is de Gini-index, in 1912 voorgesteld door statisticus Corrado Gini^[21]. De Gini-index wordt gedefinieerd aan de hand van de Lorenz-curve, die het percentage van het totale inkomen of kapitaal weergeeft dat cumulatief behoort tot de armste $x\%$ van de bevolking^[5]. De curve is parametrisch gedefinieerd als:

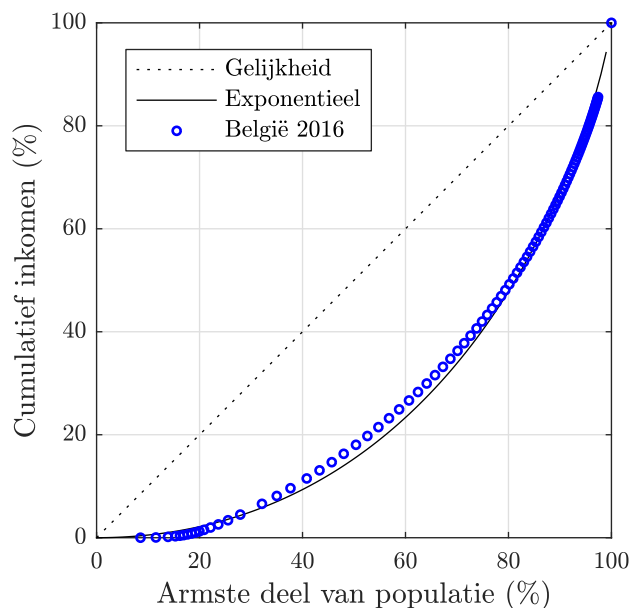
$$x(r) = \int_0^r P(r')dr', \quad y(r) = \frac{\int_0^r r'P(r')dr'}{\int_0^\infty r'P(r')dr'}, \quad (1.10)$$

waarbij r loopt van 0 tot ∞ , en zowel x als y van 0 tot 1. In het geval van perfecte gelijkheid, waarbij iedereen in de populatie eenzelfde inkomen of kapitaal heeft, is de Lorenz-curve een rechte. De Gini-index is gedefinieerd als tweemaal de oppervlakte tussen de Lorenz-curve en deze rechte, ofwel

$$G = 1 - 2 \int_0^1 y(x)dx. \quad (1.11)$$

De index varieert van 0 bij perfecte gelijkheid tot 1 wanneer één persoon alle rijkdom bezit. Figuur 1.7 toont de Lorenz-curve voor de Belgische inkomens uit Figuur 1.3. Deze

blijkt ook hier goed beschreven door een exponentiële verdeling, waarvan de Lorenz-curve theoretisch kan worden bepaald als $y = x + (1 - x) \ln(1 - x)$, en de Gini-index 0.5 bedraagt [5].



Figuur 1.7 – De Lorenz-curve van de Belgische inkomensverdeling uit Figuur 1.3. De Gini-index bedraagt $G = 0.4840$.

Het spreekt voor zich dat de reductie van een volledige verdeling tot één getal een groot verlies van informatie inhoudt. De Gini-index kan sterk variëren naargelang de gebruikte gegevens*, en verschillende klassen in de verdeling kunnen uiteenlopende maten van ongelijkheid kennen.

Wanneer de Gini-index wordt geïnterpreteerd zonder aandacht voor de onderliggende data is het gemakkelijk om tot foute conclusies te komen. Om deze redenen stoot het gebruik van samengestelde indices op enige tegenstand, o.a. van Piketty^[9]. Desalniettemin zijn ze nuttig om de evolutie van de ongelijkheid in functie van een bepaalde parameter te beschouwen, eens de onderliggende verdeling kwalitatief gekend is. Bovendien illustreren de Belgische belastingsaangiften hoe ook histogrammen een vertekend beeld kunnen geven wanneer de dataset onvolledig is. Hoe dan ook, Piketty waarschuwt:

”De wijze waarop we ongelijkheid proberen te meten is nooit neutraal.”

* In officiële rapporten worden naast het individuele inkomen ook de leefomstandigheden in rekening gebracht. Zo kent EU-SILC (*European Union Statistics on Income and Living Conditions*) aan elk gezinslid een netto inkomen toe, gebaseerd op het gezinsinkomen en de positie van de persoon in het gezin. De gerapporteerde Gini-index voor de Belgische inkomensverdeling varieerde van 2003 tot 2015 steeds tussen 0.25 en 0.28^[22].

Hoofdstuk 2

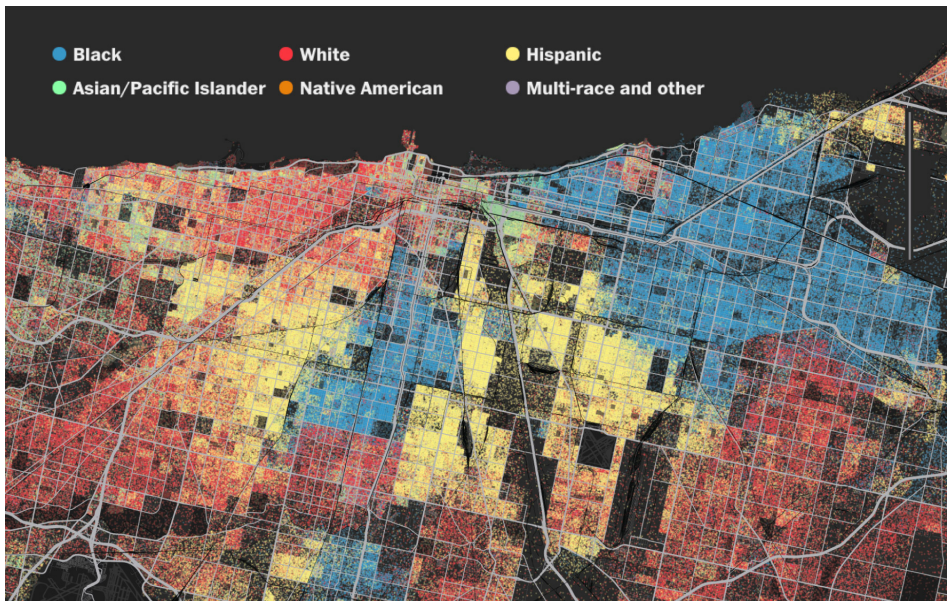
Segregatie

Segregatie is de grootschalige scheiding van bevolkingsgroepen, zodanig dat de interactie tussen leden uit verschillende groepen wordt beperkt. Dit kan zich afspelen in geografische gebieden of sociaal-economische netwerken, en kan gebeuren volgens parameters als etniciteit, taal, religie of economische klasse. De drijvende kracht achter segregatie varieert eveneens. In het geval van georganiseerde segregatie zijn politieke krachten verantwoordelijk voor het creëren en in stand houden van de scheiding van bevolkingsgroepen. De Zuid-Afrikaanse Apartheid en de Poolse getto's tijdens het nazi-regime vormen enkele van de meest schokkende voorbeelden van zulke gedwongen segregatie. Het zuiden van de Verenigde Staten werd tot in de jaren '60 eveneens gekenmerkt door raciale segregatie in de vorm van de beruchte Jim Crow wetten. Het motto *separate but equal* betekende in praktijk een geïnstitutionaliseerde discriminatie van gekleurde minderheden in alle domeinen van de samenleving^[23].

In dit werk wordt spontane of zelf-organiserende segregatie behandeld. Hierbij treedt een scheiding van bevolkingsgroepen op als gevolg van de beslissingen door een groot aantal individuele personen of gezinnen. In realiteit kunnen individuele voorkeuren op hun beurt het gevolg zijn van tradities en gewoonten, waardoor ze bestaande segregatie in stand houden. Keuzes worden bovendien beperkt door externe factoren (bijvoorbeeld de betaalbaarheid van een woning), waardoor ze niet los kunnen worden gezien van de maatschappelijke context.

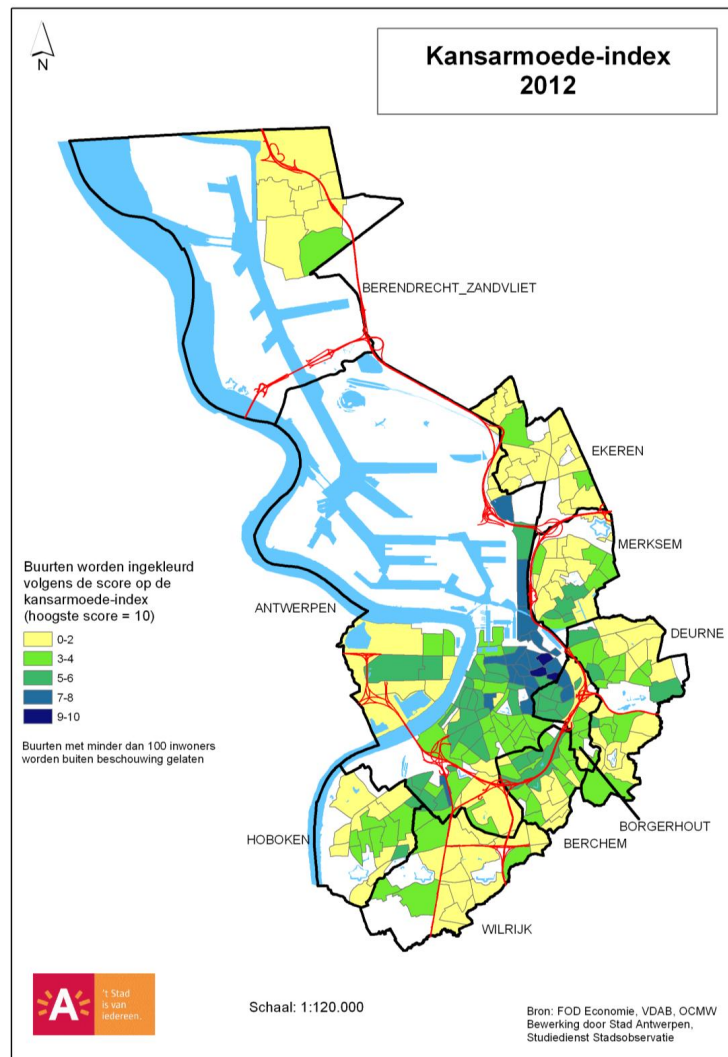
2.1 Residentiële segregatie

Etnische en sociaal-economische residentiële segregatie komt typisch voor in stedelijke gebieden, en komt geregeld ter sprake in het publieke debat over ongelijkheid en diversiteit. In deze context wordt een gebrek aan integratie tussen bevolkingsgroepen veelal aangehaald als bron van ongelijkheid door het bestendigen van kansarmoede, en als gevaar voor het democratische weefsel door een gemis aan gedeelde waarden en sociale cohesie^[24]. Figuur 2.1 toont de etnische samenstelling van Chicago, dat ondanks toenemende integratie in de VS nog steeds kampt met een hoge graad van segregatie. Uit de figuur blijkt het bestaan van etnische concentratiewijken. De vorming hiervan is het sterkst in de afro-amerikaanse gemeenschap, wat deels kan worden toegeschreven aan het Jim Crow-verleden^[25].



Figuur 2.1 – Etnische samenstelling van Chicago in 2016. Elk punt stelt een gezin van bepaalde etniciteit voor. Figuur overgenomen uit ^[25].

De focus van deze thesis gaat uit naar economische segregatie, waarbij niet etniciteit maar wel de inkomens- of vermogensklasse als onderscheidende factor optreedt. Figuur 2.2 toont de kansarmoede-index van de Antwerpse wijken in 2012^[26]. Deze arbitraire index van 0 tot 16 is gebaseerd op het aantal langdurig werklozen, OCMW-steuntrekkers en mensen met een belastbaar inkomen van minder dan €10,000. Hoewel de armoede hiermee per wijk veralgemeend wordt, is niettemin waarneembaar dat kansarmoede veelal geconcentreerd is in enkele wijken in de binnenstad, terwijl de situatie in de stadsrand beduidend beter is.



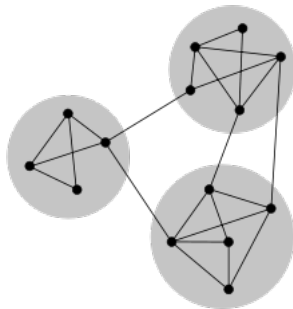
Figuur 2.2 – Kansarmoede-index in Antwerpse wijken. Figuur overgenomen uit [26].

2.2 Segregatie in netwerken

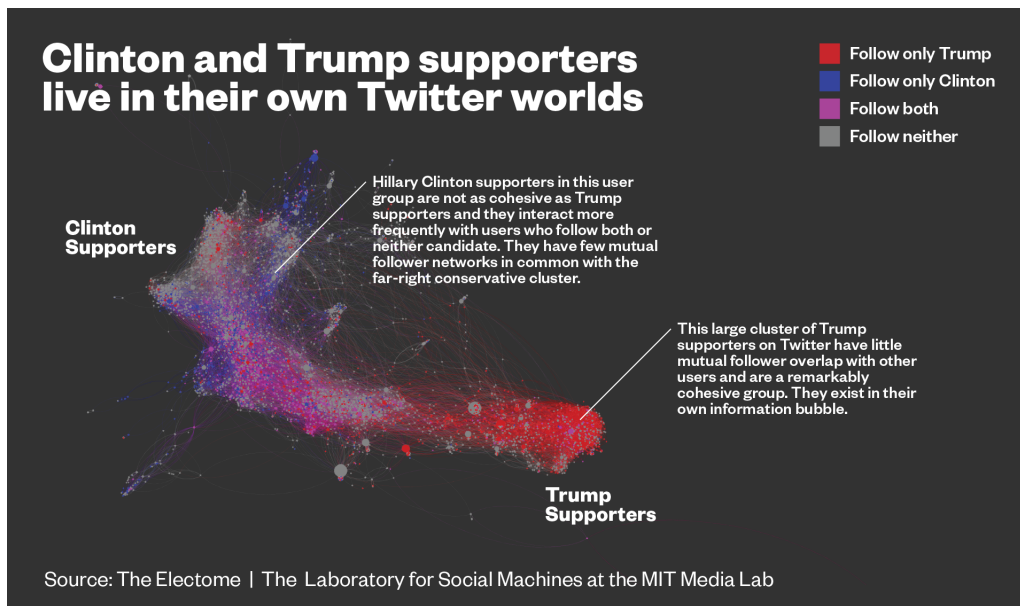
Residentiële segregatie is slechts een specifiek voorbeeld van een breder fenomeen dat kan optreden in eender welk soort sociale of economische relaties tussen individuen. Formeel kan men een netwerk beschouwen waarin elke *node* een persoon of gezin voorstelt, met elkaar verbonden via *links* die overeenkomen met relaties van het beschouwde type. In residentiële modellen liggen er enkel links tussen naburige gezinnen, waardoor elk gezin ook een gelijkaardig aantal links onderhoudt. De verdeling van links in andere netwerken kan sterk van deze situatie verschillen. Lokale inhomogeniteit in de verdeling van het aantal links kan leiden tot het ontstaan van gemeenschappen met veel onderlinge connecties, maar weinig links naar nodes in andere gemeenschappen^[27]. Deze vorm van segregatie wordt geïllustreerd in Figuur 2.3. De veralgemening van modellen voor residentiële segregatie naar complexe netwerken valt buiten het bestek van deze thesis. We beperken de bespreking tot enkele illustratieve voorbeelden.

Figuur 2.4(a) toont het netwerk van Twitter-gebruikers in de aanloop naar de Amerikaanse presidentsverkiezingen van 2016. Hieruit blijken Clinton- en Trump-aanhangers (die slechts één van beide kandidaten volgen) gemeenschappen te vormen die slechts beperkt met elkaar in contact komen. Trump-aanhangers vormen bovendien een meer geïsoleerde gemeenschap dan Clinton-aanhangers^[28].

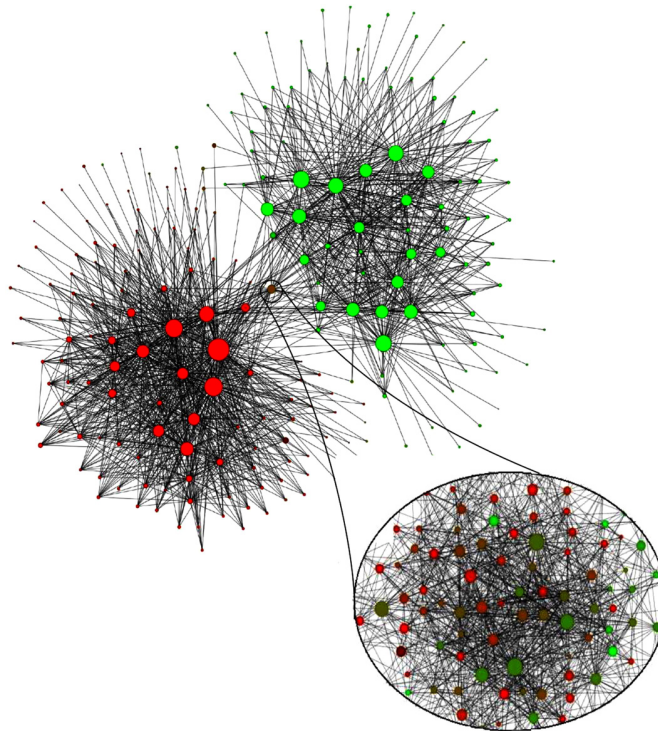
Een relevant binnenlands voorbeeld wordt getoond in Figuur 2.4(b). Hierin wordt het netwerk van gesprekspartners in het Belgische mobiele telefoonnetwerk weergegeven, waarbij de kleur van elke node wordt bepaald door de dominante taal van de corresponderende gemeenschap. Uit de Figuur blijkt een sterke segregatie tussen zuiver Franstalige en Nederlandstalige gemeenschappen. De weinige intercommunautaire links gaan veelal via één centrale gemeenschap die een sterke meertaligheid vertoont^[29].



Figuur 2.3 – Gemeenschappen (*community structure*) in een netwerk. Gemeenschappen kunnen vervolgens als nodes worden gebruikt om het netwerk op een hoger aggregatieniveau te beschrijven. Figuur overgenomen uit^[30].



(a) Twitter-gebruikers tijdens de Amerikaanse verkiezingscampagne van 2016. De kleur van nodes geeft aan welke kandidaat ze volgen, terwijl links worden gelegd tussen gebruikers die elkaar volgen. Figuur overgenomen uit [28].



(b) Gemeenschappen in het Belgische mobiele telefoonnetwerk. Nodes stellen gemeenschappen van 100 of meer klanten voor, waarbij de grootte evenredig is met het aantal personen in de gemeenschap, en de kleurschaal van rood (FR) tot groen (NL) de overwegend gebruikte taal weergeeft. Links werden gelegd tussen personen die over een periode van 6 maanden meer dan 6 contacten hadden. De dataset bestond uit 2.5 miljoen klanten van een Belgische provider [31;29]. Figuur overgenomen uit [29].

Figuur 2.4 – Voorbeelden van segregatie in complexe netwerken.

2.3 Het meten van segregatie

Segregatie is één van de oudste onderzoeksthema's in de sociologie^[32]. Net als voor ongelijkheid bestaan er bijgevolg tal van grootheden om segregatie mee te karakteriseren. Deze segregatie-*indices* verschillen onderling in hun toepassingsgebied en het soort segregatie dat ze meten. Massey and Denton^[32] categoriseerden in 1988 de voornaamste indices in volgende dimensies:

- Gelijkmatigheid.
- Blootstelling: de potentiële interactie tussen bevolkingsgroepen. Een voorbeeld hiervan is Schelling's ghetto-index^[33], die de fractie van de bevolking weergeeft zonder enige links met agenten van de andere soort.
- Concentratie: de relatieve geografische oppervlakte bewoond door een minderheid.
- Centralisatie: de mate waarin een minderheid zich in het geografische centrum van een stedelijk gebied bevindt.
- Clustering: de mate waarin een bevolkingsgroep één groot aaneengesloten gebied bewoont, dan wel verspreid is in kleine domeinen.

Gelijkmatigheid en blootstelling zijn doorgaans gecorreleerd en zijn in de meeste gevallen de relevantste dimensies^[32].

2.3.1 Duncan-index

Veruit de meest gebruikte index in de literatuur over residentiële segregatie is de *dissimilariteits*-index, in 1955 voorgesteld door Duncan and Duncan^[34]. Deze index voor ongelijkmatigheid meet in hoeverre de lokale samenstelling in een buurt afwijkt van de samenstelling van de gehele populatie bestaande uit N_A en N_B personen van de onderscheidbare soorten* A en B. Indien de populatie in een stad, netwerk of ander geheel wordt opgedeeld in k subgroepen of buurten met $n_A^{(i)}$ en $n_B^{(i)}$ bewoners van beide types, dan is de Duncan-index gedefinieerd als:

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left| \frac{n_A^{(i)}}{N_A} - \frac{n_B^{(i)}}{N_B} \right|. \quad (2.1)$$

Deze index neemt waarden aan tussen 0 (volledige integratie) en 1 (volledige segregatie), en kan worden geïnterpreteerd als de fractie van één groep die zou moeten verhuizen om de verdeling homogeen te maken. De Duncan-index is uitermate geschikt voor datasets waarin de vereiste opdeling in subgroepen van nature voorkomt, zoals scholen in een stad, appartementsgebouwen in een straat of bedrijven in een sector. Computationale modellen zijn echter vaak gedefinieerd op een groot tweedimensionaal rooster (zie Hoofdstuk 4) of netwerk. De noodzaak van een arbitraire opdeling in buurten maakt de Duncan-index in deze context minder geschikt.

* Wegens de historische focus op etnische segregatie worden deze vaak als *zwart* en *wit* benoemd. Om deze connotatie te vermijden en wit te bewaren als de kleur voor lege plaatsen (zie Hoofdstuk 4), volgen we in dit werk de recentere literatuur met het gebruik van rood en blauw in figuren.

2.3.2 Freeman-index

Een grootheid die geen gebruik maakt van arbitraire opdelingen is de Freeman-index^[35]. Deze index voor blootstelling meet in een netwerk met N nodes en M links de verhouding tussen het aantal *cross-class links** M_{AB} , en het verwachte aantal cross-class links $\mathbb{E}[M_{AB}]$ in afwezigheid van segregatie. Immers, wanneer de personen in het netwerk blind zijn voor het kenmerk dat we gebruiken om de populatie op te delen, ontstaan links zonder onderscheid tussen deze klassen. Aangezien het aantal mogelijke cross-class links gelijk is aan $N_A N_B$, en het totaal aantal mogelijke links $N(N-1)/2$ bedraagt, is het verwachte aantal cross-class links gelijk aan

$$\mathbb{E}[M_{AB}] = \frac{2N_A N_B M}{N(N-1)}. \quad (2.2)$$

De Freeman segregatie-index (*FSI*) is dan gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} FSI &= 1 - \frac{M_{AB}}{\mathbb{E}[M_{AB}]}, \\ &= 1 - \frac{M_{AB} N(N-1)}{M \cdot 2N_A N_B}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

In praktijk wordt meestal gewerkt met een groot aantal nodes $N \gg 1$ waarvan $N_A = N_B = N/2$. De Freeman-index is in dat geval $FSI \approx 1 - 2M_{AB}/M$. De index varieert[†] van -1 (anti-segregatie waarbij uitsluitend cross-class links bestaan) tot 1 (volledige segregatie met enkel links binnen de subgroepen). Bij $FSI = 0$ is er geen segregatie.

2.3.3 Segregatie op basis van rijkdom

In dit werk ligt de focus bij segregatie op basis van een continue variabele als geld. Voor de blootstelling tussen rijkere en armere personen stellen we zelf een index voor, gebaseerd op de Freeman-index. Indien er geen segregatie optreedt, zijn de waarden van twee naburige agenten onafhankelijke variabelen met dezelfde kansverdeling (de verdeling van rijkdom in de hele populatie). Het verwachte verschil is gelijk aan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_1 - X_2)^2] &= \mathbb{E}[X_1^2 + X_2^2 - 2X_1 X_2], \\ &= 2\mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2, \\ &= 2\text{Var}[X]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Het eigenlijke verschil tussen naburige agenten is uiteraard $(x_i - x_j)^2$. Zijn er in totaal M links, dan kunnen we de continue segregatie-index (*CSI*) definiëren als:

$$CSI = \frac{1}{M} \sum_{\langle ij \rangle} \left(1 - \frac{(x_i - x_j)^2}{2\text{Var}[X]} \right), \quad (2.5)$$

waarin de sommatie loopt over alle links, in dit werk vastgelegd door naburige agenten in het rooster.

* Links tussen nodes behorend tot verschillende groepen.

† Freeman^[35] hanteert een definitie die van 0 tot 1 loopt en geen anti-segregatie beschouwt. We gebruiken hier een veralgemeende versie^[36].

Opmerking: Na het uitvoeren van het onderzoek werd mijn aandacht gevestigd op de reeds bestaande Moran's I -index^[37]:

$$I = \frac{N}{\sum_{i,j} w_{ij}} \frac{\sum_{i,j} w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.6)$$

Deze index wordt vaak gebruikt voor de analyse van geografische data, waarbij de gewichten w_{ij} de afstand tussen locaties voorstellen. Wanneer de gewichten worden vereenvoudigd tot 1 voor naburige agenten en 0 in alle andere gevallen, dan meet deze index in essentie hetzelfde als de CSI -index. Een nadeel van Moran's I is dat deze de afwijking meet uit het gemiddelde, een enigszins arbitraire waarde gezien de verscheidenheid aan verdelingen waarmee we te maken krijgen. Om deze reden hanteren we in het vervolg van deze thesis de CSI -index, die bovendien een gelijkenis vertoont met de segregatie-Hamiltoniaan die we in Hoofdstuk 5 introduceren.

Deel II

Agent-gebaseerde modellen

Hoofdstuk 3

Kinetische modellen voor financiële transacties

“This planet has - or rather had - a problem, which was this: most of the people living on it were unhappy for pretty much of the time. Many solutions were suggested for this problem, but most of these were largely concerned with the movement of small green pieces of paper, which was odd because on the whole it wasn't the small green pieces of paper that were unhappy.”

– Douglas Adams

In een ideaal gas ondergaan een groot aantal deeltjes op willekeurige wijze elastische botsingen, waarbij telkens een overdracht van energie gebeurt tussen de twee betrokken deeltjes, maar de som van hun energieën behouden blijft. In kinetische uitwisselingsmodellen voor geld wordt eveneens een grote verzameling economische agenten $\{i\}$ beschouwd, die net als gasdeeltjes willekeurig met elkaar in contact komen. Elke agent bezit een bedrag m_i , waarbij de letter m per conventie wordt gebruikt voor *money*. Op elke tijdstap ondergaan twee willekeurige agenten i en j een interactie, waarbij een deel van hun geld wordt overgedragen, met behoud van het totaal:

$$\begin{cases} m_i^{(t+1)} = m_i^{(t)} + \Delta m, \\ m_j^{(t+1)} = m_j^{(t)} - \Delta m. \end{cases} \quad (3.1)$$

De microscopische regels voor de grootte en richting van de overdracht Δm vormen de voornaamste parameters voor de verfijning van deze modellen. Bijkomende veronderstellingen omtrent menselijk gedrag leiden zo tot steeds complexere regels, waarmee verscheidene waarnemingen uit economische verdelingen gereproduceerd kunnen worden. Een volledige bespreking van de inmiddels uitgebreide literatuur over kinetische uitwisselingsmodellen kan worden gevonden in Yakovenko and Rosser^[5] en Chakrabarti et al.^[38]. In dit hoofdstuk beperken we de bespreking tot enkele van de belangrijkste modellen, met het oog op de toevoeging van een segregatiemechanisme verderop. Meer bepaald behandelen we geen modellen waarin schuld (in de vorm van negatieve bedragen) is toegelaten, noch modellen waarin meer dan één grootheid worden uitgewisseld. De MATLAB-implementaties van alle besproken algoritmes zijn te vinden in Bijlage B.1.

Om de evenwichtsverdeling van elk uitwisselingsmodel te vinden worden steeds een reeks onafhankelijke simulaties uitgevoerd, waarin telkens een groot aantal interacties plaatsvinden*. De tijd wordt uitgedrukt als een aantal *sweeps*: een tijdsstap bestaande uit N willekeurige microscopische bewegingen in een populatie van N agenten. In een sweep komt elke agent *gemiddeld één* keer aan de beurt. We kunnen met voldoende zekerheid besluiten dat evenwicht bereikt is, wanneer de verdeling niet meer verandert over een grootteorde van tijd.

3.1 Uitwisselen zonder sparen

In het eenvoudigste model met additieve transacties wisselen de twee gekozen agenten een constant bedrag (bijvoorbeeld $\Delta m = 1$) uit. Dit impliceert echter dat alle prijzen van goederen en diensten in de economie dezelfde zijn. Realistischer is daarom de uitwisseling van een willekeurig bedrag, zoals een willekeurige fractie ϵ van de gemiddelde rijkdom per agent M/N . Dit reflecteert de verscheidenheid aan prijzen. In beide modellen kan de rijkdom van een agent negatief worden, wat geïnterpreteerd wordt als schuld. Om dit te voorkomen moet de voorwaarde $m_i \geq 0$ (vergelijking (1.3)) worden gecontroleerd bij elke voorgestelde transactie†.

In een derde model wordt aan deze voorwaarde automatisch voldaan. De twee gekozen agenten voegen hun geld samen, waarna een willekeurige en uniform verdeelde fractie $0 < \epsilon < 1$ van het totale bedrag wordt toegekend aan agent i , en het resterende bedrag terechtkomt bij agent j :

$$\begin{cases} m_i^{(t+1)} = \epsilon(m_i^{(t)} + m_j^{(t)}), \\ m_j^{(t+1)} = (1 - \epsilon)(m_i^{(t)} + m_j^{(t)}), \end{cases} \quad (3.2)$$

ofwel:

$$\Delta m = \epsilon(m_i + m_j) - m_i, \text{ waarin } 0 < \epsilon < 1. \quad (3.3)$$

De voorgestelde regels voor het uitgewisselde bedrag Δm voldoen allen aan de voorwaarden voor de Boltzmann-verdeling, besproken in Sectie 1.2. De drie modellen leveren dan ook dezelfde evenwichtsverdeling^[8;5]. In wat volgt gebruiken we het model uit vergelijking (3.2).

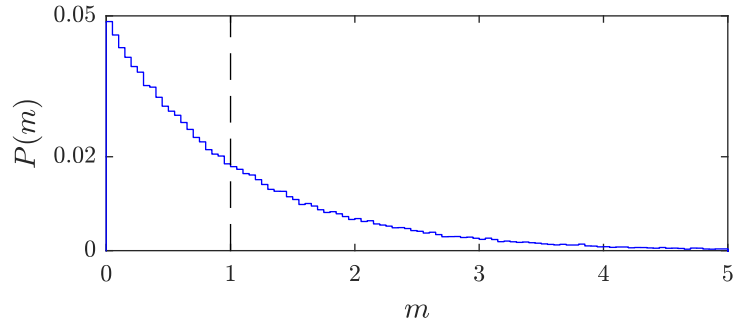
Figuur 3.1(a) toont een histogram van de verdeling van geld na het bereiken van evenwicht. Het histogram wordt goed beschreven door een exponentiële verdeling, wat bevestigd wordt door de cumulatieve verdelingsfunctie in Figuur 3.1(b). Het lineaire verloop in de log-lineaire inzet duidt op een exponentieel verloop, en de log-log plot geeft geen aanwijzing voor het bestaan van een machtswet-regime. Dit resultaat komt zoals verwacht overeen met de Boltzmann-Gibbs verdeling die optreedt voor de energie van gasdeeltjes.

* Zolang er geen beperking is op de interactiepartners van elke agent (bv. door het invoeren van een rooster) wordt om computationele redenen de voorkeur gegeven aan een groter aantal onafhankelijke simulaties op een kleinere populatie. Er wordt echter steeds geverifieerd of het resultaat robuust is voor verschillende populatiegroottes.

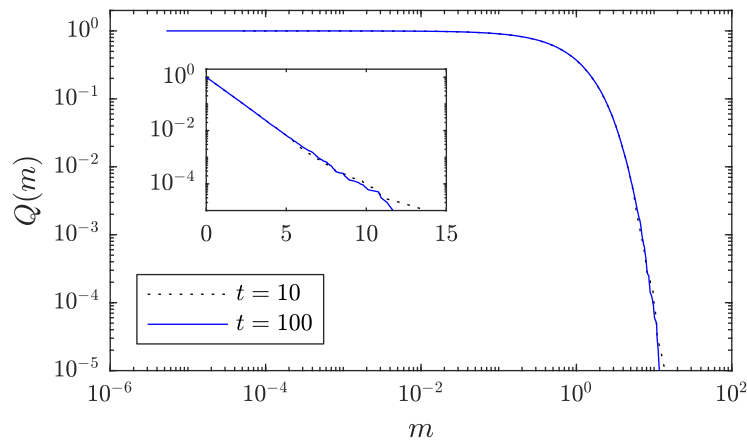
† Voor de volledigheid vermelden we nog dat het toelaten van een maximale schuld ($m_i \geq -m_d$) eveneens leidt tot een Boltzmann-verdeling, zij het met grondtoestand op $-m_d$ in plaats van nul. Wanneer onbeperkte schuld wordt toegelaten, is de economie instabiel. De verdeling spreidt Gaussisch uit en bereikt nooit een stationaire toestand^[8;5].

Met betrekking tot het algemene voorschrift (1.2) besluiten we dat $\gamma = 0$, $\theta = m_i^{(0)} = 1$, $m_c = \infty$.

De dynamica leidt, ongeacht de beginverdeling, tot een stationaire toestand waarin de meerderheid van de populatie behoort tot het regime met weinig geld. Uit de eigenschappen van de exponentiële verdeling volgt dat $(1 - e^{-1}) \approx 63\%$ van de bevolking zich onder het gemiddelde bevindt. De Gini-index van een exponentiële verdeling is 0.5, wat door de data bevestigd wordt.



(a) Histogram met binbreedte 0.05.



(b) Cumulatieve verdelingsfunctie.

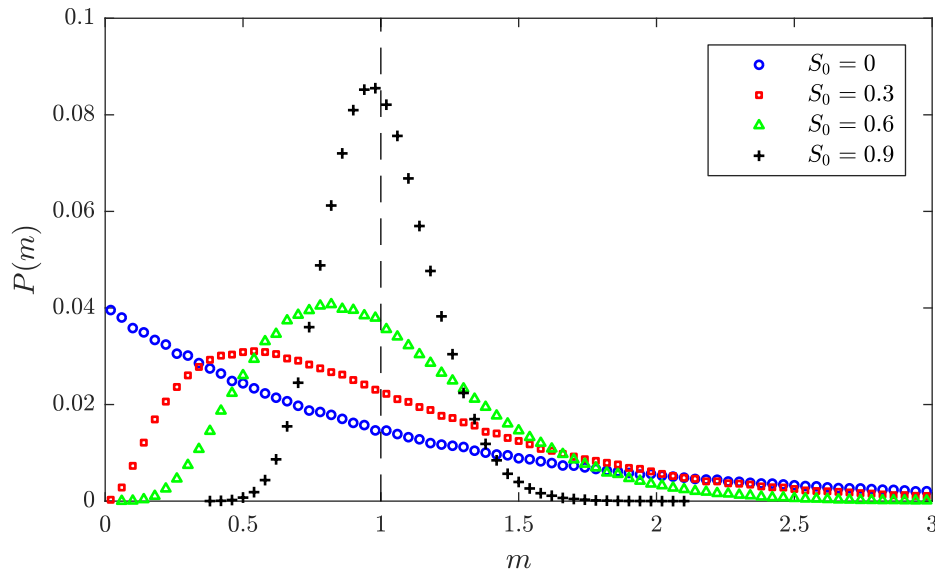
Figuur 3.1 – De evenwichtsverdeling van het uitwisselingsmodel gegeven door vergelijking (3.2), bekomen na 1000 onafhankelijke simulaties van 100 sweeps ($100 \times N$ interacties) in een populatie van $N = 100$ agenten met elk aanvankelijk een bedrag $m_i^{(0)} = 1$. Het samenvallen van de verdelingsfuncties na 10 en 100 sweeps bevestigt dat evenwicht bereikt is.

3.2 Uitwisselen met vaste spaarfactor

Een eerste verfijning volgt uit de vaststelling dat economische agenten zelden hun volledige kapitaal ter beschikking stellen in een interactie. Met een constante spaarfactor S_0 wordt de fractie bepaald die elke agent van zijn huidige bezit achter de hand houdt in een transactie. De nieuwe dynamica wordt gegeven door^[6]:

$$\begin{cases} m_i^{(t+1)} = S_0 m_i^{(t)} + \epsilon(1 - S_0)(m_i^{(t)} + m_j^{(t)}), \\ m_j^{(t+1)} = S_0 m_j^{(t)} + (1 - \epsilon)(1 - S_0)(m_i^{(t)} + m_j^{(t)}). \end{cases} \quad (3.4)$$

Figuur 3.2 toont de evenwichtsverdeling voor verschillende waarden van S_0 . Uit het histogram blijkt dat, als gevolg van het spaargedrag, de waarschijnlijkheid om in volledige armoede terecht te komen tot nul wordt gereduceerd. Ook het gewicht van erg grote bedragen in de positieve staart neemt af. De waarneming van afnemende ongelijkheid wordt bevestigd door de Lorenz-curve, weergegeven in Figuur 3.3. In Figuur 3.4 tonen we de Gini-index voor een groter bereik van S_0 . Hieruit blijkt een lineair dalend verloop naar volledige gelijkheid.



Figuur 3.2 – Stationaire verdelingsfunctie van het uitwisselingsmodel (3.4), voor verschillende waarden van de vaste spaarfactor S_0 . Het histogram heeft binbreedte 0.04. De simulatieparameters zijn dezelfde als in Figuur 3.1. Bij hogere spaarfactor zijn meer sweeps nodig om de stationaire toestand te bereiken; $t = 100$ bleek zelfs voor $S_0 = 0.9$ voldoende.

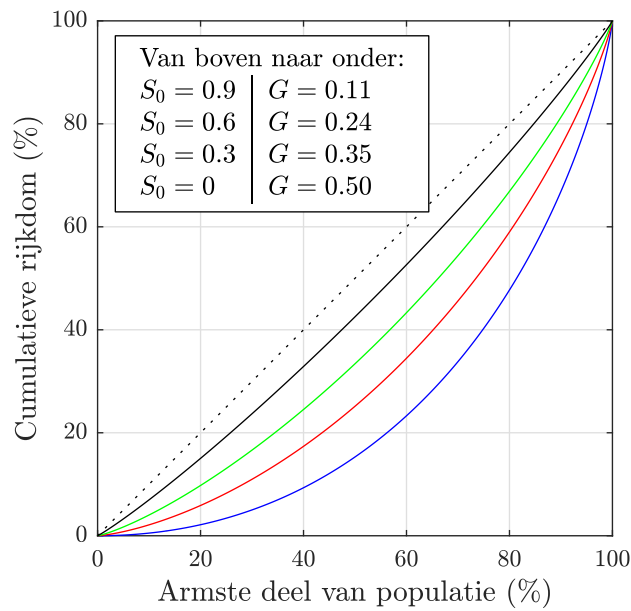
De verdeling heeft nu een maximum bij een eindige rijkdom, en neigt voor stijgende spaarfactor naar een sterk gepiekte verdeling rondom het gemiddelde. Als functionele vorm van deze verdeling werd in het verleden reeds de gamma-distributie uit vergelijking (1.2) geopperd. Het uitwisselingsmodel voldoet echter nog steeds formeel aan de voorwaarden voor de Boltzmann-verdeling. Een mogelijke verklaring om de gamma-distributie te rijmen met de analogie van kinetische botsingen werd voorgesteld door Patriarca et al. [39]. De Maxwell-Boltzmann verdeling voor de snelheid van gasdeeltjes in d ruimtelijke dimensies,

$$P(\mathbf{v}) d^d \mathbf{v} \sim \exp\{mv^2/2k_B T\} d^d \mathbf{v}, \quad (3.5)$$

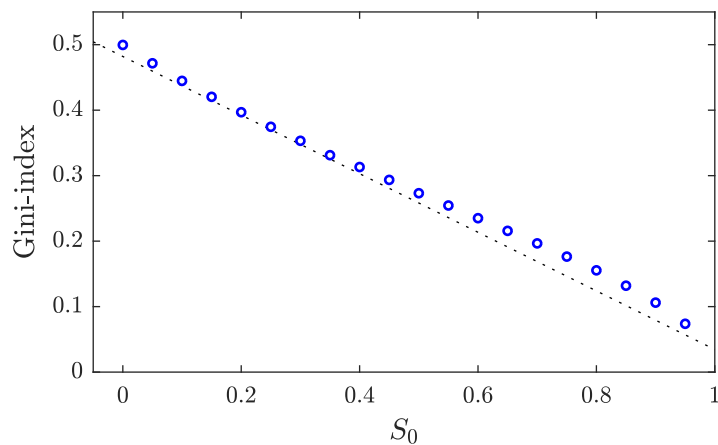
wordt omgevormd naar de verdeling van kinetische energie $E = mv^2/2$ via de voorwaarde $P(\mathbf{v}) d^d \mathbf{v} = P(E) dE$. In arbitraire dimensionaliteit levert dit als verdeling:

$$P(E) dE \sim E^{d/2-1} \exp\{E/k_B T\}. \quad (3.6)$$

Slechts in $d = 2$ dimensies herleidt dit voorschrift tot de Boltzmann-verdeling; de kinetische energie van gasdeeltjes in hogere dimensionaliteit volgt een gamma-verdeling [39;40].



Figuur 3.3 – Lorenz-curven en Gini-indices van de verdelingen uit Figuur 3.2. De stippellijn geeft de situatie van perfecte gelijkheid.



Figuur 3.4 – Gini-index van de verdeling in het kinetische uitwisselingmodel met vaste spaarfactor S_0 . Elk datapunt is het resultaat van 10 onafhankelijke simulaties van 100 sweeps in een populatie van $N = 10,000$ agenten met aanvankelijke rijkdom $m_i^{(0)} = 1$. De foutenvlaggen zijn kleiner dan de markeringen.

Deze d -afhankelijkheid kan worden gerelateerd aan de spaarfactor van het transactiemodel. Hoe hoger het aantal dimensies, hoe kleiner de kans dat deeltjes *frontaal* botsen en zo al hun energie in het botsingsproces ter beschikking stellen. Net als de spaarfactor in transactiemodellen levert een hogere dimensionaliteit in kinetische systemen een beperking op de energie die in een interactie kan worden uitgewisseld. In Figuur 3.5 tonen we voor een groter aantal spaarfactoren de evolutie van de parameters in de gamma-distributie (1.2). Het theoretische verband kan eveneens uit de kinetische analogie worden afgeleid^[39]:

$$\gamma(S_0) = \frac{1 + 2S_0}{1 - S_0}, \quad (3.7)$$

$$\theta(S_0) = \frac{1 - S_0}{1 + 2S_0} \bar{m}. \quad (3.8)$$

Het divergeren van γ wanneer S_0 nadert naar 1, zou kunnen suggereren dat de gamma-distributie in deze limiet geen optimale voorstelling is. De verdeling lijkt te evolueren naar een Gaussische, waarvan de staart $\exp\{-m^2/2\sigma^2\}$ niet voldoet aan de gamma-distributie. Deze grafische waarneming wordt bevestigd door het opmeten van de scheefheid en de kurtosis van de verdelingen. De scheefheid of *skewness* γ_1 geeft de asymmetrie van de verdeling weer en is gedefinieerd als

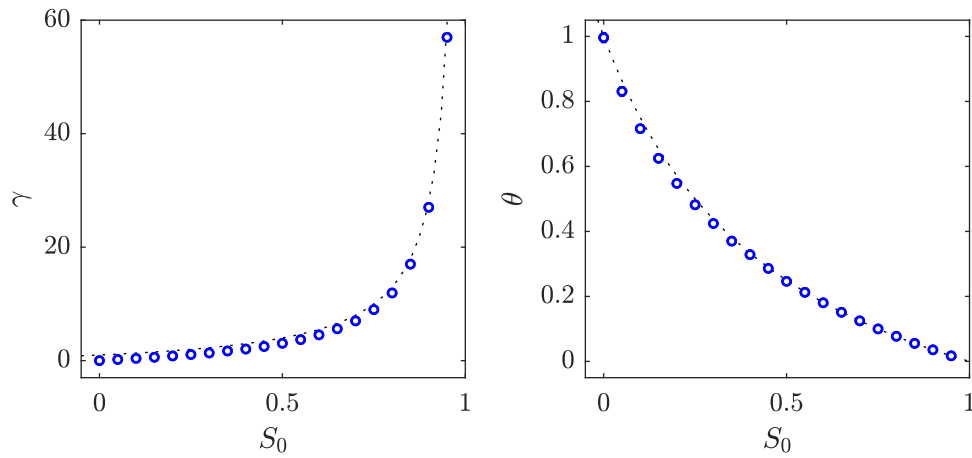
$$\gamma_1 = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^3]}{(\mathbb{E}[(X - \mu)^2])^{3/2}}. \quad (3.9)$$

De kurtosis κ is een maat voor het gewicht van waarden ver van het gemiddelde, met andere woorden voor de dikte van de staart*

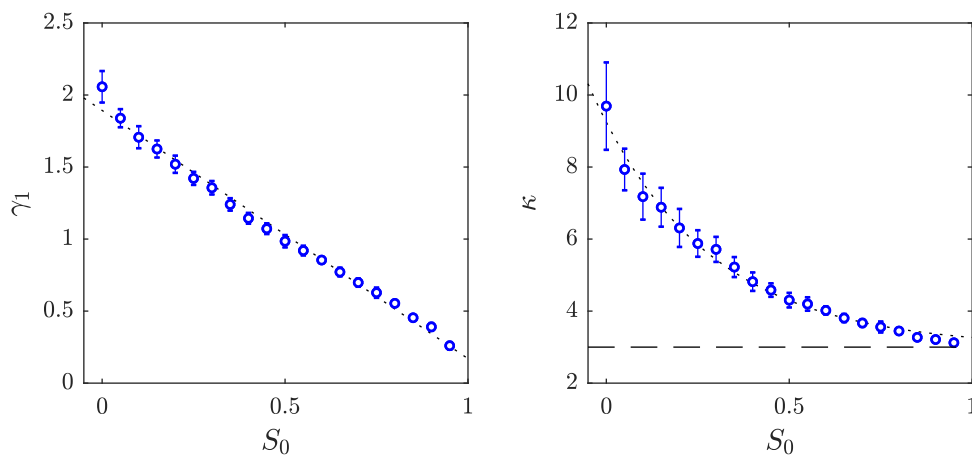
$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^4]}{(\mathbb{E}[(X - \mu)^2])^2}. \quad (3.10)$$

Voor een Gaussische verdeling geldt $\gamma_1 = 0$ en $\kappa = 3$. Figuur 3.6 bevestigt de evolutie naar een Gaussische verdeling naarmate de spaarfactor naar 1 nadert. Aangezien machtswetten een grotere kurtosis hebben dan de exponentiële en Gaussische verdelingen, kan ook een machtswetregime met dikke staart worden uitgesloten.

* De kurtosis wordt vaak geïnterpreteerd als de *gepiektheid*, maar bevat eigenlijk weinig informatie over het gebied rond het gemiddelde, typisch de piek^[41].



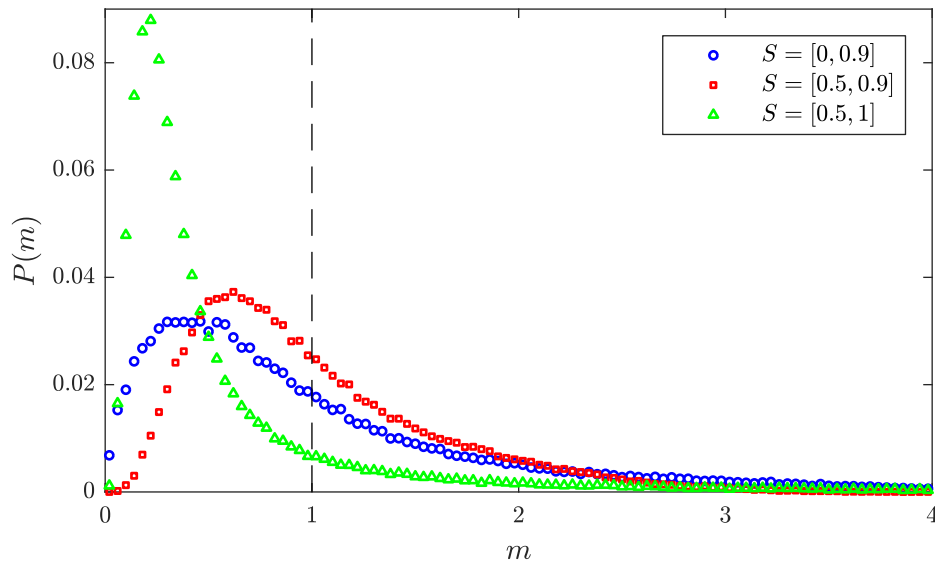
Figuur 3.5 – Gamma-distributie parameters van de verdeling in het kinetische uitwisselingmodel met vaste spaarfactor S_0 . De stippellijnen zijn de theoretische voorschriften uit vergelijkingen (3.7) en (3.8). De simulatieparameters zijn dezelfde als in Figuur 3.4. De foutenvlaggen zijn te klein om waar te nemen.



Figuur 3.6 – Scheefheid en kurtosis van de verdeling in het kinetische uitwisselingmodel met vaste spaarfactor S_0 . De scheefheid daalt lineair met de spaarfactor, terwijl het verloop van de kurtosis het best wordt beschreven door een exponentiële daling. De simulatieparameters zijn dezelfde als in Figuur 3.4.

3.3 Uitwisselen met uniform verdeelde spaarfactor

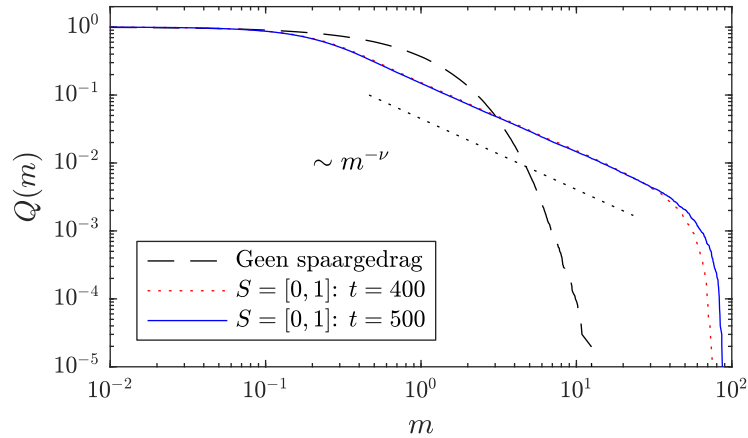
Een interessant verschil treedt op wanneer een differentiëring van het spaargedrag wordt ingevoerd^[6]. Dit gebeurt door een individuele en onveranderlijke spaarfactor aan elke agent toe te kennen, willekeurig gesampled uit een uniforme verdeling in het interval $[S_{min}, S_{max}]$. In Figuur 3.7 tonen we het histogram van de stationaire verdeling voor drie verschillende intervallen. De ondergrens S_{min} blijkt een gelijkaardig effect als de vaste spaarfactor S_0 te hebben: naarmate deze groeit, daalt de waarschijnlijkheid om een erg laag kapitaal te bezitten. Uit de sterke gelijkenis tussen de curves voor $[0, 0.9]$ en $[0.5, 0.9]$ blijkt dat de staart van de verdeling kwalitatief niet beïnvloed wordt door de waarde S_{min} . In wat volgt stellen we $S_{min} = 0$.



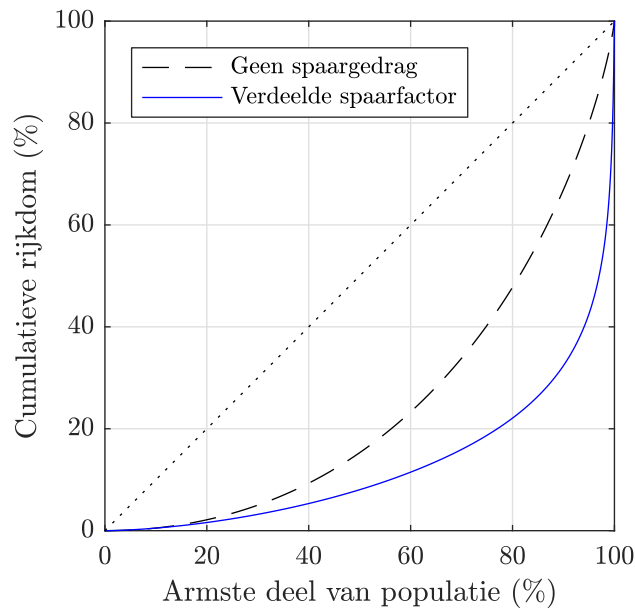
Figuur 3.7 – Verdelingsfunctie van het uitwisselingsmodel met verdeelde spaarfactor. Het histogram heeft binbreedte 0.04. De figuur is het resultaat van 10 onafhankelijke simulaties in een populatie van $N = 10,000$ agenten met initiële rijkdom $m_i^{(0)} = 1$. De stationaire toestand werd bereikt na 400 sweeps.

De bovengrens S_{max} heeft een meer uitgesproken effect, zoals blijkt uit het verschil tussen de curves voor $[0.5, 0.9]$ en $[0.5, 1]$. Wanneer de bovengrens van de verdeling gelijk wordt aan 1, verandert het histogram in een meer gepiekte verdeling met langere staart. Uit de cumulatieve verdelingsfunctie, getoond in Figuur 3.8, blijkt duidelijk dat de rijkere klasse ($m > 0.5$) een machtswet $P(m) \sim m^{-(1+\nu)}$ volgt. De exponent voor deze verdeling wordt bepaald als $1 + \nu = 2.038 \pm 0.031$, in goede overeenkomst met de waarde $1 + \nu = 2$ vermeld door Chatterjee and Chakrabarti^[6].

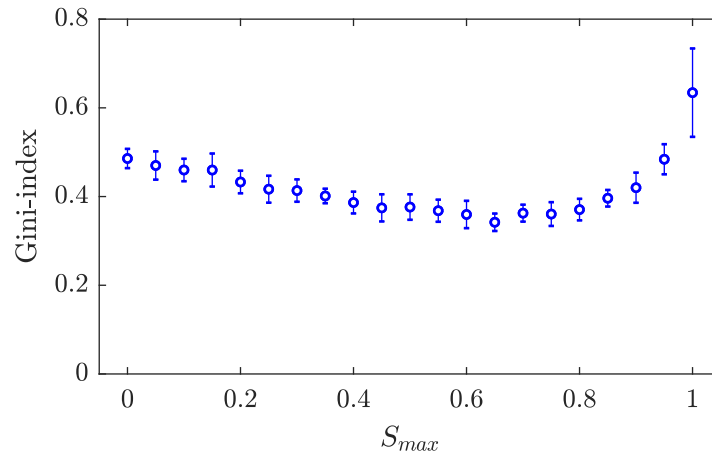
De zwaardere staart in de machtswetverdeling impliceert een groter gewicht van hoge bedragen. Dit wordt bevestigd door de trage stijging in de laagste percentielen en sterke stijging in de hoogste percentielen van de Lorenz-curve, getoond in Figuur 3.9. De Gini-index voor ongelijkheid is toegenomen van $G \approx 0.50$ tot $G \approx 0.74$. Ten slotte tonen we in Figuur 3.10 de Gini-index voor een groter bereik van $[0, S_{max}]$, waaruit opnieuw blijkt dat de ongelijkheid slechts drastisch toeneemt wanneer $S_{max} = 1$. Voor de volledigheid tonen we in Figuur 3.11 de parameters van de gamma-distributie die de evenwichtsverdeling beschrijft.



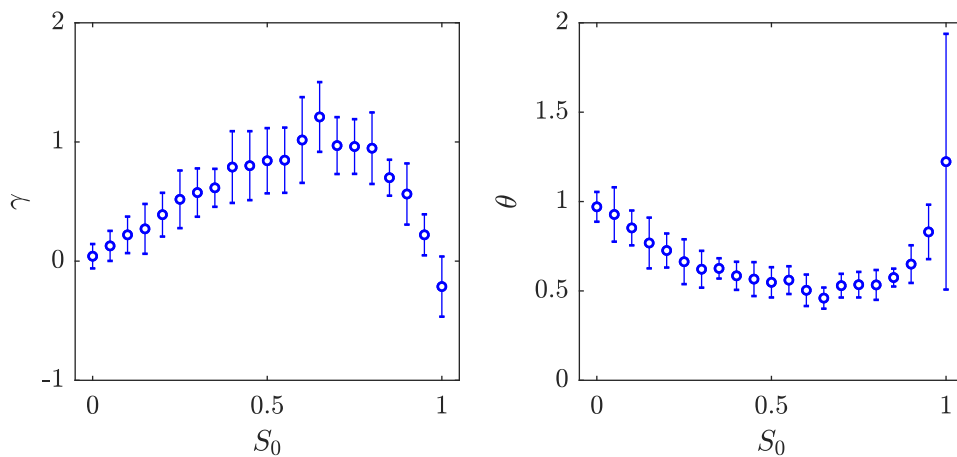
Figuur 3.8 – Cumulatieve verdelingsfunctie van het uitwisselingsmodel met spaarfactoren uniform verdeeld in het interval $[0, 1]$. De figuur is het resultaat van 10 onafhankelijke simulaties in een populatie van $N = 10,000$ agenten met initiële rijkdom $m_i^{(0)} = 1$. Het samenvallen van de curves na 400 en 500 sweeps toont aan dat de stationaire toestand bereikt werd; enkel voor $m \gg 1$ is er nog verandering merkbaar. De hoge bedragen voldoen aan een machtswet met $1 + \nu \approx 2.04$, getoond als stippellijn. De exponentiële *cutoff* bij erg hoge bedragen is een gevolg van de eindige dataset. De streepjeslijn toont ter vergelijking de exponentiële verdeling uit het model zonder spaargedrag, Figuur 3.1.



Figuur 3.9 – Lorenz-curve van het uitwisselingsmodel met spaarfactoren uniform verdeeld in het interval $[0, 1]$. De Gini-index bedraagt $G \approx 0.74$. De streepjeslijn toont ter vergelijking de exponentiële verdeling uit het model zonder spaargedrag. De simulatieparameters zijn dezelfde als in Figuur 3.8.



Figuur 3.10 – Gini-index van het uitwisselingsmodel met spaarfactoren uniform verdeeld in het interval $[0, S_{max}]$. Elk datapunt is het resultaat van 10 onafhankelijke simulaties in een populatie van $N = 10,000$ agenten met initiële rijkdom $m_i^{(0)} = 1$.



Figuur 3.11 – Parameters van de gamma-distributie in het uitwisselingsmodel met uniform verdeelde spaarfactoren. De simulatieparameters zijn dezelfde als in Figuur 3.10.

De sterke afhankelijkheid van de bovengrens $S_{max} \rightarrow 1$ suggereert dat de verhoogde ongelijkheid het gevolg is van de aanwezigheid van een kleine groep *hoarders* of hamsteraars, die geld accumuleren en hiervan vrijwel niets ter beschikking stellen in latere transacties. Deze intuïtie wordt bevestigd door een verband af te leiden tussen de individuele spaarfactor en de rijkdom van agenten^[40]. In elke transactie wordt het totale ter beschikking gestelde bedrag willkeurig verdeeld over de betrokken agenten. Deze verdeling is gemiddeld $\langle \epsilon \rangle = 0.5$. Opdat de verdeling in evenwicht stationair blijft, moeten dus ook de bedragen die beide agenten ter beschikking stellen gemiddeld gelijk zijn:

$$m_i(1 - S_i) \approx m_j(1 - S_j). \quad (3.11)$$

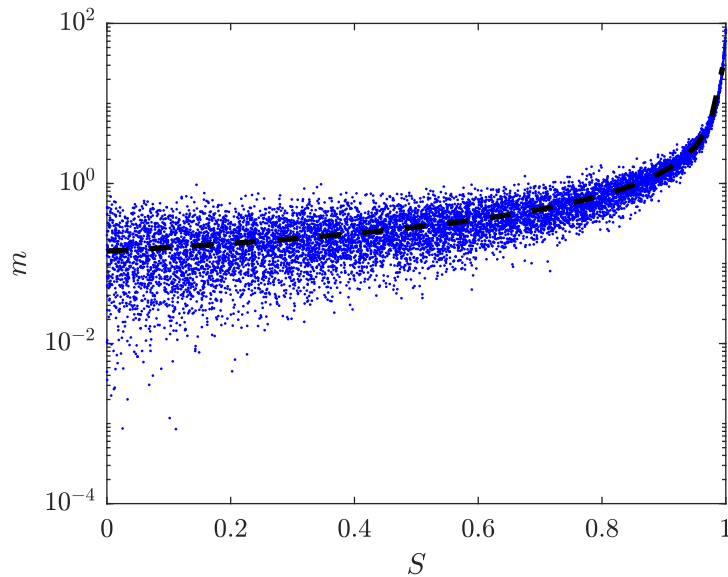
Dit suggereert het verband

$$\langle m(S) \rangle = \frac{C}{1 - \langle S \rangle}, \quad (3.12)$$

waarin het gemiddelde wordt genomen over alle agenten met eenzelfde S . Figuur 3.12 toont het verband tussen de spaarfactor en de rijkdom in een evenwichtssituatie. Bedragen substantieel groter dan $m_i^{(0)}$ komen uitsluitend voor bij agenten met spaarfactor $S \geq 0.8$, terwijl de grote meerderheid met $m_i \leq m_i^{(0)}$ bestaat uit agenten met een lage spaarfactor. Het gemiddelde verloop wordt inderdaad goed beschreven door vergelijking (3.12).

De voornaamste conclusie uit deze sectie is dat de machtswet die voorkomt in empirische verdelingen (Figuren 1.5 en 1.6) kan worden gereproduceerd door gedifferentieerd spaargedrag toe te laten waarbij de spaarfactor arbitrair dicht naar 1 kan naderen. De deelpopulatie met hoge spaarfactor accumuleert geld en vormt zo een elite die de Pareto-verdeling volgt.

Tot slot merken we nog op dat de stationaire toestand erg laat tot stand komt. In het model zonder spaargedrag werd deze bereikt na 10 sweeps, en zelfs bij hoge waarden van de constante spaarfactor was geen evolutie merkbaar na 100 sweeps. Uit Figuur 3.8 blijkt echter nog verschil tussen de verdelingen na 400 en 500 sweeps bij verdeelde spaarfactoren. Dit verschil is met name zichtbaar in het hoogste regime. Hieruit blijkt dat de accumulatie van geld bij de elite -en dus de vorming van de zware staart- doorgaat op een langere tijdsschaal dan het ontstaan van evenwicht in de armere klasse. Dit resultaat wordt bevestigd door Patriarca et al.^[40].



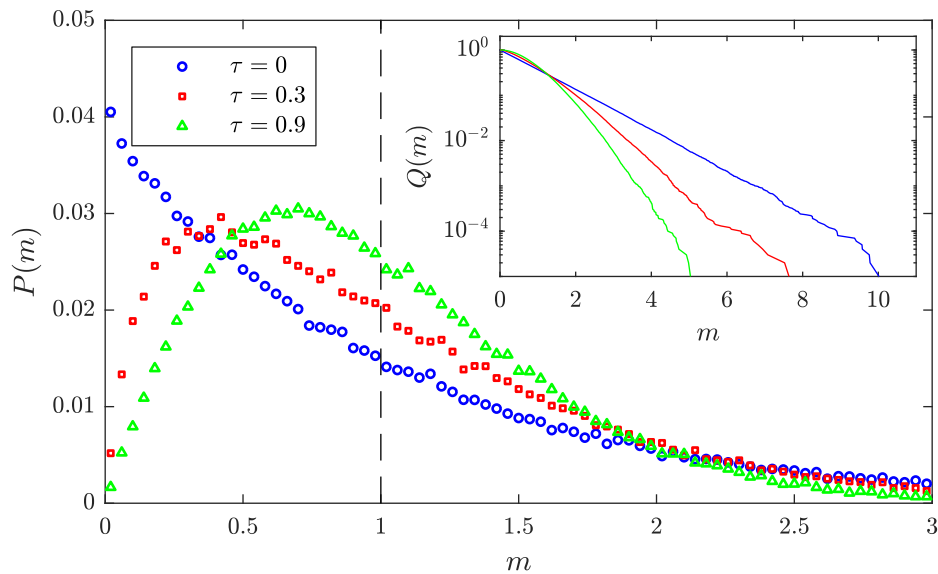
Figuur 3.12 – Verband tussen de spaarfactor en de rijkdom van agenten in het uitwisselingsmodel met verdeelde spaarfactoren in het interval $[0, 1]$. De Figuur is één realisatie van evenwicht in een populatie van $N = 10,000$ agenten met initiële rijkdom $m_i^{(0)} = 1$. De streepjeslijn toont het theoretische verband (3.12).

3.4 Herverdelende belasting

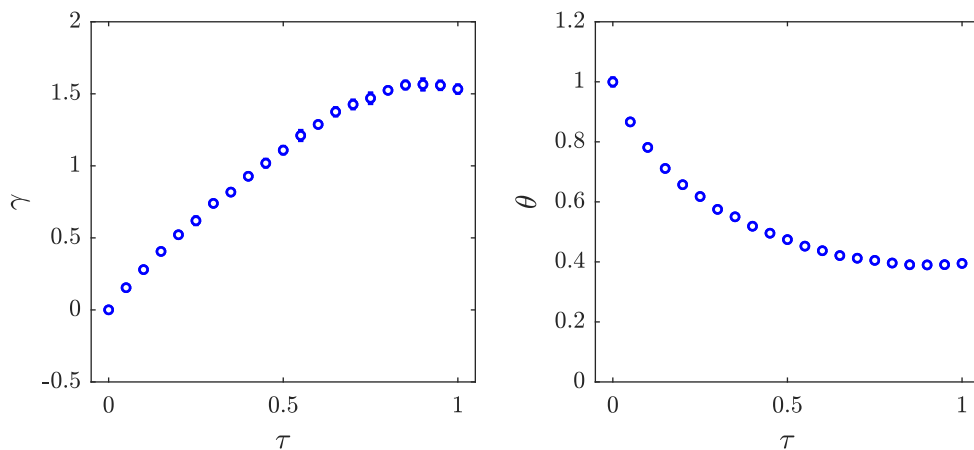
Naast het introduceren van spaargedrag kan de armoede en ongelijkheid ook worden tegengegaan door het heffen van een herverdelende belasting op elke transactie^[8]. Hierbij wordt een vaste fractie $0 < \tau < 1$ afgehouden van het uitgewisselde bedrag, en vervolgens over de hele populatie herverdeeld. Figuur 3.13 toont de evenwichtsverdeling voor enkele waarden van τ . Net als de spaarfactor blijkt het herverdelende mechanisme de ophoping van agenten bij $m_i \rightarrow 0$ ongedaan te maken, waardoor een piek bij eindige m verschijnt.

Deze waarnemingen worden bevestigd door Drăgulescu and Yakovenko^[8], hoewel ze niet verder ingaan op de aard van de verdeling of de afhankelijkheid van τ . De verdeling voor $\tau = 0.9$ suggereert dat deze niet naar een Gaussische verdeling neigt wanneer $\tau \rightarrow 1$. De log-lineaire inzet toont bovendien aan dat de staart exponentieel blijft. De verdeling lijkt bij benadering een gamma-distributie te volgen. In Figuur 3.14 tonen we het verloop van de gefitte parameters in functie van de belasting τ . Deze blijven eindig en met kleine foutenmarges over het hele interval, waaruit we besluiten dat de gamma-distributie ook hier een goede benadering vormt.

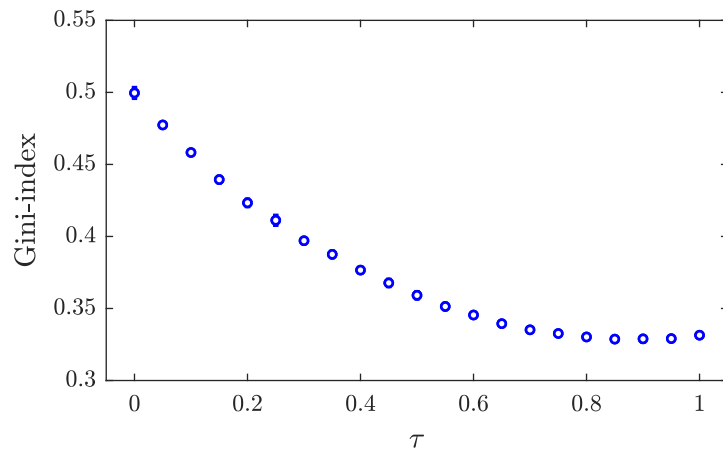
Ten slotte tonen we in Figuur 3.15 de Gini-index in functie van de belasting. Vergeleken met de spaarfactor (Figuur 3.4) heeft de herverdelende belasting een eerder beperkte invloed op de ongelijkheid. Een belangrijk verschil is dat de belasting een globaal herverdelingsmechanisme is, in tegenstelling tot de spaarfactor die op het niveau van individuele agenten de armoede en bijgevolg ongelijkheid beperkt. Het onderscheid tussen globale en lokale (egoïstische) maatregelen zal belangrijker worden wanneer verderop de interactiepartners wordt beperkt via een segregatiemechanisme.



Figuur 3.13 – Stationaire verdeling van het kinetische uitwisselingsmodel met herverdelende belasting, voor verschillende waarden van τ . Het histogram heeft binbreedte 0.04. De inzet toont de cumulatieve verdelingsfunctie met exponentiële staart. De figuur is het resultaat van 1000 simulaties van 100 sweeps in een populatie van $N = 100$ agenten met initiële rijkdom $m_i^{(0)} = 1$.



Figuur 3.14 – Parameters van de gammadistributie gefit aan de verdeling van het kinetische uitwisselingsmodel met herverdelende belasting, voor verschillende waarden van τ . De meestal onzichtbare foutenvlaggen zijn de standaardafwijking na 10 onafhankelijke simulaties in een populatie van 10,000 agenten met initiële rijkdom $m_i^{(0)} = 1$.



Figuur 3.15 – Gini-index van de verdeling van het kinetische uitwisselingsmodel met herverdelende belasting, voor verschillende waarden van τ . De simulatieparameters zijn hetzelfde als in Figuur 3.14.

Hoofdstuk 4

Modellen voor spontane segregatie

In het vorige hoofdstuk werd de simulatie van financiële transacties en het verband met statistische fysica besproken. Ook voor spontane segregatie bestaan vereenvoudigde modellen, die eveneens een sterke overeenkomst met fysische systemen vertonen. In dit hoofdstuk wordt het klassieke Schelling-model geïntroduceerd, en bespreken we de link met magnetische systemen zoals het Ising-model.

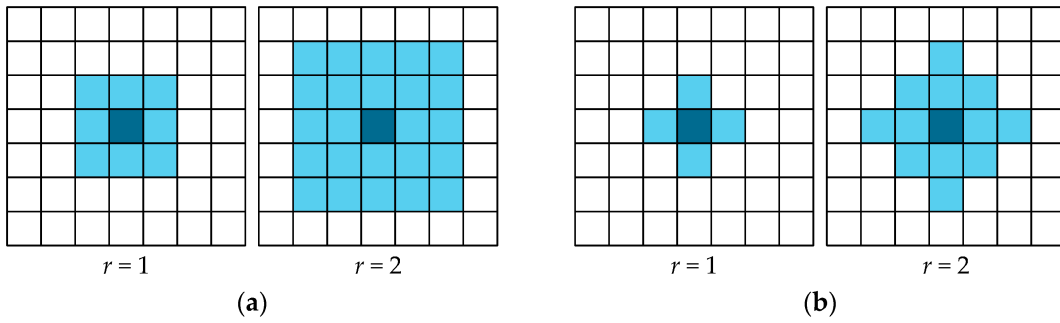
4.1 Roostermodellen

Modellen voor residentiële segregatie zijn typisch gedefinieerd op een tweedimensionaal rooster. Alvorens specifieke modellen te bespreken, overlopen we kort enkele algemene eigenschappen.

4.1.1 Buurten en afstanden in het rooster

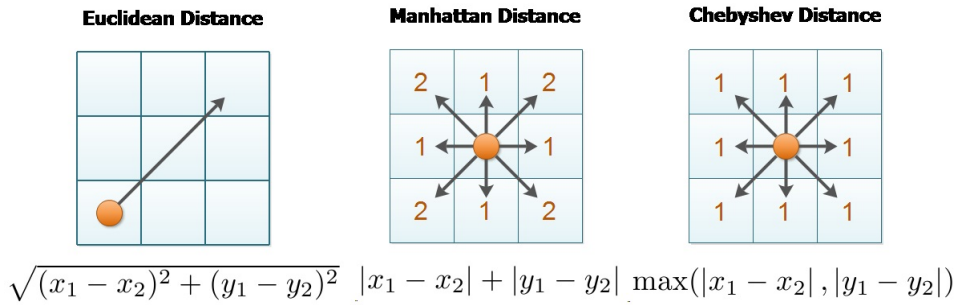
Het gedrag van agenten (of magnetische spins) in een rooster wordt bepaald door de eigenschappen van andere agenten in hun directe omgeving. De *buurt* die daarbij in rekening wordt genomen kan zowel in vorm als grootte op verschillende manieren worden gedefinieerd, wat (afhankelijk van het model) een invloed kan hebben op het macroscopische resultaat. Figuur 4.1 toont de meest gebruikte Moore en Von Neumann buurten van verschillende groottes. De Von Neumann buurt met $r = 1$ komt overeen met de naaste naburen zoals deze in de fysica meestal worden gekozen. Ook grootheden als de Freeman-index (Sectie 2.3.2) zijn afhankelijk van de gehanteerde buurt. Een schaakbordpatroon is een toestand van anti-segregatie ($FSI = -1$) wanneer men de Von Neumann-buurt beschouwt, maar slechts een niet-gesegregerde toestand ($FSI = 0$) bij gebruik van de Moore-buurt. Hoewel zulke pathologische gevallen in praktijk niet voorkomen, gebruiken we in het vervolg van deze thesis steeds eenzelfde buurt voor de dynamica van het systeem en het berekenen van de segregatie.

Om bepaalde grootheden op te meten is ook een afstandsmaat nodig. Figuur 4.2 toont drie verschillende manieren om afstanden te meten. De Euclidische afstand is degene die doorgaans in een continue (vlakke) ruimte wordt gebruikt. De Chebyshev en Manhattan



Figuur 4.1 – De tweedimensionale Moore (a) en Von Neumann (b) buurten van verschillende groottes. Afbeelding overgenomen uit ^[42].

afstandsmaten zijn de logische opties bij het gebruik van interacties binnen respectievelijk Moore en Von Neumann buurten. De Manhattan afstandsmaat ontleent haar naam aan het verkeer in de New Yorkse binnenstad. Door de strikt loodrechte ligging van straten is ook daar de afgelegde weg de som van de verticale en horizontale afstand.



Figuur 4.2 – Afstandsmaten in het tweedimensionale rooster. Afbeelding overgenomen uit ^[43].

4.1.2 Randvoorwaarden

In eindige roosters moeten steeds randvoorwaarden worden gespecificeerd. Periodische randvoorwaarden, waarbij rand-effecten worden vermeden via een torus-vormig rooster, zijn een logische keuze wanneer men geïnteresseerd is in de thermodynamische limiet, d.w.z. oneindige systemen. Andere randvoorwaarden kunnen gerechtvaardigd zijn wanneer men eindige systemen wil beschouwen. Zo kan men voor de dynamica van een groep mensen in een beperkte ruimte zoals een receptie of een conferentiehhal beargumenteren dat periodische randvoorwaarden weinig zinvol zijn ^[44;45]. In dit werk kiezen we consequent voor periodische randvoorwaarden, gemotiveerd door de focus op grote systemen en het verband met de fysische literatuur.

4.2 Het Schelling-model

In het kielzog van de politieke en sociale verschuivingen in de VS onderzocht econoom Thomas C. Schelling in de jaren '60 en '70 hoe ruimtelijke segregatie tussen etnische bevolkingsgroepen tot stand kon komen als gevolg van individuele voorkeuren. Hij ontwikkelde hiertoe een verrassend eenvoudig *spatial proximity* model waarin agenten een bepaalde tolerantie hebben voor de aanwezigheid van personen van andere etniciteit in hun onmiddellijke omgeving, en op basis daarvan onderling bewegen in de zoektocht naar een acceptabele woonplaats^[33;44]. Het Schelling-model vormde de basis voor de verdere ontwikkeling van agent-gebaseerde modellen voor sociale fenomenen. Voor zijn bijdragen aan de toepassing van speltheorie in economische en politieke kwesties won Thomas Schelling in 2005 de Nobelprijs voor Economie.

De voornaamste meerwaarde van het Schelling-model ligt in het aantonen dat macroscopische fenomenen als segregatie kunnen optreden als niet-triviaal gevolg van individueel gedrag dat niet deze intentie heeft^[46;45]. Vanaf een schijnbaar arbitraire drempelwaarde voor de individuele tolerantie, ontstaat een abrupte verandering of fase-overgang van een macroscopische configuratie met een hoge mate van integratie naar een gesegregeerde toestand. Het optreden van segregatie tussen tolerante individuen heeft implicaties betreffende de (on)mogelijkheid om integratie te bevorderen via politiek beleid^[45].

Over het Schelling-model en varianten bestaat een uitgebreide literatuur. Naast het oorspronkelijke artikel^[33] en een langere analyse^[44] publiceerde Schelling deze en andere bevindingen eveneens in het boek *Micromotives and Macrobehavior*^[47]. Sinds de jaren '80 leiden computersimulaties van eenvoudigere varianten tot de door Schelling verwachte segregatie in grote domeinen. Een noemenswaardige vroege publicatie in deze context is Jones^[46]. Een recentere beschrijving van het Schelling-model met aandacht voor complexere individuele voorkeuren (nutsfuncties) is te vinden in Pancs and Vriend^[45].

4.2.1 Individuele voorkeuren en de nutsfunctie

In het Schelling-model wordt een tweedimensionaal* rooster beschouwd waarin elke roostersite ofwel leeg is, ofwel wordt bewoond door een persoon uit populatie A of B. Deze populaties staan model voor eender welke binaire opdeling tussen mensen waarbij de agenten zelf niet van type kunnen veranderen. Hun aantallen zijn behouden. De fundamentele veronderstelling is dat elke persoon een voorkeur heeft om zich te omringen met burens van zijn eigen soort. De oorzaken van deze voorkeuren, alsook de invloed van georganiseerde segregatie, vallen buiten het model.

Agenten aanvaarden in hun directe omgeving zowel burens van hun eigen als van de andere groep, maar zijn slechts in beperkte mate bereid tot een lokale minderheid te behoren. In economische termen associeert elke agent met elke locatie in het rooster een bepaalde hoeveelheid *nut* of *utility*, die wordt bepaald door het aantal agenten n_A en n_B van de respectievelijke soorten in de buurt van deze locatie. Zowel Schelling^[44] als het merendeel van recentere studies^[46;45] beschouwen hiertoe de 8 naburen in de Moore-buurt met $r = 1$ rondom de roostersite. De rationele agenten wensen steeds hun nut te maximaliseren. In het oorspronkelijke model is de nutsfunctie voor een agent uit populatie A:

* Schelling^[33] ontwikkelde eerst een ééndimensionaal model. Dit model verschilt sterk van de tweedimensionale versie, en wordt niet verder besproken.

$$u = \begin{cases} 0 & \text{als } n_B/(n_A + n_B) > \Delta, \\ 1 & \text{als } n_B/(n_A + n_B) < \Delta. \end{cases} \quad (4.1)$$

Met deze stapfunctie is een agent ontevreden wanneer het percentage naburen van de andere soort een bepaalde drempelwaarde of *tolerantie* Δ overschrijdt, maar verder onverschillig voor de samenstelling van hun buurt. Individuën streven dus niet naar een volledig homogene buurt.

4.2.2 Dynamica en clustering

Om hun nut te maximaliseren moeten de agenten kunnen verhuizen doorheen het rooster. De regels hiervoor zijn voor de uiteindelijke configuratie even essentieel als de nutsfunctie. In het oorspronkelijke model worden lege roostersites geïntroduceerd, waarnaar ontevreden agenten kunnen verhuizen^[44;45]. Alternatief kan men individuele agenten van type laten veranderen, wat geïnterpreteerd wordt als de emigratie van deze agent uit het rooster, gevolgd door de immigratie van een geschiktere agent^[46]. Het systeem is in dit geval niet meer gesloten, maar verbonden aan een oneindig reservoir van agenten^[48]. In modellen met agenten van twee soorten kan zulke vervanging eenduidig gebeuren. Dit wordt minder evident wanneer we met elke agent een bepaalde rijkdom associëren, omdat het niet duidelijk is welke rijkdom de nieuwe agent moet krijgen. Dit soort dynamica wordt in deze thesis daarom niet verder behandeld. Een ander mogelijk verhuismechanisme is de onderlinge verwisseling van twee agenten. Het ruilen van woonplaats is sociologisch niet realistisch, en wordt daarom doorgaans niet beschouwd^[49]. Voorlopig volgen we Schelling's methode met vacante plaatsen; we komen later terug op andere verhuismechanismen in de context van het Ising-model.

Op elke beurt wordt een willekeurige agent gekozen die de kans krijgt te verhuizen. Schelling's nutsfunctie neemt slechts twee waarden aan, waardoor de vraag rijst wat er gebeurt wanneer agenten hun nut niet kunnen verbeteren. In Schelling's model blijven tevreden agenten ($u = 1$) ter plaatse, terwijl ontevreden agenten ($u = 0$) verhuizen naar de dichtste vacante plaats waar $u = 1$ bereikt wordt^[44]. Dit is gemotiveerd door de kost van het verhuizen: onnodig of onnodig ver verhuizen is een irrationele uitgave^[45]. Zoals verderop zal blijken levert deze regel geen grootschalige segregatie, doordat agenten niet verhuizen wanneer de voorgestelde positie hetzelfde nut oplevert als de oude^[48;50;45;51]. Verschillende aanpassingen werden voorgesteld om dit probleem te omzeilen. De meest courante is het aanpassen van de dynamica zodat agenten ook verhuizen wanneer hun nut ongewijzigd blijft^[50;45;51]. Een voorgestelde verhuis naar een willekeurige site wordt geaccepteerd wanneer het nut van de agent niet verlaagt. Dit betekent dat ook een tevreden agent verhuist indien andere gelijkwaardige sites vrij zijn, en dat een ontevreden agent die geen geschikte plaats vindt eveneens verhuist naar een willekeurige equivalente site. Beide algoritmes worden schematisch weergegeven in Algoritmes 1 en 2. De concrete MATLAB-implementaties zijn te vinden in Bijlage B.2.

Vinković and Kirman^[50] merken in het onderscheid tussen deze algoritmes de gelijkenis op met clustering in vaste en vloeibare stoffen. Clustering treedt op in binaire mengsels met positieve interactie-energie tussen deeltjes van verschillende soort. Beschouwt men voor de energie van een deeltje in functie van de samenstelling van zijn omgeving eenzelfde stapfunctie als in het Schelling-model, dan zijn deze systemen equivalent. In Algoritme 1 *vriest* het systeem vast in de eerst bereikte toestand waarin alle agenten ofwel een positie

met $u = 1$ hebben gevonden, ofwel geen acceptabele positie meer kunnen vinden. In Algoritme 2 blijven zowel tevreden als ontevreden agenten in beweging. Hierdoor kan het systeem ontsnappen uit metastabiele bevroren toestanden, en de grondtoestand met grootschalige segregatie bereiken.

Algoritme 1 Schelling-model: *vaste stof*-clustering

- 1: Kies een willekeurige agent met kleur K op positie (x_A, y_A) .
 - 2: $u_A \leftarrow \text{utility}(K, x_A, y_A)$
 - 3: Kies een willekeurige vacante site met positie (x_B, y_B) .
 - 4: $u_B \leftarrow \text{utility}(K, x_B, y_B)$
 - 5: **if** $u_B > u_A$ **then** Verplaats agent naar (x_B, y_B) .
 - 6: **end if**
-

Algoritme 2 Schelling-model: *vloeistof*-clustering

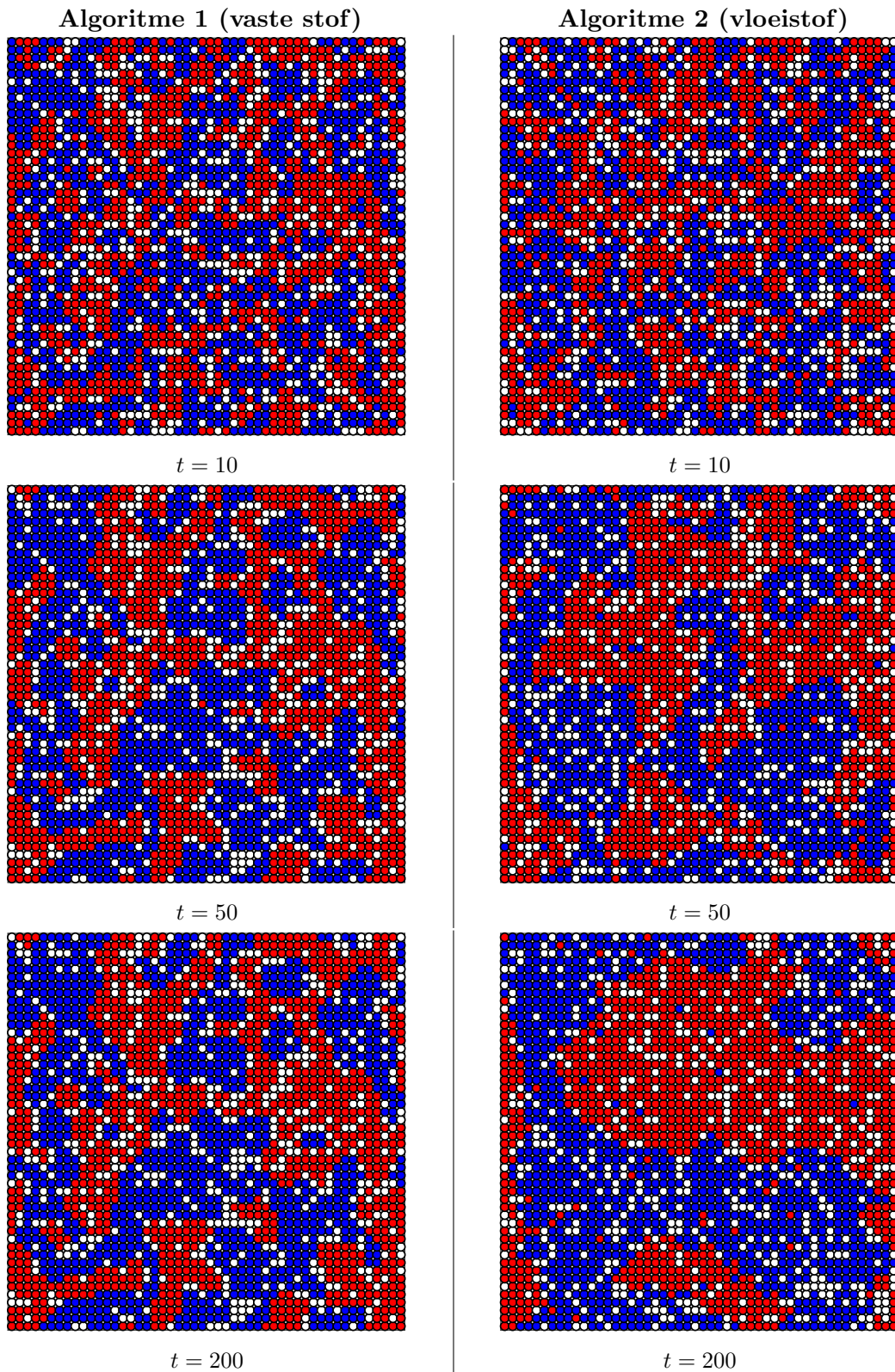
- 1: Kies een willekeurige agent met kleur K op positie (x_A, y_A) .
 - 2: $u_A \leftarrow \text{utility}(K, x_A, y_A)$
 - 3: Kies een willekeurige vacante site met positie (x_B, y_B) .
 - 4: $u_B \leftarrow \text{utility}(K, x_B, y_B)$
 - 5: **if** $u_B \geq u_A$ **then** Verplaats agent naar (x_B, y_B) .
 - 6: **end if**
-

4.2.3 Resultaten

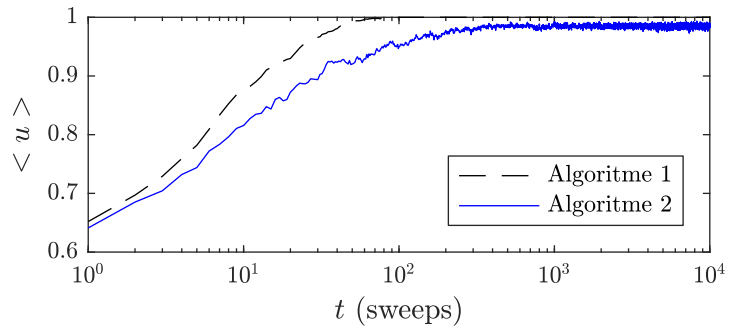
Figuur 4.3 toont de tijdsevolutie van het model met $\Delta = 0.5$, voor beide algoritmes en $p = 20\%$ vacante plaatsen. Uit de figuur blijkt dat de bescheiden wens van elke agent om niet omringd te zijn door meer verschillende dan gelijke burens, resulteert in de vorming van domeinen met uitsluitend rode of blauwe agenten. Algoritme 1 leidt echter niet tot grootschalige segregatie. De stationaire toestand, bereikt na 10 sweeps, vertoont rode en blauwe domeinen maar niet met afmetingen ter grootte van het rooster. Met Algoritme 2 worden wel grote domeinen waargenomen. Het rooster bereikt na ongeveer 1000 sweeps een toestand van volledige segregatie. Beide resultaten worden bevestigd in de literatuur^[50;51].

In Figuur 4.4 tonen we de tijdsevolutie van het gemiddelde nut in beide algoritmes. Dit bevestigt de snellere evolutie naar een stationaire toestand in het algoritme waar een verhuis slechts gebeurt bij strikte toename van het nut. De figuur illustreert bovendien dat beide algoritmes leiden tot een situatie waarin alle agenten tevreden zijn ($u = 1$). Grootschalige segregatie is in het Schelling-model dus geen nodige voorwaarde voor het vervullen van de individuele voorkeuren.

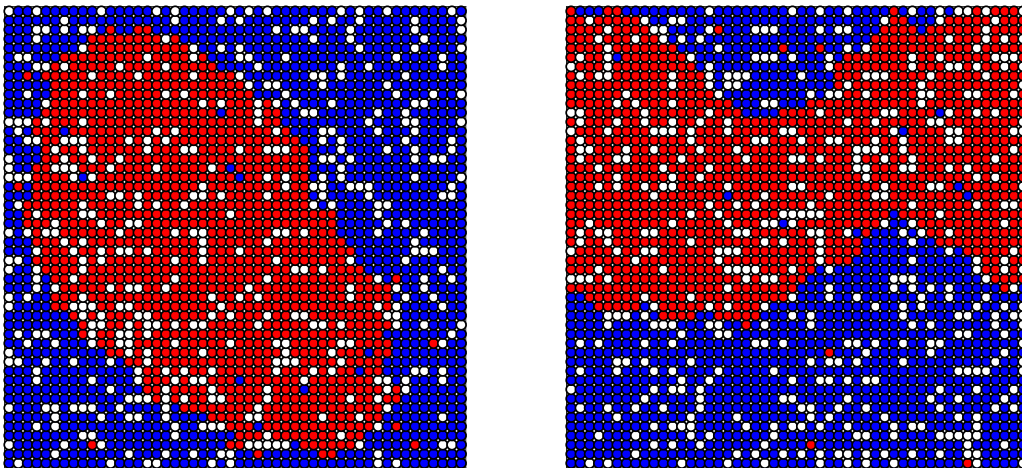
Ten slotte merken we op dat het vloeistof-algoritme steeds leidt tot één van twee mogelijke evenwichtssituaties, weergegeven in Figuur 4.5. De verklaring hiervoor is dat het clustering-algoritme het contactoppervlak tussen domeinen van verschillende agenten minimaliseert. In een periodisch rooster leidt dit tot een strook of een druppelvorm. Deze eigenschap werd eveneens opgemerkt in Vinković and Kirman^[50].



Figuur 4.3 – Tijdsevolutie (in sweeps) van het Schelling-model met $\Delta = 0.5$ in een 50×50 rooster. Er zijn evenveel rode als blauwe agenten, willekeurig verdeeld. De fractie lege plaatsen (wit) bedraagt 20%. Links: Algoritme 1, equivalent aan clustering in een vaste stof. Rechts: Algoritme 2, equivalent aan clustering in een vloeistof.



Figuur 4.4 – Tijdsevolutie van het gemiddelde nut van agenten voor beide algoritmes van het Schelling-model. Simulatie in een 50×50 rooster.



Figuur 4.5 – Evenwichtstoestanden ($t = 2000$) van het Schelling-model met Algoritme 2.

4.2.4 Faseovergangen

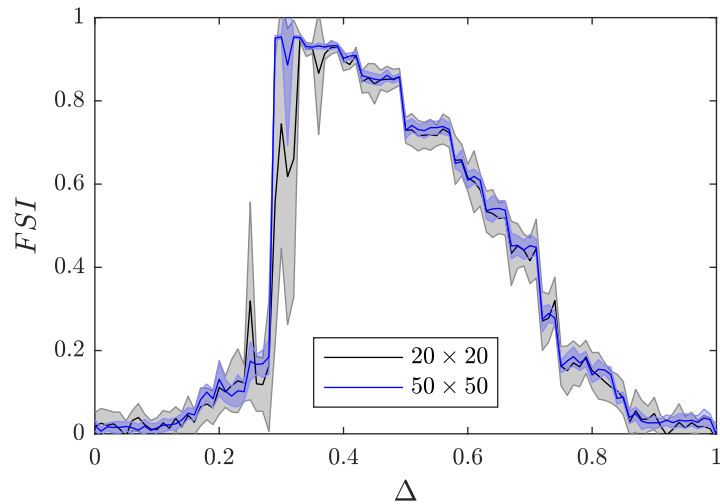
Naast de regels voor de dynamica kan men ook het percentage vacante plaatsen p en de tolerantie Δ variëren. Intuïtief verwacht men een dalende segregatie naarmate Δ toeneemt. Vanuit fysisch oogpunt is het interessant te onderzoeken hoe de overgang van segregatie naar desegregatie verloopt, en of we hier fases in kunnen herkennen. Een volledig fase-diagram in de (Δ, p) -ruimte werd opgesteld door Gauvin et al.^[51] en valt buiten het bestek van dit werk. We bespreken hier enkel het verloop van de segregatie als functie van de tolerantie bij een vast aantal vacante plaatsen.

Figuur 4.6 toont voor beide algoritmes de Freeman segregatie-index in functie van de tolerantie. Een eerste belangrijke opmerking is dat de eindige Moore-buurt een continu verloop van de segregatie in functie van de tolerantie onmogelijk maakt, aangezien er slechts 8 burens worden beschouwd. De toleranties waarbij individuele beslissingen en dus ook macroscopische eigenschappen kunnen veranderen, zijn daarom beperkt tot de fracties $1/8, \dots, 8/8, 1/7, \dots, 7/7$, enzovoort. Dit discrete karakter is ook uit de figuur op te maken. In deze zin zijn de faseovergangen niet van dezelfde aard als die in functie van de temperatuur in magnetische systemen (zie verder).

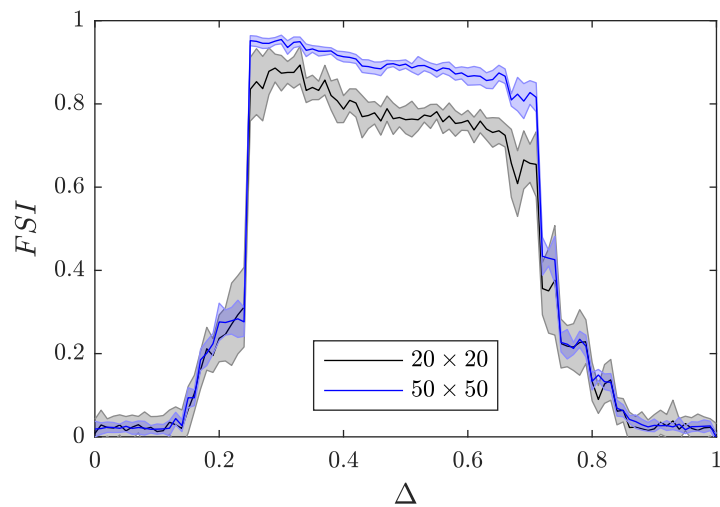
In beide algoritmes verschijnt een abrupte overgang naar desegregatie bij zeer lage tolerantie. In dit regime zijn agenten nog zelden in staat een acceptabele plaats te vinden. In Algoritme 1 verhuizen ze nooit, in Algoritme 2 verhuizen ze altijd. In beide gevallen is het resultaat een gedesegegreerde toestand. Deze ingevroren fase is een artefact van de deterministische dynamica, en de abrupte transitie is dan ook geen fase-overgang in de thermodynamische zin^[51]. Voor $\Delta \gtrsim 0.3$ daalt de segregatie naarmate de tolerantie verhoogt. In het vaste stof-algoritme gebeurt dit geleidelijk. Het vloeistof-model daarentegen vertoont een abrupte daling van $FSI \approx 0.82$ naar $FSI \approx 0.44$ op de kritieke waarde $\Delta_C = 5/7 \approx 71\%$. Dit is in goede overeenkomst met de waarde $2/3$ geopperd door Schelling^[44], en numerieke resultaten bekomen door Gauvin et al.^[51]. We merken hierbij op dat de waarde van Δ_C afhangt van de dichtheid p aan lege sites. De conclusie dat grootschalige segregatie kan optreden in uitermate tolerante samenlevingen is wellicht de belangrijkste verdienste van het Schelling-model. Zelfs onder individuen die in hun directe omgeving meer dan 70% agenten uit de andere groep tolereren, vertoont de macroscopische configuratie een grootschalige opdeling van bevolkingsgroepen.

4.2.5 Varianten en kritiek op het model

Er bestaan een groot aantal variaties op het hierboven beschreven model, waarvan we kort de voornaamste vermelden. Ten eerste kan men alternatieve nutsfuncties beschouwen, waarbij agenten bijvoorbeeld een grotere voorkeur voor integratie hebben. Enkele voorbeelden hiervan worden getoond in Figuur 4.7. Dit werd bestudeerd door Pancs and Vriend^[45]. In het bijzonder blijkt emergente segregatie een robuust resultaat voor alle getoonde nutsfuncties. Schelling^[44] zelf bestudeerde modellen waarin de aantallen en toleranties van de A- en B-populaties van elkaar verschillen. Verder kan men ook de grootte van de buurt als variabele parameter beschouwen. Een groter *gezichtsveld* van de agenten heeft een invloed op de grootte van de gevormde domeinen^[49]. Tot slot kan het model uitgebreid worden naar een netwerk, waarbij de buurt rondom een agent bestaat uit alle nodes binnen een afstand van een zeker aantal links. Deze uitbreiding werd onder meer door Fagiolo et al.^[36] bestudeerd. Bij een tolerantie van 50% wordt een-



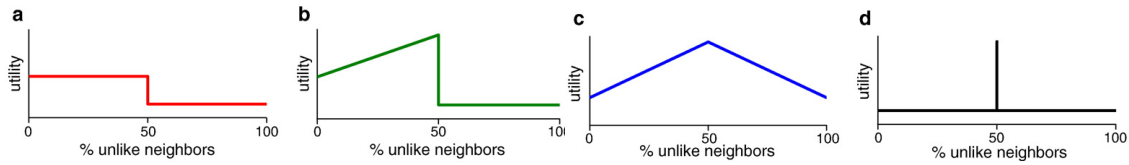
(a) Algoritme 1: vaste stof-clustering



(b) Algoritme 2: vloeistof-clustering

Figuur 4.6 – Freeman segregatie-index in functie van de individuele tolerantie, voor beide algoritmes voor het Schelling-model. De curves werden bekomen na 1000 tijdstappen in roosters van de gegeven groottes. De foutenintervallen geven de standaardafwijking na 10 onafhankelijke simulaties. Kleine roosters werden gebruikt om de simulatietijd te beperken tot ± 4 uur. Het verschil tussen het 20×20 en het 50×50 rooster is groter bij Algoritme 2 dan bij Algoritme 1. Het is logisch dat *finite size effects* minder uitgesproken zijn in een systeem dat geen grote domeinvorming vertoont.

zelfde grootschalige segregatie gevonden in regelmatige, willekeurige, schaalvrije en *small world*-netwerken.



Figuur 4.7 – Nutsfuncties voor het Schelling-model. Functie (a) is het oorspronkelijke model bij $\Delta = 0.5$. Functie (b) voegt hieraan een voorkeur voor integratie toe. Functie (c) bevoordeelt een maximale integratie, zonder onderscheid tussen een meerderheid van gelijke of verschillende burens. Bij functie (d) worden alle verdelingen die afwijken van een perfecte integratie gelijk benadeeld. Figuur overgenomen uit ^[45].

Ondanks zijn eenvoud en pedagogische meerwaarde wordt het Schelling-model frequent bekritiseerd. Ten eerste bevat zelfs het eenvoudigste model twee parameters (Δ , p) die een wezenlijke invloed hebben op de uiteindelijke segregatie. Bovendien leiden -zoals getoond- niet alle implementaties tot grootschalige segregatie. De ingevroren toestand in kleine domeinen en de desegregatie bij lage tolerantie zijn beiden het gevolg van problematische deterministische dynamica. In de volgende sectie introduceren we het bekende Ising-model voor ferromagneten, en tonen we aan hoe de beperkingen van het Schelling-model omzeild kunnen worden door gebruik te maken van thermische fluctuaties.

4.3 Het Ising-model en thermische fluctuaties

De binaire agenten met een voorkeur voor gelijke naburen vertonen op het eerste zicht een sterke gelijkenis met magnetische spins. Het Ising-model voor ferromagneten ^[52] is veruit het bekendste model voor dit soort systemen, en één van de meest bestudeerde modellen in statistische fysica. Dit model uit 1925 illustreert, ondanks zijn schijnbare eenvoud, niet-triviale eigenschappen van faseovergangen en kritische fenomenen die voorkomen in een groot aantal fysische systemen ^[53]. Onderstaande beschrijving doet de implicaties het model onvermijdelijk onrecht aan. Voor een vollediger beschrijving verwijzen we naar Schroeder ^[54].

Het Ising-model beschrijft een rooster in d dimensies, met op elke roostersite $\{i\}$ een klassieke spin S_i die zich in een op- of neer-toestand kan bevinden:

$$S_i = \pm 1. \quad (4.2)$$

Naburige spins in het rooster leveren een negatieve bijdrage tot de interactie-energie wanneer ze gelijk gericht zijn ($\uparrow\uparrow$ of $\downarrow\downarrow$), en een positieve bijdrage wanneer ze verschillen ($\uparrow\downarrow$). De Hamiltoniaan van het systeem zonder uitwendig magneetveld is gegeven door

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j, \quad (4.3)$$

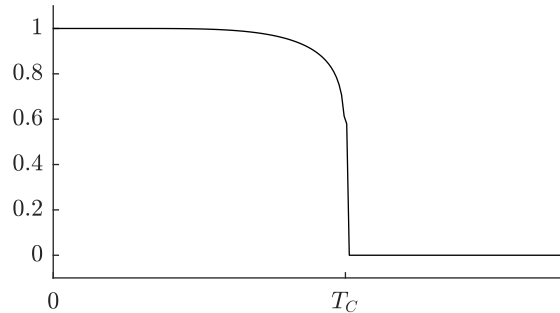
waarbij de som loopt over naaste naburen. Doorgaans wordt de Von Neumann-buurt met $r = 1$ beschouwd in een rooster zonder lege sites. Het minimaliseren van deze Hamiltoniaan leidt tot het gelijk richten van naburige spins. Dit maakt het model een vereenvoudigde voorstelling van ferromagneten.

4.3.1 Evenwichtstoestand

Het systeem wordt verondersteld in contact te staan met een reservoir bij temperatuur T . Door de uitwisseling van energie met het reservoir kan de interne energie van de ferromagneet worden geminimaliseerd, maar ondervindt het systeem bij eindige temperatuur ook thermische fluctuaties. Deze fluctuaties leiden ertoe dat het systeem zich bij $T > 0$ niet in de grondtoestand bevindt maar de Boltzmann-verdeling (1.5) volgt. Bij lage temperatuur zijn fluctuaties te verwaarlozen en bevindt het systeem zich in de grondtoestand. Hierbij zijn alle N spins gelijk gericht, waardoor de magnetisatie*,

$$|M| = \frac{1}{N} \left| \sum_i S_i \right|, \quad (4.4)$$

gelijk wordt aan 1. Bij hoge temperatuur domineren fluctuaties, waardoor het systeem gedemagnetiseerd raakt: $M \approx 0$. In twee dimensies leidt dit tot een abrupte faseovergang bij de kritische temperatuur T_C . In Figuur 4.8 tonen we de exacte oplossing van Onsager^[55] (1944).



Figuur 4.8 – Temperatuursafhankelijkheid van de magnetisatie in het Ising-model.

4.3.2 Dynamica

Om macroscopische grootheden op te meten moet het gemiddelde genomen worden van een groot aantal realisaties, gekozen met waarschijnlijkheden gegeven door de thermische Boltzmann-verdeling. Dit garandeert dat de geobserveerde grootheden representatief zijn voor de evenwichtstoestand bij een gegeven temperatuur. Zulke configuraties kunnen gesampled worden door te starten uit een willekeurige beginsituatie, een groot aantal microscopische wijzigingen voor te stellen, en deze telkens al dan niet te accepteren volgens het Metropolis-Hastings algoritme:

$$\mathcal{P}(i \rightarrow j) = \min \left[1, \exp \left\{ \frac{-\Delta E}{T} \right\} \right], \quad \text{waarin } \Delta E = E_j - E_i. \quad (4.5)$$

De Boltzmann-factor maakt thermische fluctuaties naar niet-optimale toestanden mogelijk bij eindige temperatuur. Een afleiding van het Metropolis algoritme voor de Monte Carlo Markov chain (MCMC) methode is te vinden in Bijlage A.

Er zijn verschillende algoritmes om een het systeem een microscopische evolutie te laten ondergaan. Deze bestaan doorgaans uit het willekeurig kiezen van één spin die wordt

* In afwezigheid van een extern veld is er geen voorkeur tussen ± 1 . We tonen daarom de absolute waarde van de magnetisatie.

verplaatst of zelf wordt omgekeerd. Het individueel omflippen van de spin is het meest courante algoritme, en is intuïtief logisch voor magnetische momenten. Deze keuze wordt meestal benoemd als het *Metropolis*-algoritme. De interpretatie en problematiek van deze dynamica in sociale modellen werd reeds besproken in Sectie 4.2.2. Om een gesloten systeem van economische agenten te beschrijven kan men alternatief op elke microscopische stap twee agenten (naburig of op arbitraire afstand van elkaar) van plaats wisselen. Dit algoritme met behoud van magnetisatie staat bekend als *Kawasaki*-dynamica, en is nodig wanneer men de structuur van clusters in de geordende fase wilt bestuderen. De grondtoestand bereikt via deze dynamica is een situatie waarin de op- en neer-spins gesegregeerd zijn in twee domeinen van oneindige grootte. Er zijn een groot aantal andere algoritmes die hier niet besproken worden. Allen hebben hun computationele voor- en nadelen, maar leiden fundamenteel tot het bemonsteren van dezelfde evenwichtsverdeling. Ook het al dan niet vormen van grootschalige domeinen is onafhankelijk van de keuze van de dynamica^[48].

Het is belangrijk te benadrukken dat, in de context van magnetische systemen, deze regels geenszins een voorstelling van de eigenlijke dynamica van magnetische dipolen hoeven te zijn. Aangezien al deze methoden slechts dienen om dezelfde evenwichtstoestand te samplen, is het correcter te spreken van *pseudo-dynamica*^[54].

4.3.3 Link met segregatie

Wanneer agenten doorheen het rooster bewegen via Kawasaki-dynamica, blijven hun aantallen behouden en vormen ze gesegregeerde domeinen naargelang de temperatuur. Op deze manier kan het Ising-model evident worden gezien als segregatiemechanisme. De interne energie vormt hierbij het analoog voor het economische nut, de Hamiltoniaan vervangt de nutsfunctie. De temperatuur T kan in deze context worden geïnterpreteerd als een *tolerantie* ten opzichte van sociale verschillen, of *trouble* in het zoeken naar een gepaste plaats.

Het Ising-model heeft slechts één parameter en de evenwichtstoestand is robuust voor verschillende implementaties van de Metropolis-dynamica; in dit opzicht is het eenvoudiger dan het Schelling-model. De letterlijke toepassing van het Ising-model in sociale fenomenen kan worden teruggevonden vanaf de jaren '80, bijvoorbeeld voor de beschrijving van collectieve stakingen^[56]. De gelijkenis tussen het Ising-model en het Schelling-model, die beiden segregatie veroorzaken naargelang de waarde van een controleparameter (T resp. Δ), is voor de hand liggend. Beide modellen vertonen echter ook een aantal fundamentele verschillen.

Een eerste belangrijk verschil is dat de Hamiltoniaan (4.3) van het Ising-model en de nutsfunctie (4.1) van het Schelling-model niet equivalent zijn. De Hamiltoniaan van het Ising-model bevoordeelt expliciet segregatie door het streven naar gelijk gerichte naburige spins. Boven de kritische temperatuur T_C wordt geen segregatie gerealiseerd, maar dat is het gevolg van stochastische fluctuaties. De maximale tevredenheid van agenten vereist nog steeds een homogene omgeving, maar ze slagen er niet in deze te behouden. In het Schelling-model daarentegen, vindt vanaf de drempelwaarde Δ_C een overgang naar desegregatie plaats in zuiver deterministische dynamica. De controleparameter Δ is hierbij geen externe bron van fluctuaties maar een voorwaarde voor individuele tevredenheid. Dit belangrijke onderscheid wordt in de literatuur nochtans zelden expliciet vermeld*.

* De enige vermelding werd gevonden in Stauffer and Schulze^[57].

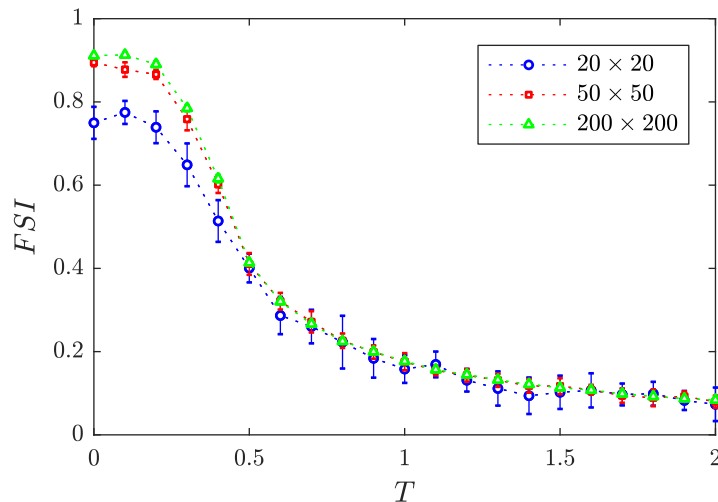
Een tweede onderscheid is dat in het Ising-model de energie-wijziging ΔE van het hele rooster wordt beschouwd, terwijl microscopische stappen in het Schelling-model slechts rekening houden met het veranderende nut Δu van de bewegende agent. Deze egocentrische dynamica maakt het mogelijk dat een optimale verhuis voor één agent ten koste gaat van het algemeen nut, zoals geïllustreerd in het grillige en niet monotoon stijgende verloop van het gemiddelde nut in Figuur 4.4. De Ising-grondtoestand maximaliseert het algemeen nut, de Schelling-grondtoestand is het emergente gevolg van egocentrische overwegingen. Ondanks de sterke link tussen modellen voor segregatie en magnetische systemen, is kruisbestuiving tussen deze onderzoeksthema's een relatief jong fenomeen. Stauffer and Schulze^[57] benoemen dit toepasselijk als een *wetenschappelijke segregatie*.

4.3.4 Het Schelling-model bij $T > 0$

Het onderscheid tussen Δ en T laat toe om ook deze laatste aan het Schelling-model toe te voegen. In plaats van deterministische regels waarbij agenten doelgericht verhuizen naar een positie van maximaal nut, wordt de dynamica nu vervangen door het Metropolis-Hastings algoritme:

$$\mathcal{P}(i \rightarrow j) = \min \left[1, \exp \left\{ \frac{\Delta u}{T} \right\} \right], \quad \text{waarin } \Delta u = u_j - u_i. \quad (4.6)$$

Bij temperatuur nul reduceert dit tot Algoritme 2 voor het Schelling-model, de vloeistofachtige dynamica nodig om segregatie te genereren. Bij eindige temperatuur maken stochastische fluctuaties een verhuis mogelijk naar posities met lager nut. Stauffer and Solomon^[48] voerden als eerste deze uitbreiding naar eindige temperatuur uit en bestudeerden het verloop van de segregatie als functie van T . In Figuur 4.9 tonen we de temperatuursafhankelijkheid van de Freeman segregatie-index in het Schelling-model met vaste tolerantie $\Delta = 0.5$. Hieruit blijkt een geleidelijke evolutie naar desegregatie, in tegenstelling tot de abrupte faseovergang in het Ising-model. Dit resultaat wordt bevestigd door Stauffer and Solomon^[48].



Figuur 4.9 – Temperatuursafhankelijkheid van de Freeman segregatie-index in het Schelling-model met $\Delta = 0.5$ en $p = 20\%$. De datapunten en foutenvlaggen zijn het resultaat van 10 onafhankelijke simulaties van 1000 sweeps.

Hoofdstuk 5

Segregatie in kinetische uitwisselingsmodellen

*“If more of us valued food and cheer above hoarded gold,
it would be a merrier world.”*

– J.R.R. Tolkien

In Hoofdstuk 3 werden kinetische uitwisselingsmodellen voor de verdeling van rijkdom besproken. De verschillende verfijningen laten toe om eigenschappen van empirische verdelingen te reproduceren en hypothesen te stellen over de onderliggende dynamica. In het bijzonder onderzoeken we de invloed van globale maatregelen en veranderingen in individueel gedrag op de ongelijkheid in de samenleving. In Hoofdstuk 4 bespraken we de voornaamste modellen voor spontane segregatie op basis van een discrete variabele.

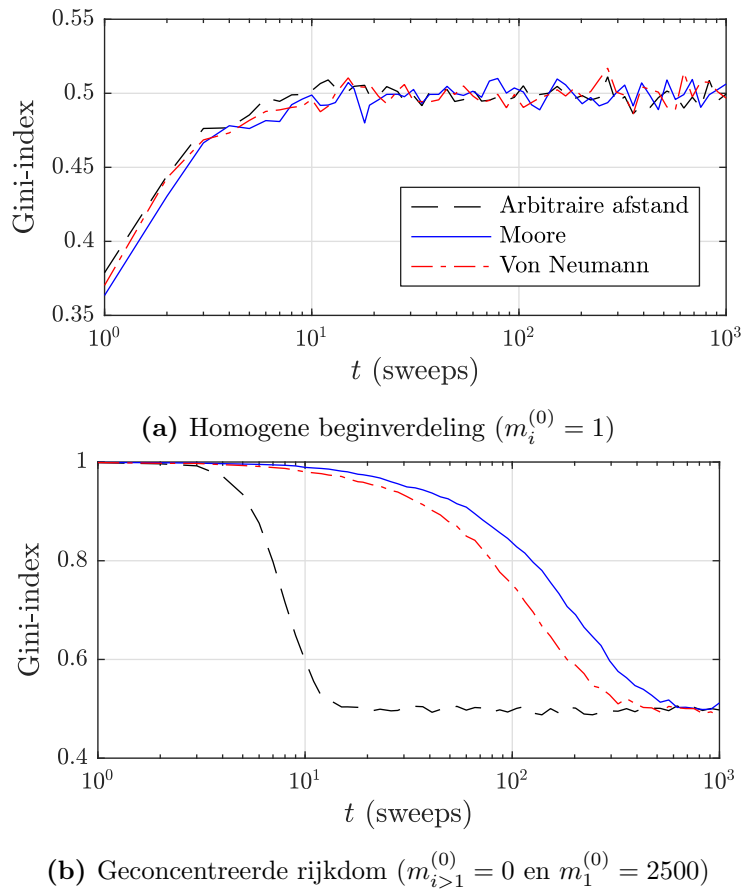
In dit hoofdstuk, dat de kern van deze thesis vormt, worden de kinetische uitwisselingsmodellen uitgebreid met een mechanisme dat segregatie teweegbrengt op basis van rijkdom. Concreet wordt nagegaan of de segregatie stand houdt wanneer deze gecombineerd wordt met kinetische uitwisselingen, en wat de invloed is op de verdeling van geld in verschillende uitwisselingsmodellen. We bekijken het effect van segregatie op de ongelijkheid, en onderzoeken hoe het onderscheid tussen globale en lokale aanpassingen verandert in de gesegregerde economie.

5.1 Kinetische uitwisselingen op een rooster

In eerste instantie worden de agenten op een tweedimensionaal rooster geplaatst zonder toevoeging van een bijkomend segregatiemechanisme. De interactiepartners van elke agent worden beperkt tot zijn naaste naburen in het rooster. Dit stelt ons in staat om ruimtelijke verschillen in de distributie waar te nemen. Er wordt nagegaan hoe de tijdsevolutie en de stationaire toestand van het systeem worden beïnvloed door het invoeren van lokale uitwisselingen. Net als bij modellen voor binaire segregatie kan deze *buurt* op verschillende manieren worden gedefinieerd. We beschouwen volgende drie gevallen: uitwisselingen over arbitraire afstand doorheen het hele rooster, uitwisselingen tussen naaste naburen in de Moore-buurt en uitwisselingen tussen naaste naburen in de Von Neumann-buurt (zie

Figuur 4.1). De MATLAB-code voor uitwisselingen tussen naburen is te vinden in Bijlage B.3.

De beginsituatie en de toegelaten uitwisselingen hebben invloed op de dynamica van het systeem en de tijd nodig tot het bereiken van de evenwichtstoestand. Figuur 5.1 toont de tijdsevolutie van de Gini-index voor de drie interactiemechanismen en twee beginsituaties: een homogene verdeling van rijkdom ($G = 0$) en een concentratie van alle rijkdom bij één agent ($G = 1$). Startend vanuit een homogene verdeling wordt evenwicht bereikt na ± 10 sweeps, ongeacht de toegelaten interacties. Vertrekkend vanuit extreme ongelijkheid is er wel een sterke invloed: het evenwicht wordt bereikt na 20 sweeps bij interacties doorheen het hele rooster, en pas na ± 1000 sweeps bij uitwisselingen tussen naaste naburen.



Figuur 5.1 – Verloop (in Monte-Carlo sweeps) van de Gini-index in het kinetische uitwisselingsmodel zonder spaarfactor, belasting of segregatie op een 50×50 rooster, voor verschillende beginsituaties en toegelaten uitwisselingen.

De uiteindelijke evenwichtstoestand bij uitwisselingen zonder spaargedrag of belasting is dezelfde als in Figuur 3.1, ongeacht de interactiepartners of initiële verdeling. Dit wordt geïllustreerd door Figuur 5.1, waar de Gini-index voor ongelijkheid nog steeds evolueert naar $G \approx 0.5$. Deze conclusie is eveneens geldig in modellen mét spaargedrag of herverdelende belasting. In het bijzonder blijven alle resultaten uit Hoofdstuk 3 onveranderd bij toevoeging van de roosterstructuur en lokale interacties. De verdelingsfuncties worden hier niet gereproduceerd.

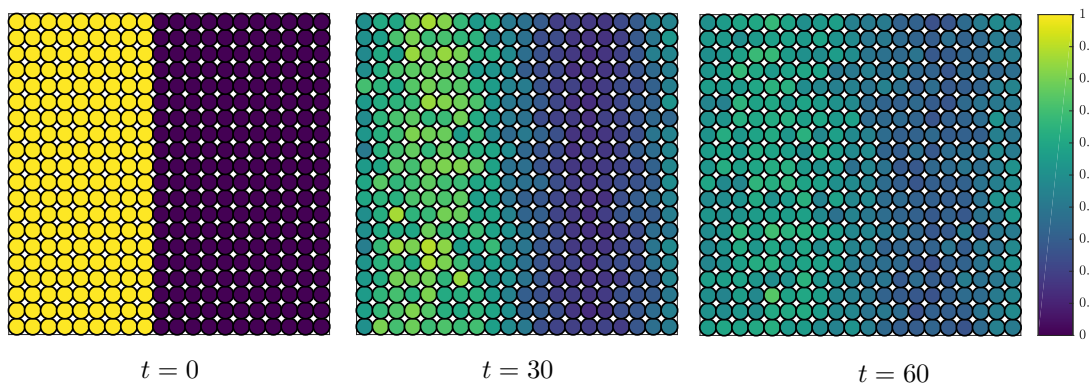
Gezien de stationaire verdeling niet beïnvloed wordt door de details van de dynamica, wordt in het vervolg van dit hoofdstuk de eenvoudigste Von Neumann buurt met $r = 1$

gebruikt, wat neerkomt op interacties met de vier naaste naburen in het tweedimensionale rooster.

De segregatie-index in alledrie de stationaire toestanden uit Figuur 5.1 voldoet aan $CSI < 0.02$, wat aantoont dat het louter toevoegen van een roosterstructuur niet leidt tot een spontane opsplitsing tussen arm en rijk.

5.1.1 Diffusiviteit

Kinetische uitwisselingen tussen naburige agenten in het rooster leiden uiteindelijk tot een ruimtelijk homogene evenwichtssituatie. Om een beter inzicht te krijgen in de macroscopische dynamica, bestuderen we in meer detail de evolutie van een inhomogene beginverdeling naar het homogene evenwicht. Figuur 5.2 toont kwalitatief het tijdsverloop van een rooster initieel opgedeeld in een arme en rijke helft. De kinetische uitwisseling vertoont de kenmerken van een diffusieproces.



Figuur 5.2 – Tijdsverloop (in Monte-Carlo sweeps) van het kinetische uitwisselingsmodel op een 20×20 rooster. Het diffusieve karakter blijkt uit de evolutie van de aanvankelijk scherpe overgang tussen arm en rijk naar een homogene verdeling. De figuur is het gemiddelde van 100 onafhankelijke simulaties.

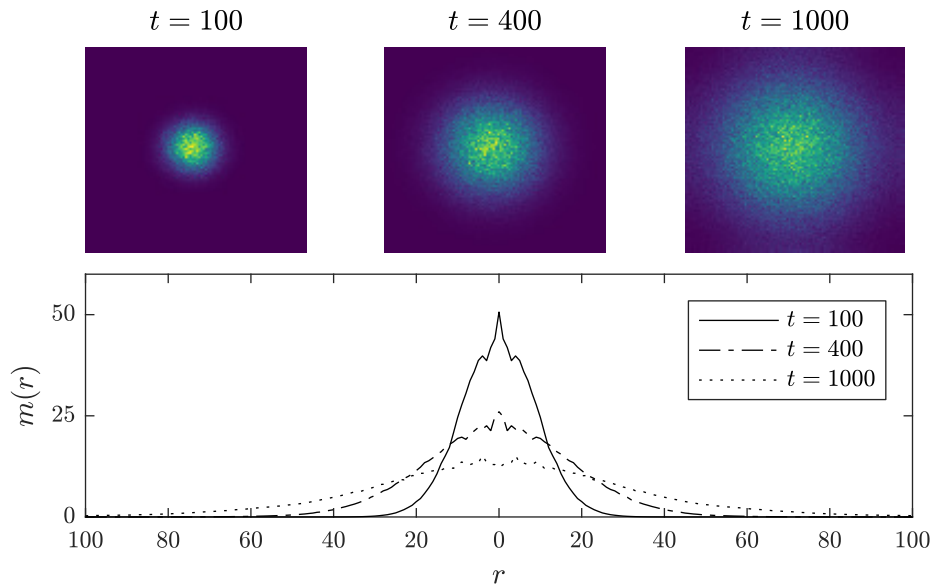
Kwantitatief wordt het diffusieproces bestudeerd door de tijdsevolutie te bekijken van de ruimtelijke verdeling in een groter 100×100 rooster, startend van een aanvankelijk op één roostersite geconcentreerd bedrag. Dit wordt weergegeven in Figuur 5.3. Het diffusieproces is dan equivalent aan de *random walk* van een deeltje startend in het midden van het rooster: de ruimtelijke waarschijnlijkheidsverdeling $P(\mathbf{r}, t)$ van het deeltje in de tijd komt overeen met de waargenomen verdeling van geld in het rooster.

De onzekerheid op de positie van het deeltje wordt gekarakteriseerd door de *mean squared displacement* (MSD) $\langle \Delta r^2 \rangle$, welke in een algemeen diffusieproces een tijdsverloop heeft van de vorm:

$$\langle \Delta r^2 \rangle \sim Dt^\alpha. \quad (5.1)$$

Hierin is D de diffusiecoëfficiënt en α de exponent die het kwalitatieve diffusiegedrag bepaalt. De notatie $\langle \rangle$ slaat op het ensemble-gemiddelde. Volgende gevallen worden onderscheiden:

$$\begin{cases} \alpha = 1 & \text{standaard diffusie,} \\ \alpha < 1 & \text{subdiffusie,} \\ \alpha > 1 & \text{superdiffusie.} \end{cases} \quad (5.2)$$



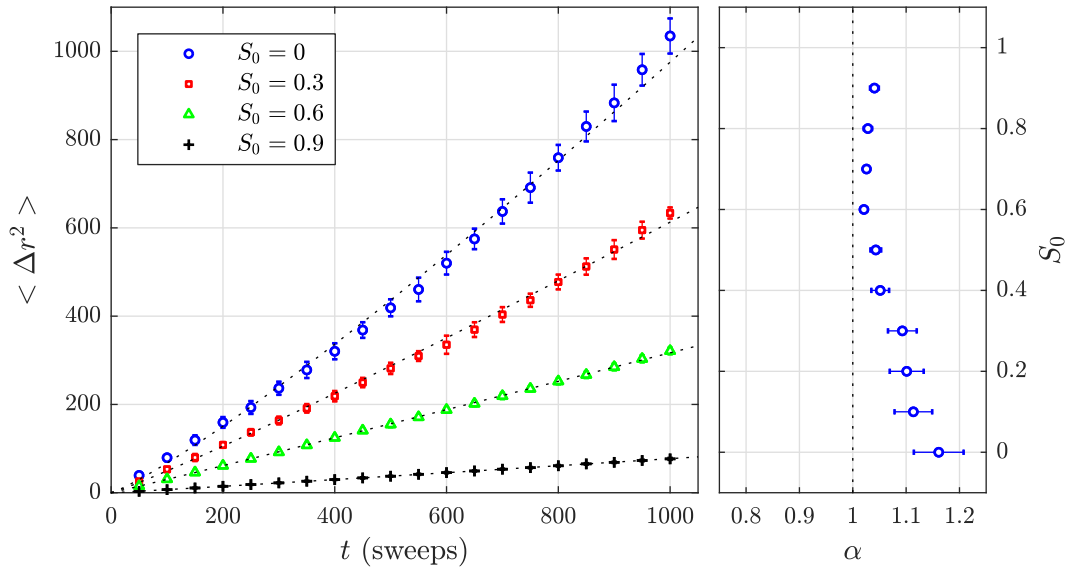
Figuur 5.3 – Het tijdsverloop (in Monte-Carlo sweeps door een 100×100 rooster) van een initieel geconcentreerd bedrag in het kinetisch uitwisselingsmodel zonder spaarfactor. Zowel de momentopnames van het rooster als de overeenkomstige radiële profielen zijn typisch voor een diffusief proces. De figuur is het gemiddelde van 40 onafhankelijke simulaties. De kleurschaal is verschillend in elke afbeelding en de radiële profielen werden herschaald tot een gelijke normalisatie.

De grootte $\langle \Delta r^2 \rangle$ komt overeen met het tweede moment* van de ruimtelijke waarschijnlijkheidsverdeling in Figuur 5.3. Het resulterende tijdsverloop wordt voor enkele waarden van een vaste spaarfactor S_0 getoond in Figuur 5.4. Zoals verwacht neemt de diffusiecoëfficiënt af met stijgende S_0 . Uit de gefitte exponenten, weergegeven in de rechterfiguur, blijkt het kinetische model met vaste spaarfactor bij benadering diffusief, en licht superdiffusief voor lage waarden van S_0 . In het bijzonder vinden we bij $S_0 = 0$ een diffusie-exponent $\alpha = 1.161 \pm 0.047$.

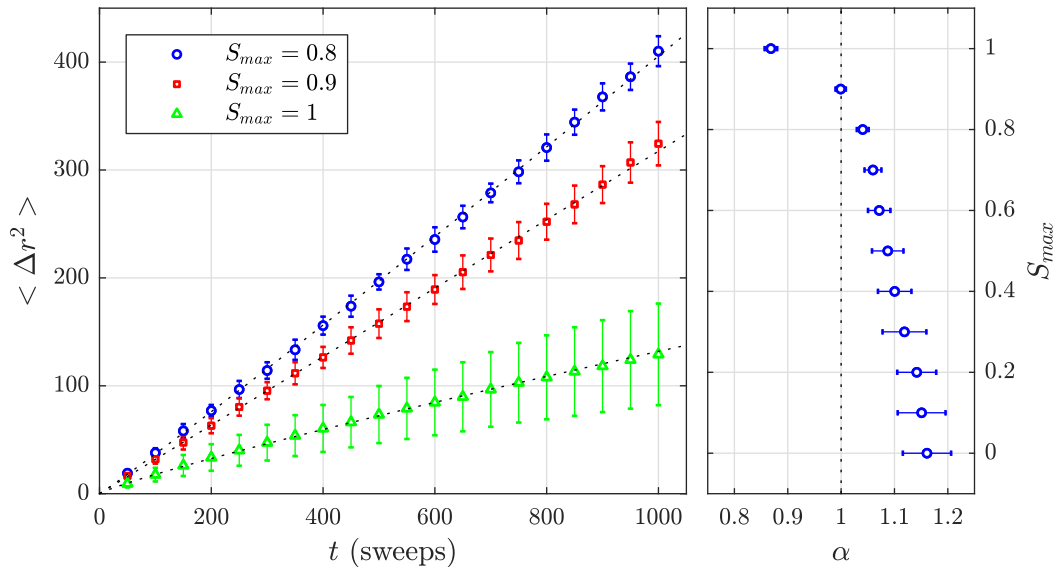
Dezelfde simulatie kan worden herhaald in het uitwisselingsmodel met individuele spaarfactoren S_i , uniform verdeeld het interval $[0, S_{max}]$. Het kwalitatieve verloop is nog steeds identiek aan dat in Figuur 5.3. Figuur 5.5 toont de tijdsafhankelijkheid van het tweede moment. De gefitte exponenten geven opnieuw een licht superdiffusief gedrag aan bij lage waarden van S_{max} . Wanneer de bovengrens S_{max} gelijk wordt aan 1, is het kinetische model plots subdiffusief, met $\alpha = 0.868 \pm 0.012$. Het subdiffusieve transport van geld is bijgevolg gelinkt aan de aanwezigheid van agenten met hoge spaarfactor die geld accumuleren.

In afwezigheid van het rooster werd eerder dezelfde voorwaarde ($S_{max} \rightarrow 1$) gevonden voor het voorkomen van een machtswet-regime in de statistische verdeling van rijkdom (Figuur 3.8). Ook deze conclusie blijft geldig in het rooster.

* Aanvankelijk werd deze grootte afgeschat als de variantie σ^2 van een Gaussische verdeling gefit aan de radiële verdeling in Figuur 5.3. De Gaussische verdeling is echter typisch aan een standaard diffusief proces ($\alpha = 1$), waardoor deze methode a priori de conclusie $\alpha \approx 1$ bevoordeelt.



Figuur 5.4 – Links: Het tijdsverloop van het tweede moment van de gecentreerde verdeling, voor enkele waarden van de vaste spaarfactor S_0 . De foutenvlaggen zijn de standaarddeviaties na 20 onafhankelijke simulaties in een 100×100 rooster. De stippellijnen zijn gefitte functies van de vorm uit vergelijking (5.1). Rechts: de gefitte diffusie-exponent α voor een grotere reeks S_0 -waarden. De foutenvlaggen zijn de 95%-betrouwbaarheidsintervallen van de gefitte parameters.



Figuur 5.5 – Dezelfde simulatie als Figuur 5.4, maar nu voor spaarfactoren uniform verdeeld in $[0, S_{max}]$. Het verloop voor lage S_{max} is gelijkaardig aan dat in Figuur 5.4 en wordt niet opnieuw getoond. Opvallend is het plots subdiffusieve karakter wanneer $S_{max} \rightarrow 1$.

5.2 Segregatie op basis van rijkdom

Het uitbreiden van de modellen voor segregatie naar een populatie waarin elke agent een rijkdom m_i bezit is een grotere uitdaging. Zowel het Schelling- als het Ising-model veronderstellen dat de populatie bestaat uit twee onderscheidbare groepen. Een bekende variant van het Ising-model voor meer dan twee groepen is het Potts-model. De Hamiltoniaan wordt in dit geval gegeven door:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{s_i, s_j}, \quad (5.3)$$

waarin $s_i = 1, 2, \dots, q$. Een gelijkaardig model werd reeds gebruikt als voor de segregatie tussen meer dan twee etnische groepen in een multiculturele samenleving^[57]. Hoewel men het aantal groepen q arbitrair groot kan kiezen, bestaat het Potts-model steeds uit discrete groepen. In het huidige geval wordt met elke agent een reëel getal geassocieerd, wat elk model voor discrete groepen onbruikbaar maakt. Om de uitbreiding naar een continue variabele te maken bestaan enkele opties, met elk hun voor- en nadelen.

5.2.1 Het opdelen van de populatie

Een eenvoudige oplossing bestaat erin de populatie op te delen in een arme en een rijke groep. Zo wordt een binair rooster S gevormd waarop het arsenaal aan Schelling- en Ising-modellen kan worden gebruikt:

$$\begin{cases} S(m \leq m_c) = -1, \\ S(m > m_c) = +1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Hierbij rest de vraag hoe m_c moet bepaald worden voor de uiteenlopende verdelingen die we tot hiertoe zijn tegengekomen. Kiest men het gemiddelde dan is, bijvoorbeeld in de exponentiële verdeling, het aantal rijke agenten lager dan het aantal arme agenten. Kiest men voor de mediaan, dan wordt de rijke helft als één groep gezien. Dit strookt niet met de waarneming dat de hoogste percentielen van de verdeling in sommige modellen een machtswet volgen en dus sterk verschillen van de overige populatie in de rijke helft. Het kiezen van een m_c wordt nog moeilijker indien men bedenkt dat de verdeling na toevoeging van segregatie kan afwijken van eerdere resultaten, waardoor de keuze van een drempelwaarde helemaal *a shot in the dark* wordt. Net als in het Schelling-model kan men meer dan twee groepen onderscheiden, maar het probleem van de arbitraire opdeling blijft. Bovendien houden zulke modellen geen rekening met het eigenlijke verschil in rijkdom tussen de agenten in kwestie. In realiteit is het aannemelijk dat een groter verschil ook een grotere spanning en dus een minder optimale toestand veroorzaakt. Een goed model houdt hier idealiter rekening mee.

5.2.2 Rijkere burens als *others* in het Schelling-model

Een ander model werd voorgesteld door Sahasranaman and Jensen^[58]. In deze aanpassing van het Schelling-model wordt het aantal burens armer dan de agent in kwestie gebruikt als veralgemening van burens uit dezelfde groep. Agenten hebben een voorkeur voor armere burens, terwijl rijkere burens tot spanning leiden. De beslissing om al dan niet te verhuizen wordt hierbij dus geïnterpreteerd als het gevolg van de *betaalbaarheid* van de voorgestelde

woonplaats. Als nutsfunctie wordt dezelfde stapfunctie beschouwd als in het Schelling-model, met tolerantie $\Delta = 0.5$ ten opzichte van rijkere buren. Men gebruikt Kawasaki-dynamica bij eindige temperatuur in een rooster zonder lege plaatsen.

Hoewel dit model geen arbitraire opdeling van de populatie vereist, houdt het nog steeds geen rekening met het eigenlijke verschil in rijkdom tussen de naburige agenten. Bovendien bevat het model slechts het ongeluk veroorzaakt door rijkere buren. Betaalbaarheid is echter niet de enige overweging bij de beslissing tot verhuizen. Rijke agenten kiezen typisch niet voor de goedkoopste woningen, maar veroorloven zich het groter comfort en aanzien van een duurderde woning in een rijkere buurt.

In de volgende sectie wordt een nieuw model voorgesteld waarin het eigenlijke verschil in rijkdom met zowel armere als rijkere buren leidt tot spanning. De wil tot verhuizen is daardoor gemotiveerd door het streven naar buren met een rijkdom die zo dicht mogelijk ligt bij die van de agent in kwestie.

5.2.3 Een Hamiltoniaanse benadering

De voorkeur om zich te omringen met agenten met een gelijkaardige rijkdom kan, in navolging van het Ising-model, worden gemodelleerd met een Hamiltoniaan. Volgende Hamiltoniaan wordt voorgesteld:

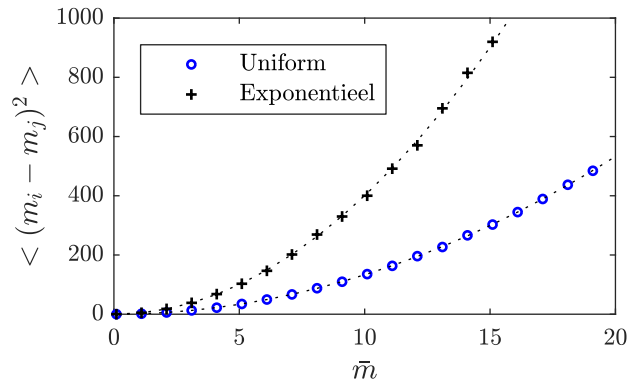
$$H = J \sum_{\langle ij \rangle} \left(\frac{m_i - m_j}{\bar{m}} \right)^2. \quad (5.5)$$

De bijdrage van de interactie met een nabuur j tot de totale energie is nul indien $m_i = m_j$, en positief indien $m_i \neq m_j$. De interactie is symmetrisch, er is geen onderscheid welke van de twee de rijkste is. In wat volgt wordt enkel de interactie met naaste naburen in de Von Neumann-buurt ($r = 1$) beschouwd, maar de resultaten blijken onveranderd bij gebruik van de Moore-buurt*. De deling door de gemiddelde rijkdom \bar{m} komt neer op een herschaling, zodanig dat de eigenlijke bedragen geen invloed hebben op de energie. Figuur 5.6 illustreert voor twee verdelingen dat deze herschaling inderdaad de afhankelijkheid van \bar{m} in H teniet doet. De interactiesterke J kan in de temperatuur worden opgenomen en wordt daarom 1 gesteld. In de continuüm-limiet, waarbij de roosterafstand naar nul nadert, herleidt deze Hamiltoniaan tot de gekende veldhamiltoniaan

$$H[\phi] \propto \int d\mathbf{x} [\nabla\phi(\mathbf{x})]^2, \quad (5.6)$$

met als bewegingsvergelijking $\nabla^2\phi = 0$, de steady state de diffusievergelijking. Ten slotte merken we op dat deze Hamiltoniaan, net als de Ising-Hamiltoniaan, expliciet segregatie bevoordeelt. Anders dan in het Schelling-model verwacht men reeds segregatie vanuit de microscopische interacties. Het minimaliseren van de energie door het onderling verplaatsen van agenten met gegeven bedragen $\{m_i\}$ komt bovendien neer op het maximaliseren van de continue segregatie-index (2.5).

* In het Schelling-model was de beschouwde buurt meer bepalend, aangezien elke link slechts een nut 0 of 1 leverde. De energie in dit model kan daarentegen een continuüm aan waarden aannemen.



Figuur 5.6 – De gemiddelde niet-herschaalde energie per agent als functie van de gemiddelde rijkdom. De figuur is het resultaat van een 200×200 rooster gevuld met bedragen gesampled uit de vermelde verdeling. Voor beide verdelingen blijkt de afhankelijkheid kwadratisch, wat de herschaling in (5.5) verantwoordt.

5.3 Dynamica en evenwicht van de segregatie-Hamiltoniaan

Het resultaat van de segregatie-Hamiltoniaan wordt eerst bestudeerd afzonderlijk van kinetische uitwisselingen, op een rooster met uniform verdeelde bedragen $m_i = \text{rand}([0, 1])$. De evenwichtstoestand wordt bereikt door Monte-Carlo tijdstappen, waarbij het aanneemen van een nieuwe toestand gebeurt volgens het temperatuursafhankelijke Metropolis-Hastings algoritme, eerder besproken in Sectie 4.3.2. Net als in het Ising-model voeren we op deze manier thermische fluctuaties toe aan de dynamica. Deze sociale temperatuur kan opnieuw worden geïnterpreteerd als een *tolerantie** of *trouble* in het zoeken naar een gepaste plaats.

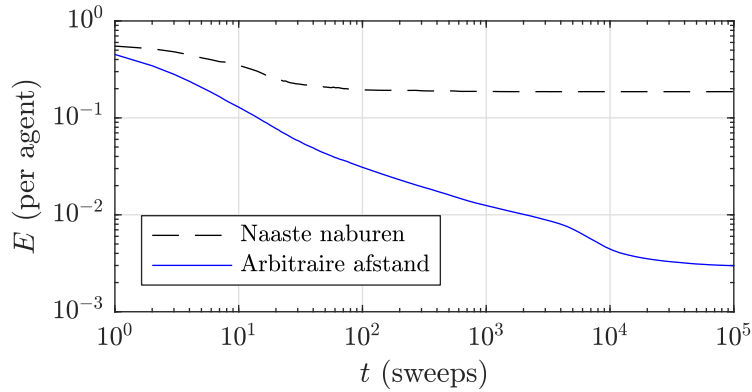
Voor de dynamica van het verhuizen laten we in dit model de onnodige complicatie van vacante sites uit het oorspronkelijke Schelling-model achterwege. In plaats daarvan volgen we de magnetische traditie en beschouwen een volledig gevuld rooster, waarin agenten verhuizen door onderling van positie te verwisselen. De koppels die aan deze Kawasaki-dynamica deelnemen kunnen, net als bij het Ising-model, op verschillende manieren worden bepaald. Enerzijds kunnen deze verwisselingen worden beperkt tot agenten die elkaars burens zijn. Anderzijds kan men ook verwisselingen toelaten over arbitraire afstanden in het rooster. De Matlab-code voor de dynamica is te vinden in Bijlage B.4.

Figuur 5.7 toont de tijdsevolutie van de gemiddelde interne energie per roostersite en de continue segregatie-index (2.5) voor beide mechanismen bij $T = 0$. Uit deze thermalisatie-procedure blijkt dat het algoritme met enkel verwisselingen van naaste naburen reeds na 10^2 sweeps een stationaire toestand bereikt, die niet volledig gesegregeerd is ($CSI \approx 0.73$). Wanneer verwisselingen over arbitraire afstand zijn toegestaan, wordt de stationaire toestand pas bereikt na 10^5 sweeps. Deze is wel gekenmerkt door een volledige segregatie ($CSI \approx 1$). Bij de beslissing om een verhuis te realiseren wordt de energie-toename ΔE van het hele systeem beschouwd: het mechanisme maximaliseert het *algemeen nut*. In het Schelling-model werd slechts het nut van de agent in kwestie geoptimaliseerd, mogelijk ten koste van andere agenten. Dit verklaart waarom het fluctuerende verloop van het gemiddelde nut in Figuur 4.4 niet voorkomt Figuur 5.7.

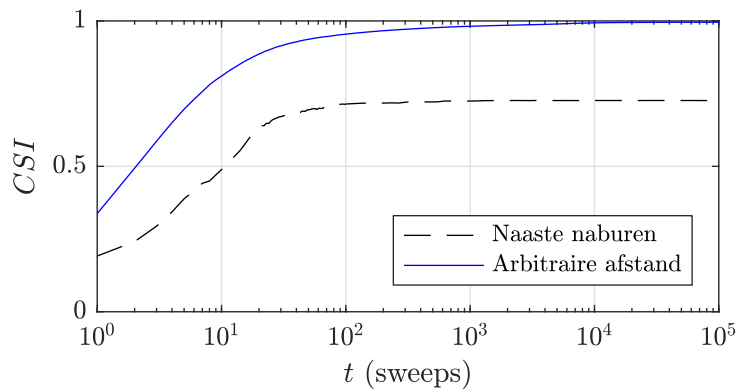
In Figuur 5.8 tonen we de stationaire toestand van het algoritme met verwisselingen

* Opnieuw niet te verwarren met de tolerantie Δ uit het Schelling-model.

tussen naburen bij $T = 0$. Deze bestaat uit snel gevormde, kleine domeinen van arme en rijke klassen, maar geen grootschalige segregatie*. Het magnetische equivalent van deze situatie is een systeem dat op korte tijd wordt gekoeld naar $T = 0$ en ingevroren raakt in een metastabiele toestand. Voor het algoritme met verwisselingen over arbitraire afstand wordt de tijdsevolutie geïllustreerd in Figuur 5.9. De eindtoestand vertoont één grootschalig verloop van arm naar rijk, en is dus gesegegreerd.



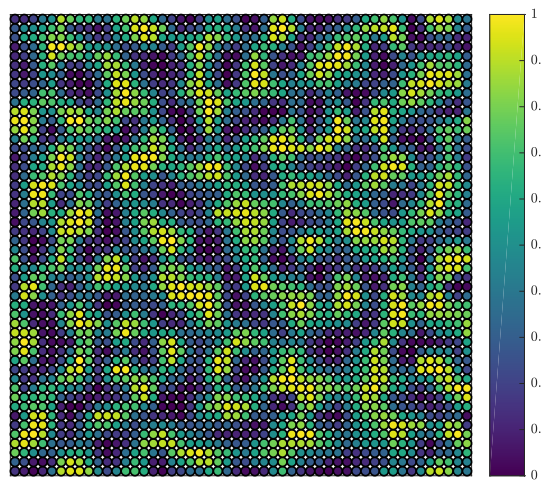
(a) Gemiddelde energie per agent.



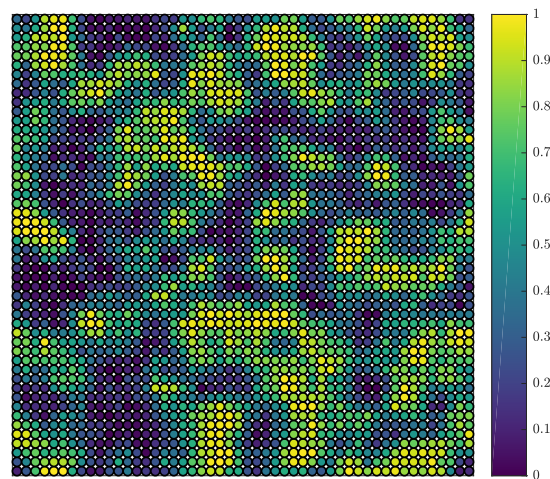
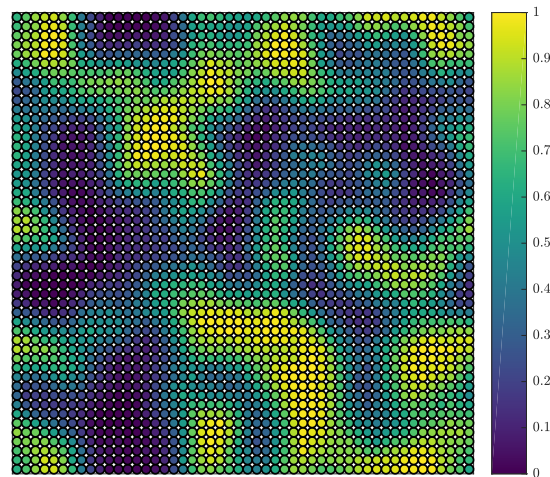
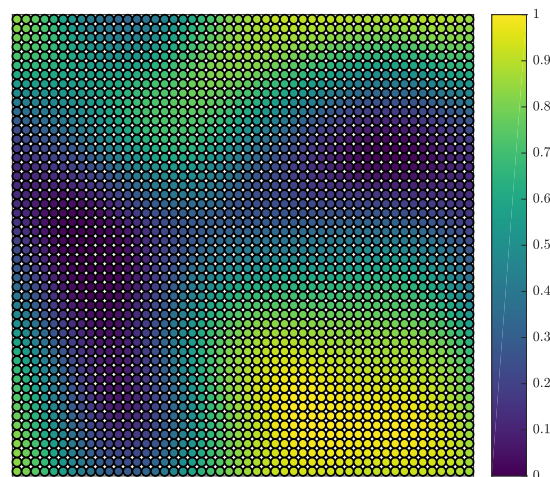
(b) Continue segregatie-index (2.5).

Figuur 5.7 – Thermalisatie bij $T = 0$ van een 50×50 rooster met uniform verdeelde be-
dragen, geëvalueerd onder de Hamiltoniaan (5.5) en voor verschillende implementaties van de
Kawasaki-dynamica.

* Met deze dynamica kan men eveneens grootschalige segregatie bekomen door te vertrekken van $T \gg 0$ en het systeem geleidelijk te koelen tot $T = 0$. Dit verhoogt de computationele kost echter enorm, en wordt daarom niet verder toegepast.



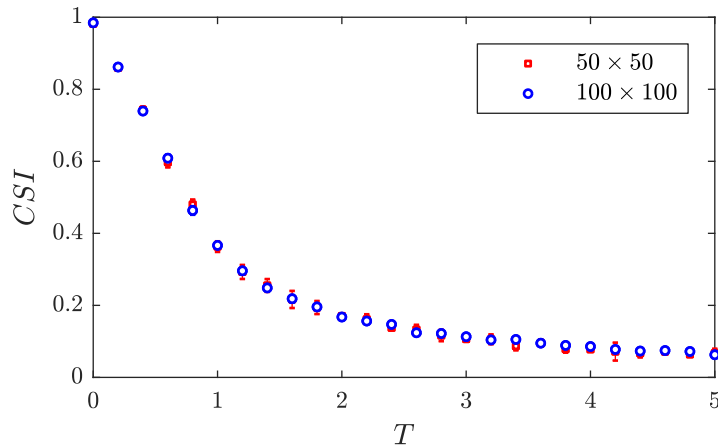
Figuur 5.8 – Stationaire toestand bereikt door het naaste-nabuur Kawasaki-algoritme bij $T = 0$ na 10^3 sweeps in een 50×50 rooster met uniform verdeelde bedragen, geëvalueerd onder de Hamiltoniaan (5.5). Enkel kleine domeinen worden gevormd.

 $t = 10^1$  $t = 10^2$  $t = 10^4$

Figuur 5.9 – Tijdsevolutie van het Kawasaki-algoritme over arbitraire afstand, bij $T = 0$ in een 50×50 rooster met uniform verdeelde bedragen. De stationaire toestand vertoont een verloop van arm naar rijk in domeinen van de grootteorde van het rooster.

5.3.1 Segregatie bij eindige temperatuur

Bij eindige temperatuur treden thermische fluctuaties op in het Metropolis-Hastings algoritme, en volgt de energie van het systeem in evenwicht de Boltzmann-verdeling. Figuur 5.10 toont het verloop van de segregatie-index van de evenwichtstoestand in functie van de temperatuur. We beschouwen opnieuw het segregatiemechanisme in afwezigheid van financiële transacties, en samplen de rijkdom van agenten uniform in $[0, 1]$. De dynamica wordt gegeven door Kawasaki-verwisselingen over arbitraire afstand. Zoals verwacht neemt de segregatie af naarmate thermische fluctuaties toenemen. Er wordt slechts een continue afname van de segregatie-index waargenomen, en dat voor roosters met bedragen verdeeld volgens een uniforme, exponentiële en machtsverdeling. Ongeacht de statistische verdeling van rijkdom treedt dus geen abrupte faseovergang op. Dit resultaat komt kwalitatief overeen met de bevindingen van Sahasranaman and Jensen^[58] voor het model besproken in Sectie 5.2.2.



Figuur 5.10 – Segregatie-index van de evenwichtstoestand van de segregatie-Hamiltoniaan (5.5) bij eindige temperatuur in roosters met uniform verdeelde rijkdom ($m_i = \text{rand}([0, 1])$) en Kawasaki-dynamica over arbitraire afstand. De datapunten zijn de evenwichtstoestand bereikt na 1000 sweeps. De foutenvlaggen zijn de standaardafwijking na 5 onafhankelijke simulaties.

5.4 Kinetische uitwisselingen en segregatie gecombineerd

Nu het uitwisselingsmodel werd uitgebreid naar het tweedimensionale rooster en een werkend mechanisme voor segregatie op basis van rijkdom werd voorgesteld, kunnen beide systemen worden gecombineerd. Hoewel segregatie op basis van rijkdom in de literatuur reeds werd onderzocht, benadrukken we dat de rijkdom van agenten in deze pogingen steeds onveranderlijk werd verondersteld, gesampled uit een uniforme of Gaussische verdeling^[58;59;60]. De volledig gekoppelde beschrijving van kinetische uitwisselingen en segregatie-dynamica is, op het moment van schrijven, een niet eerder gevolgde aanpak. Ook de invloed van segregatie op de verdeling van rijkdom werd bijgevolg nog niet bestudeerd.

Voor de beschrijving van de macroscopische toestand zijn nu twee grootheden van belang. De statistische verdeling van rijkdom en de hieruit volgende ongelijkheid wordt gekarakteriseerd door de Gini-index. De inhomogeniteit van de ruimtelijke verdeling van rijkdom

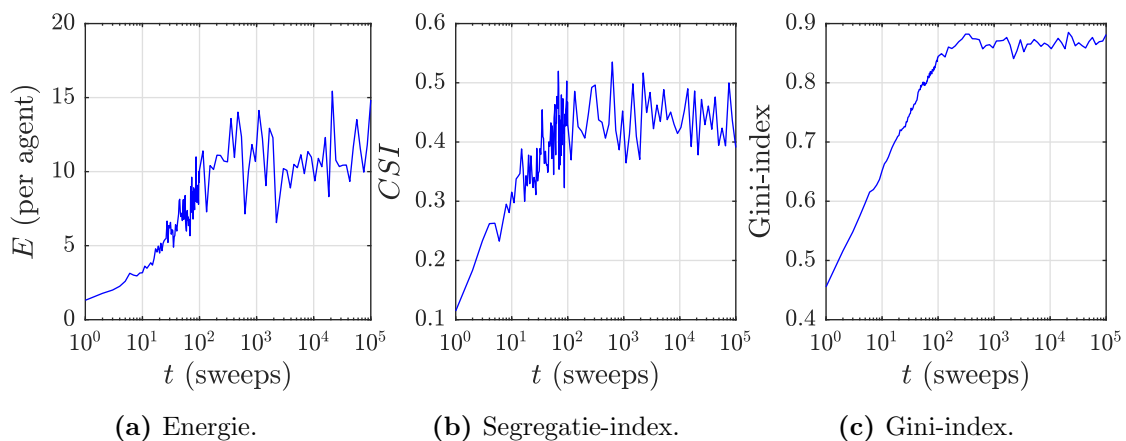
wordt weergegeven door de continue segregatie-index.

In elke tijdsstap worden twee willekeurige agenten uit het rooster gekozen. De energie van beiden wordt bepaald onder de Hamiltoniaan (5.5), waarna ze volgens het Metropolis-Hastings algoritme al dan niet van plaats wisselen. Na deze Kawasaki-verwisseling voert één van de twee betrokken agenten een transactie uit met één van zijn nieuwe naburen in de Von Neumann-buurt met straal 1, volgens één van de regels beschreven in Hoofdstuk 3. De MATLAB-implementatie van deze dynamica is te vinden in Bijlage B.5. De vragen die oprijzen zijn:

- Hoe lang duurt het vooraleer een evenwicht wordt bereikt?
- Overleeft de segregatie in combinatie met kinetische uitwisselingen?
- Hoe wordt de verdeling van rijkdom beïnvloed door het toevoegen van de segregatie?

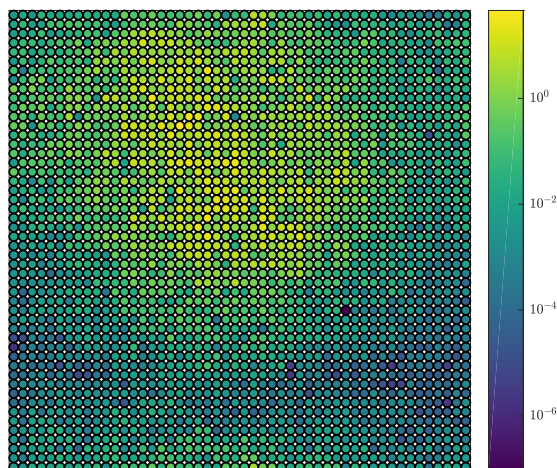
5.4.1 Uitwisselen zonder spaargedrag bij $T = 0$

We beschouwen eerst het eenvoudigste model voor de uitwisselingen, zonder spaargedrag of belasting. Dit is het mechanisme uit vergelijking (3.2). De segregatie-dynamica houden we voorlopig deterministisch bij $T = 0$. Figuur 5.11 toont de tijdsevolutie van de Gini-index, de segregatie-index en de gemiddelde energie voor de hierboven beschreven dynamica bij $T = 0$. In tegenstelling tot Figuur 5.7 kent nu ook de gemiddelde energie een aanvankelijk stijgend verloop. Dit komt doordat de bedragen veranderen doorheen de tijd. Hieruit besluiten we dat de continue segregatie-index, die via de variantie rekening houdt met de statistische verdeling, een relevantere grootte is. Beide vertonen sterke fluctuaties. Naast het eindige rooster is dit een gevolg van de uitwisselingen. Wanneer de rijkdom van twee agenten verandert in een uitwisseling, wijzigt ook de interactie-energie van beide agenten met hun naburen. Één uitwisseling tussen twee agenten beïnvloedt zo de bijdrage van zeven interacties tot de totale segregatie-index. De bereikte evenwichtssituatie, getoond in Figuur 5.12, blijkt nog steeds geordend te zijn, hoewel de segregatie-index lager is dan voordien.



Figuur 5.11 – Thermalisatie van een 50×50 rooster (met aanvankelijke rijkdom $m_i^{(0)} = 1$) in het kinetische uitwisselingsmodel met segregatie. Zowel de statistische als ruimtelijke verdeling bereiken na 10^3 sweeps een evenwichtstoestand.

Figuur 5.13 toont de cumulatieve verdelingsfunctie na het bereiken van evenwicht in een



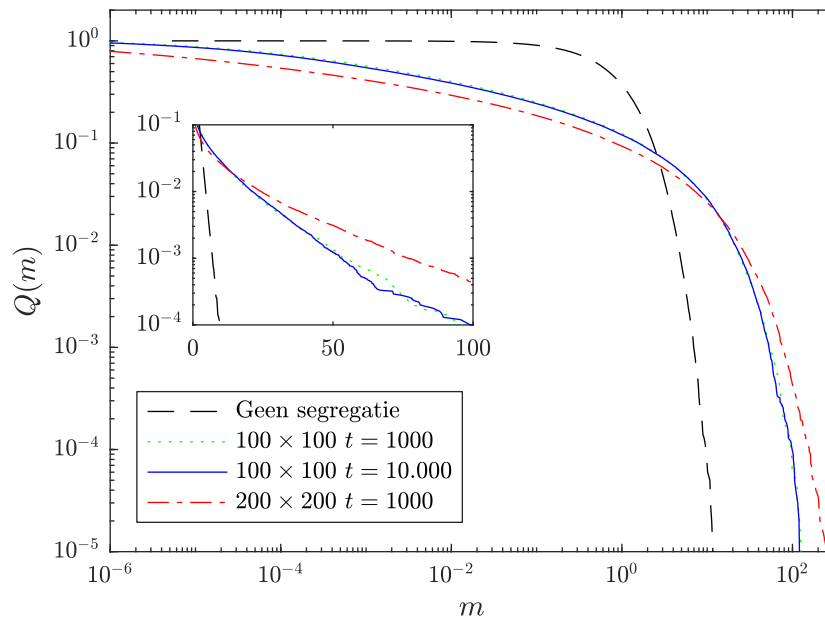
Figuur 5.12 – Evenwichtstoestand (na 10^4 sweeps) van een 50×50 rooster in het kinetische uitwisselingsmodel zonder sparen, met segregatie gegenereerd door de Hamiltoniaan (5.5) bij $T = 0$ en verhuisdynamica doorheen het hele rooster.

100×100 rooster. Het samenvallen van de verdeling na 1000 en 10,000 sweeps toont aan dat de stationaire toestand bereikt is. De evenwichtstoestand kan niet meer worden beschreven door de exponentiële Boltzmann-verdeling, zoals het geval was in het model zonder segregatie. De hoogste 1% vertoont een bij benadering exponentiële daling, zoals het lineaire verband in de log-lineaire weergave aantoont. In het lage regime is de daling echter sterker. Uit de evenwichtsverdeling van het 200×200 rooster blijkt de staart van de verdeling dikker te zijn in een groter rooster, maar kwalitatief van dezelfde vorm te zijn.

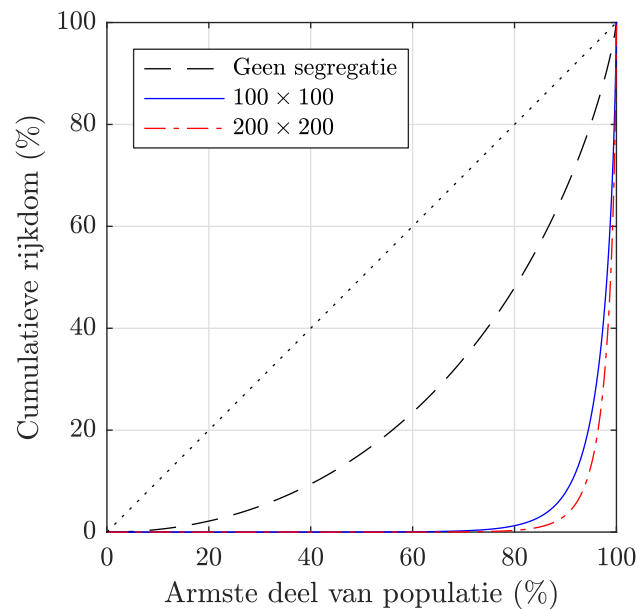
De Lorenz-curve, getoond in Figuur 5.14, bevestigt dat de situatie is veranderd in een extreme ongelijkheid waarbij meer dan 90% van alle rijkdom geconcentreerd is bij minder dan 10% van de populatie.

Deze grotere ongelijkheid is een rechtstreeks gevolg van de ruimtelijke scheiding tussen arm en rijk. In het kinetische model zonder segregatiemechanisme was er een natuurlijke ongelijkheid in de vorm van de exponentiële verdeling. De ongelijkheid bleef echter beperkt door het feit dat alle agenten met elkaar konden interageren. Een arme agent kon op elk moment in een rijkere klasse terecht komen door een willekeurige uitwisseling. In de deelname aan economische activiteit -en de daaruit volgende toegang tot rijkdom- werd niet gediscrimineerd tussen arm en rijk; de voorgestelde economie was in deze zin egalitair. In het rooster is rijkdom gelokaliseerd -zoals blijkt uit Figuur 5.12- en kan deze slechts aan een eindige snelheid doorheen de populatie diffunderen. De toevoeging van een segregatiemechanisme heeft als gevolg dat arme agenten ruimtelijk zijn geïsoleerd van de rijkdom in het bezit van de rijke klasse. Deze rijkdom is fundamenteel ontoegankelijk voor de arme klasse, die enkel onderling kan uitwisselen.

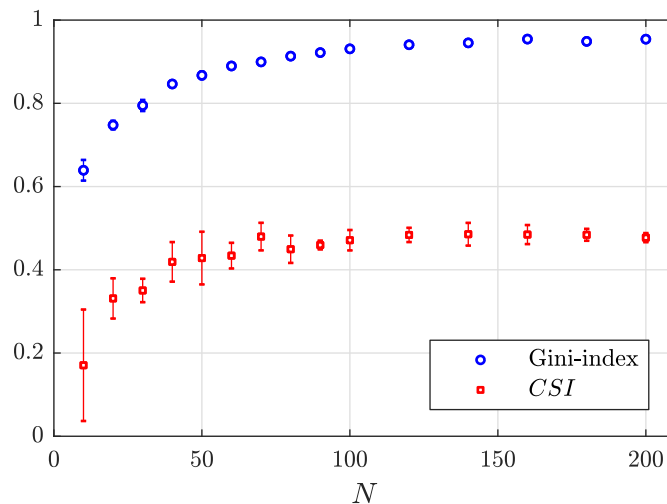
De ruimtelijke concentratie van rijkdom als verklaring voor de toegenomen ongelijkheid heeft als gevolg dat deze ook afhankelijk is van de grootte van het rooster. Immers, hoe groter het rooster, hoe verder een agent van rijkdom geïsoleerd kan zijn. Dit wordt geïllustreerd in Figuur 5.15. De Gini-index neigt voor grotere roosters dichter naar 1. De segregatie-index blijft beperkt tot $CSI \approx 0.5$. Voor beide grootheden blijkt een 100×100 rooster voldoende om de voornaamste *finite size effects* te omzeilen.



Figuur 5.13 – Verdeling van geld in het kinetische uitwisselingsmodel zonder sparen, na toevoeging van segregatie bij $T = 0$. De datapunten zijn het resultaat van 10 onafhankelijke simulaties in rooster van de gegeven groottes. Ter vergelijking wordt ook de verdeling getoond in afwezigheid van segregatie, eerder getoond in Figuur 3.1.



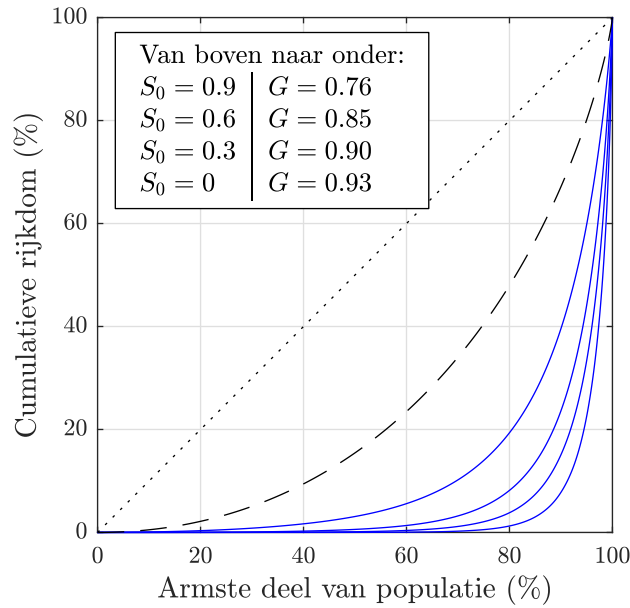
Figuur 5.14 – Lorenz- curve van de verdeling in het kinetisch uitwisselingsmodel zonder sparen en met segregatie in een 100×100 rooster. De simulatieparameters zijn dezelfde als in Figuur 5.13. Voor het model met segregatie geldt $G = 0.93$.



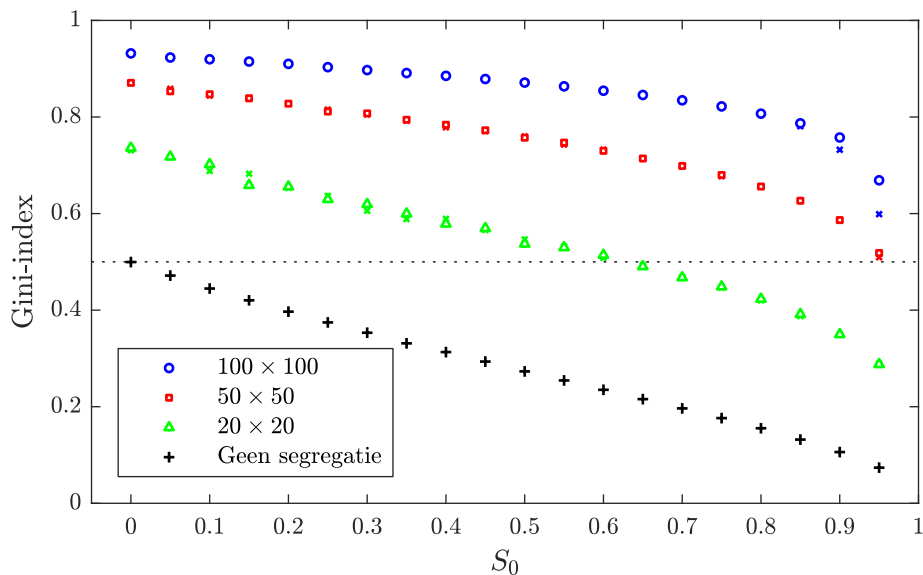
Figuur 5.15 – Gini-index en continue segregatie-index van de evenwichtstoestand (bereikt na 10^3 sweeps) van het kinetisch uitwisselingsmodel met segregatie in roosters van verschillende afmeting $N \times N$. De foutenvlaggen zijn de standaardafwijking na 5 onafhankelijke simulaties, en zijn logischerwijze groter bij kleine roosters.

5.4.2 Uitwisselen met constante spaarfactor bij $T = 0$

In Hoofdstuk 3 bleek het toevoegen van een constante spaarfactor de ongelijkheid te verminderen, waarbij $S_0 \rightarrow 1$ leidde tot een sterk gepiekte Gaussische verdeling rond het gemiddelde en $G \approx 0$. Figuur 5.16 toont voor enkele waarden van S_0 de Lorenz-curve en Gini-index, opgemeten in een 100×100 rooster. Ook getoond is de Lorenz-curve voor $S_0 = 0$ (met dus de grootste ongelijkheid) in het model zonder segregatie. De spaarfactor blijkt opnieuw de ongelijkheid te verlagen, maar deze blijft in een voldoende groot rooster steeds hoger dan in het model zonder segregatie. Deze conclusie wordt bevestigd door Figuur 5.17, waarin we de Gini-index tonen voor een groter bereik van S_0 . Deze figuur beklemtoont bovendien opnieuw de afhankelijkheid van de roosterdimensies: in kleine roosters heeft de segregatie minder invloed, en is het gelijkmakend effect van de spaarfactor groter.



Figuur 5.16 – Lorenz-curven van het kinetische uitwisselingsmodel met vaste spaarfactor en segregatie, gegenereerd via Kawasaki-dynamica over arbitraire afstand bij $T = 0$. De figuur is het resultaat van 10 onafhankelijke simulaties van 10^4 sweeps in een 100×100 rooster. De zwarte streepjeslijn toont ter vergelijking de Lorenz-curve bij $S_0 = 0$ in afwezigheid van segregatie (Figuur 3.1).

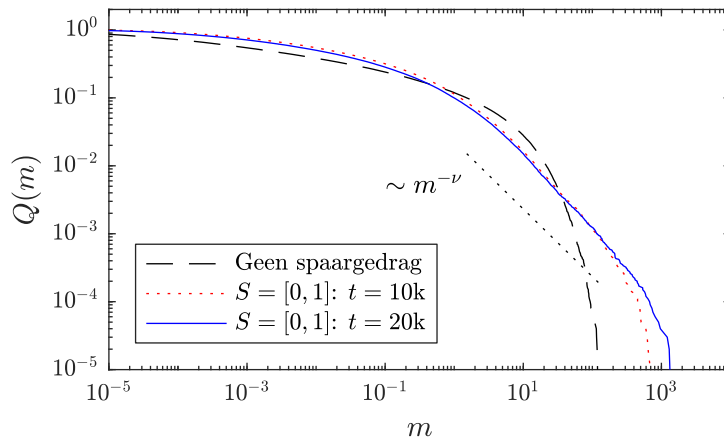


Figuur 5.17 – Gini-index van het kinetische uitwisselingsmodel met vaste spaarfactor en segregatie, gegenereerd via Kawasaki-dynamica over arbitraire afstand bij $T = 0$ in roosters van verschillende groottes. De datapunten voor elk rooster zijn de evenwichtstoestand bereikt na 5000 (\times) en 10,000 sweeps (\circ , \triangle , \square). Ter vergelijking tonen we ook de situatie zonder segregatie ($+$), Figuur 3.4. De foutenvlaggen van de standaardafwijking na 5 onafhankelijke simulaties zijn kleiner dan de markeringen, en werden weggelaten.

5.4.3 Uitwisselen met verdeelde spaarfactor bij $T = 0$

Het invoeren van gedifferentieerd spaargedrag in het model zonder segregatie leidde tot een verhoogde ongelijkheid en een machtswetregime in de verdeling van rijkdom. We gaan opnieuw het effect na van individuele spaarfactoren, uniform verdeeld in het interval $[0, 1]$. Zoals blijkt uit Figuur 5.18 geeft deze uitbreiding opnieuw tot een Pareto-regime met exponent $1 + \nu = 2.00 \pm 0.13$, in overeenkomst met het model zonder segregatie.

Net als in Sectie 3.3 blijkt de stationaire toestand erg laat tot stand te komen vergeleken met de modellen zonder spaargedrag of met constante spaarfactor. Ook in het gesegegreerde model blijkt de accumulatie van geld bij de hamsteraars door te gaan op een langere tijdschaal dan het ontstaan van evenwicht in de armere klasse.

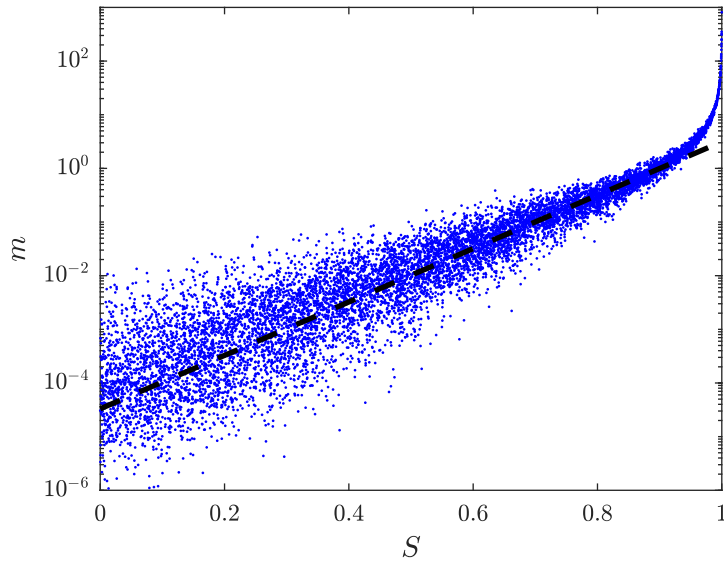


Figuur 5.18 – Verdeling van rijkdom in het kinetische uitwisselingsmodel met verdeelde spaarfactoren en segregatie bij $T = 0$. De figuur is het resultaat van 10 onafhankelijke simulaties in een 100×100 rooster. De stippellijn geeft de machtswet aan met exponent $1 + \nu \approx 2$. Ook de verdeling bij uitwisselingen met segregatie maar zonder spaargedrag wordt getoond als streepjeslijn; dit is het resultaat uit Figuur 5.13.

Tot slot leidt de accumulatie van geld bij de sparende elite opnieuw tot een positief verband tussen de spaarfactor en de rijkdom van agenten in de evenwichtstoestand. Dit wordt weergegeven in Figuur 5.19. De bedragen uit het machtswetregime komen uitsluitend voor bij agenten met spaarfactor $S \approx 1$. In tegenstelling tot Figuur 3.12 blijkt er nu echter een duidelijk exponentieel verband tussen rijkdom en spaargedrag in de grote massa met $S < 0.8$:

$$\langle m(S) \rangle \sim \exp\{S/\sigma\}, \quad (5.7)$$

waarbij we vinden dat $\sigma = 0.0873 \pm 0.0011$.



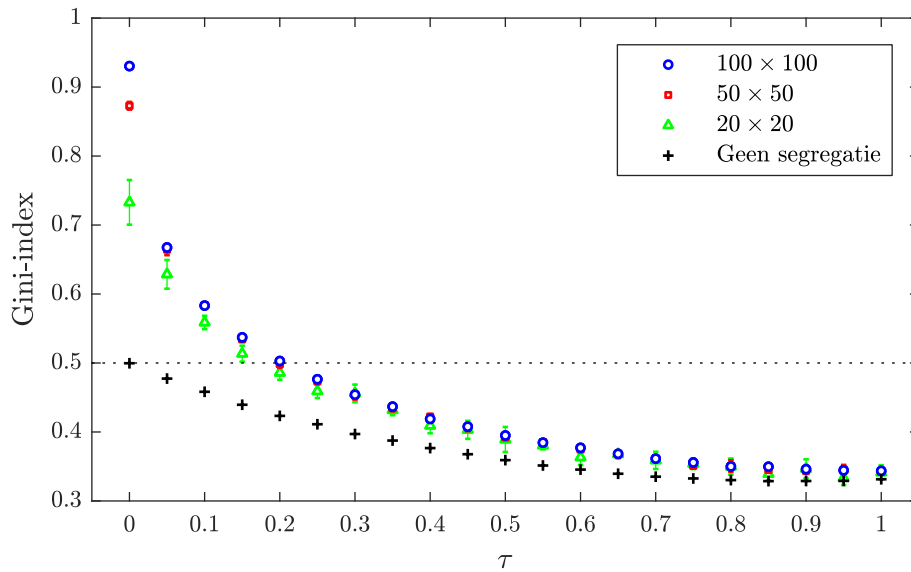
Figuur 5.19 – Verband tussen de spaarfactor en de rijkdom van agenten in het uitwisselingsmodel met segregatie en verdeelde spaarfactoren. De Figuur is één realisatie van evenwicht ($t = 20,000$ sweeps) in een 100×100 rooster met initiële rijkdom $m_i^{(0)} = 1$. De streepjeslijn is het exponentiële verband (5.7) met $\sigma \approx 0.087$.

5.4.4 Invloed van een herverdelende belasting bij $T = 0$

De beperkte invloed van spaargedrag op de ongelijkheid is een gevolg van het lokale karakter van deze maatregel. Zoals in Sectie 3.4 werd uitgelegd gaat de spaarfactor slechts ongelijkheid tegen doordat individuele agenten een fractie van hun rijkdom bewaren en zo niet in volledige armoede terechtkomen. De op deze manier behouden rijkdom is kleiner bij armere agenten, die door de segregatie slechts met andere armen in contact komen.

We beschouwen daarom opnieuw de herverdelende belasting als mechanisme om de ongelijkheid op globaal niveau te verminderen. Aangezien het belaste bedrag van elke transactie over de hele economie wordt herverdeeld, verwachten we dat de resulterende correctie op de ongelijkheid minder afhangt van de al dan niet gesegregeerde toestand.

Figuur 5.20 toont voor verschillende roostergroottes de Gini-index in functie van de belasting τ . Uit het convex dalende verloop blijkt dat een herverdelende belasting de ongelijkheid sterk doet afnemen. Zo daalt de Gini-index in het 100×100 rooster van $G \approx 0.93$ naar $G \approx 0.67$ bij een belasting van slechts 5% op elke transactie. Een belasting van 20% blijkt te volstaan om de ongelijkheid te reduceren tot $G \approx 0.5$, de natuurlijke waarde in afwezigheid van segregatie. Dit alles staat in sterk contrast met het concaaf dalende verloop van de ongelijkheid in Figuur 5.17, waar een daling tot $G \approx 0.67$ slechts werd bereikt door een spaarfactor van 95%. Het toevoegen van een kleine belasting blijkt bovendien de afhankelijkheid van de roosterdimensies vrijwel meteen teniet te doen. In de limiet $\tau \rightarrow 1$ nadert de Gini-index naar $G \approx 0.34$, dezelfde waarde als in afwezigheid van segregatie.



Figuur 5.20 – Gini-index van het kinetische uitwisselingsmodel met segregatie en een herverdelende belasting τ . De datapunten voor elk rooster zijn de evenwichtstoestand bereikt na 1000 sweeps. Ter vergelijking tonen we ook het geval zonder segregatie (+), Figuur 3.15. De foutenvlagen zijn de standaardafwijking na 5 onafhankelijke simulaties.

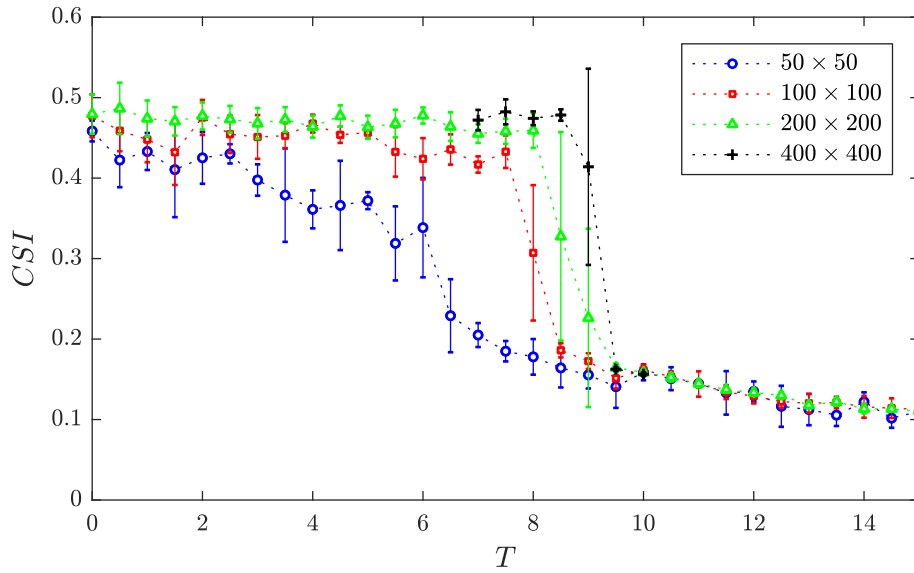
5.4.5 Uitwisselingen en segregatie bij eindige temperatuur

Ten slotte onderzoeken we de invloed van een eindige temperatuur op de mate van segregatie en ongelijkheid. Het toevoegen van thermische fluctuaties in het segregatiemechanisme zonder kinetische uitwisselingen (Sectie 5.3.1), leidde tot een geleidelijke desegregatie zonder abrupte faseovergang. Deze situatie verandert wanneer de segregatie wordt gecombineerd met kinetische uitwisselingen. Zoals voordien wordt de statistische en ruimtelijke verdeling van geld gekarakteriseerd door de Gini-index en segregatie-index. Figuur 5.21 toont het verloop van deze parameters in functie van de temperatuur, voor het kinetische uitwisselingsmodel zonder spaargedrag of belastingen. Naarmate de temperatuur stijgt daalt de ongelijkheid, maar blijft de segregatie-index aanvankelijk constant. Bij $T \approx 9$ wordt een sprong naar desegregatie en lagere ongelijkheid waargenomen. Naarmate de thermodynamische limiet wordt benaderd, blijkt een steeds scherpere faseovergang.

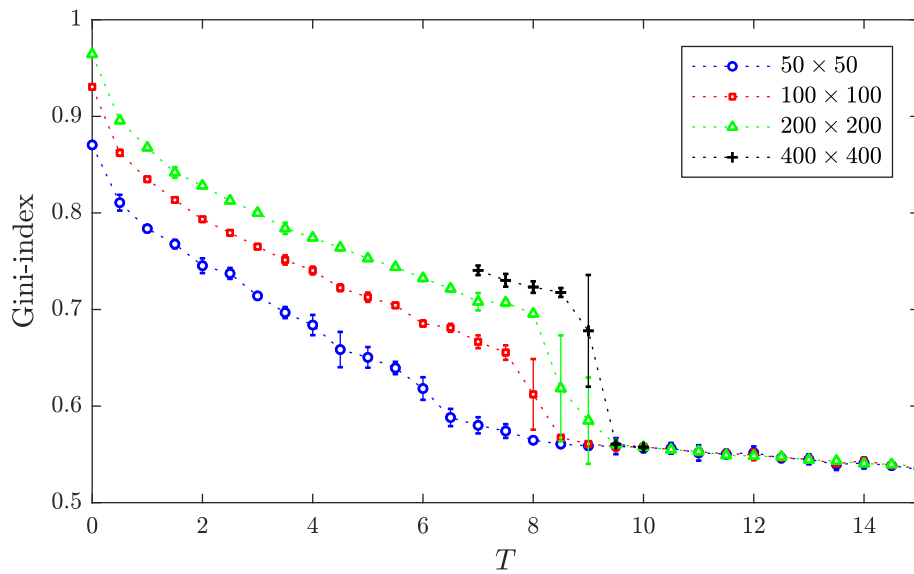
Meer inzicht in de faseovergang wordt bekomen door de verdeling van rijkdom bij verschillende temperaturen te bestuderen. Figuur 5.22 toont de cumulatieve verdelingsfunctie bij $T < T_C$, $T \lesssim T_C$, $T \approx T_C$ en $T \gtrsim T_C$. Deze wordt steeds vergeleken met de limieten $T = 0$ en $T \gg T_C$, ofwel de curves uit 5.13. Uit de figuur blijkt dat een kleine maar eindige temperatuur de segregatie reeds ongedaan maakt in het arme deel van de populatie. Deze volgt vrijwel meteen de verdeling voor $T \rightarrow \infty$, terwijl de rijkste agenten gesegregeerd blijven en de verdeling voor $T = 0$ volgen. Dit valt eenvoudig te verklaren door de Hamiltoniaan (5.5), die slechts geschaald werd met het populatiegemiddelde en geen rekening houdt met de rijkdom van de betrokken agenten. Agenten met lage m leiden tot kleine verschillen $(m_i - m_j)^2$ en dus kleine bijdragen tot de energie. Kleine fluctuaties bij lage temperatuur volstaan om deze subgroep uit de geordende toestand te halen. Grotere verschillen tussen grotere bedragen vereisen sterkere fluctuaties om te desegregeren.

Naarmate de temperatuur verder verhoogt, raakt een groeiend deel van de arme populatie gedesegegreerd, met als bovengrens voor $T \rightarrow T_C$ de rijkdom m_c waarop de verdelingen

voor $T = 0$ en $T \rightarrow \infty$ samenvallen. Dit gebeurt geleidelijk, net als de dalende ongelijkheid in Figuur 5.21. Op de kritische temperatuur T_C vindt ook in de rijke populatie een desegregatie plaats, maar dit maal op abrupte wijze. De verdeling in dit regime springt plots over van de verdeling voor $T = 0$ naar die voor $T \rightarrow \infty$. Op $T_c \approx 9$ komen kritische fluctuaties voor, zoals zichtbaar in het ietwat grillige verloop van de verdeling. Het feit dat de faseovergang gepaard gaat met een abrupte verandering in de statistische verdeling, verklaart waarom een dergelijke faseovergang niet werd waargenomen bij segregatie in een rooster van agenten met onveranderlijke rijkdom (Figuur 5.10). Dit verklaart eveneens waarom vroegere publicaties geen faseovergang rapporteren ^[58;59;60].

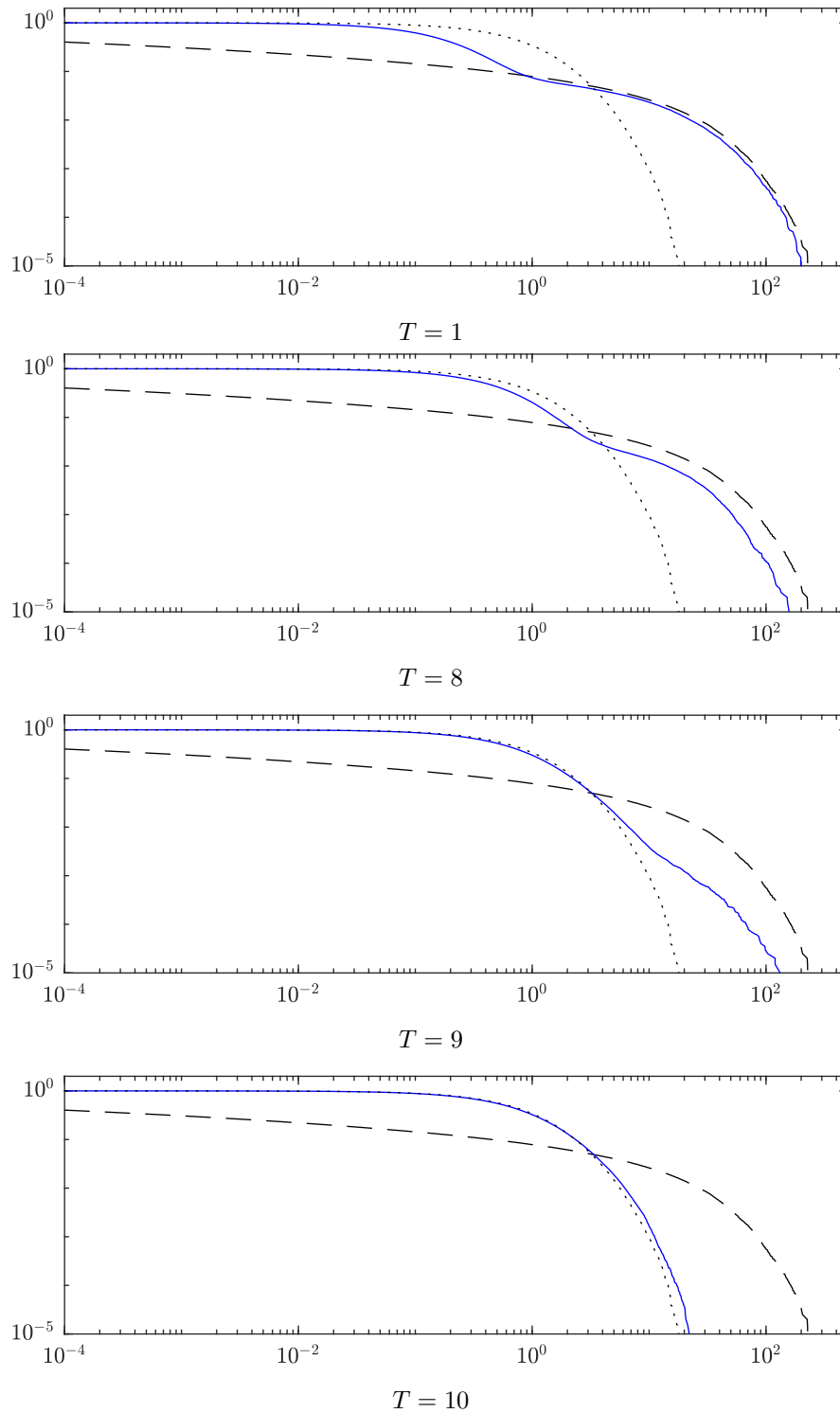


(a) Segregatie-index.



(b) Gini-index.

Figuur 5.21 – Temperatuursafhankelijkheid van de Gini-index en segregatie-index in het uitwisselingsmodel zonder spaargedrag of belastingen, met segregatie bij eindige temperatuur. De datapunten zijn de evenwichtstoestand bereikt na 2000 sweeps. De foutenvlaggen zijn de standaardafwijking na 5 onafhankelijke simulaties.



Figuur 5.22 – Verdelingsfuncties van het uitwisselingsmodel met segregatie bij verschillende temperaturen. De streepjeslijn en stippellijn zijn respectievelijk de verdelingen bij $T = 0$ en $T = 15 \gg T_C$, equivalent aan de curves in Figuur 5.13. Alle curves zijn het resultaat van 5 onafhankelijke simulaties van 2000 sweeps in een 200×200 rooster.

Besluit

Ter afsluiting formuleren we kort de voornaamste conclusies van het uitgevoerde onderzoek.

In Hoofdstuk 3 werden bestaande modellen voor kinetische uitwisseling met uniform en gedifferentieerd spaargedrag bestudeerd, alsook het effect van een herverdelende belasting. Bij een uniforme spaarfactor S_0 wijzigt de verdeling van rijkdom van de Boltzmann-verdeling naar een gamma-distributie. De Gini-index voor ongelijkheid daalt lineair met de spaarfactor, van $G = 0.5$ in afwezigheid van spaargedrag tot $G = 0$ bij $S_0 \rightarrow 1$. In deze limiet wordt de verdeling beter beschreven wordt door een Gaussische verdeling. Gedifferentieerd spaargedrag leidt tot een machtswet in de verdeling van rijkdom wanneer de individuele spaarfactor arbitrair dicht bij $S_{max} = 1$ kan komen. De spaarfactor en de rijkdom van agenten zijn positief gecorreleerd. De accumulatie van rijkdom bij een kleine elite leidt in dit geval tot een toegenomen ongelijkheid. Een herverdelende belasting leidt tot een gamma-distributie met lagere ongelijkheid, hoewel de Gini-index beperkt blijft tot $G > 0.3$.

Het Schelling-model voor spontane segregatie, behandeld in Hoofdstuk 4, blijkt slechts tot grootschalige segregatie te leiden indien agenten ook verhuizen wanneer hun nut onveranderd blijft. Bij een lage tolerantie $\Delta < 0.3$ vinden agenten zelden een acceptabele plaats en treedt geen segregatie op. Voor hogere toleranties is de macroscopische toestand sterk gesegregeerd, en we vinden een scherpe faseovergang naar desegregatie op $\Delta_C = 5/7$. Het Ising-model voor ferromagneten kan eveneens dienen als segregatiemechanisme. Hierbij wordt segregatie expliciet bevoordeeld in de microscopische interacties, en treedt de temperatuur T op als natuurlijke parameter voor fluctuaties. De uitbreiding van het Schelling-model naar eindige temperatuur levert een geleidelijke desegregatie zonder faseovergang.

De uitbreiding van kinetische uitwisselingsmodellen naar een tweedimensionaal rooster met interacties tussen naaste naburen, heeft geen invloed op de uiteindelijke evenwichtsverdeling van rijkdom in de gehele populatie. De macroscopische dynamica is diffusief met diffusie-exponent $\alpha = 1.16 \pm 0.05$ in afwezigheid van spaargedrag. Bij een constante spaarfactor nadert α naar 1 naarmate $S_0 \rightarrow 1$. In het model met gedifferentieerd spaargedrag wordt de dynamica subdiffusief ($\alpha = 0.87 \pm 0.02$) wanneer de populatie een fractie agenten met arbitrair grote spaarfactor bevat ($S_{max} = 1$).

Er werd met succes een mechanisme opgesteld om segregatie op basis van rijkdom te genereren in het tweedimensionale rooster. We kozen hierbij voor een Hamiltoniaan die, in navolging van magnetische modellen, expliciet segregatie bevoordeelt in microscopische interacties. Deze aanpak onderscheidt zich van eerdere pogingen doordat de ontevredenheid van agenten schaalt met het absolute verschil in rijkdom tussen naburen, en er geen

onderscheid wordt gemaakt tussen armere en rijkere burens.

Voor de bewegingen van agenten werd Kawasaki-dynamica gebruikt, waarbij agenten van plaats wisselen volgens het Metropolis-Hastings algoritme. Zo wordt op natuurlijke wijze een *sociale temperatuur* T geïntroduceerd die thermische fluctuaties toevoegt aan de segregatiedynamica. Hierdoor kunnen agenten met een eindige waarschijnlijkheid een niet-optimale verhuis uitvoeren. Om bij $T = 0$ segregatie in grote domeinen te genereren, blijkt het noodzakelijk om agenten over arbitraire afstand doorheen het rooster te laten verhuizen.

Vervolgens werd het gecombineerde model van segregatie en kinetische uitwisselingen bestudeerd. Deze volledig gekoppelde aanpak is een nieuwe bijdrage aan het onderzoeksveld. De macroscopische evenwichtsconfiguratie blijft in dit geval gesegregeerd op basis van rijkdom. De evenwichtsverdeling van rijkdom vertoont een dikkere staart dan in afwezigheid van segregatie, maar geen machtswetregime. Ondanks de accumulatie van rijkdom bij een kleine elite, geeft het segregatiemechanisme dus geen aanleiding tot een Pareto-verdeling. De ongelijkheid neemt toe van $G \approx 0.5$ tot $G \approx 0.93$ in een 100×100 rooster. Hoe groter het systeem, hoe dichter de Gini-index naar 1 nadert. De verklaring hiervoor ligt in de ruimtelijke scheiding tussen arm en rijk. Arme agenten kunnen niet langer interageren met rijke agenten, waardoor ze geen toegang hebben tot het grootste deel van de rijkdom in de samenleving. Segregatie hindert de economische mobiliteit.

In de gesegregeerde economie daalt de effectiviteit van lokale (individuele) maatregelen om ongelijkheid tegen te gaan. In het 100×100 rooster daalt de ongelijkheid slechts tot $G \approx 0.67$ bij een spaarfactor van 95%. Gedifferentieerd spaargedrag leidt nog steeds tot een machtswet in de verdeling van rijkdom, hoewel deze minder uitgesproken is. Globale maatregelen, zoals een herverdelende belasting, zijn onafhankelijk van de ruimtelijke verdeling van rijkdom, en blijven effectief in het tegengaan van ongelijkheid in de gesegregeerde economie. Een belasting van 20% op elke transactie reduceert de ongelijkheid tot $G \approx 0.5$, waarmee het effect van segregatie teniet wordt gedaan.

Tot slot werd de invloed van thermische fluctuaties op de segregatie-dynamica in het gecombineerde model onderzocht. Naast een continue daling van de ongelijkheid bij stijgende temperatuur, ondergaat het systeem een scherpe faseovergang naar desegregatie en lagere ongelijkheid bij een kritische temperatuur T_C . Deze faseovergang blijkt gepaard te gaan met een plotse verandering van de verdeling van rijkdom in de rijke elite, en wordt dan ook niet waargenomen wanneer de rijkdom van agenten onveranderlijk is, ongeacht hun statistische verdeling. Dit verklaart waarom eerdere publicaties een dergelijke faseovergang niet rapporteren.

Samenvattend besluiten we dat segregatie van economische agenten leidt tot een toename van ongelijkheid. Deze kan slechts beperkt worden tegengegaan door individueel spaargedrag. Globale herverdelingsmaatregelen, die de gesegregeerde structuur van de samenleving overstijgen, slagen hier wel in. Ook het toevoegen van ruis in de segregatiedynamica leidt vanaf een kritische drempelwaarde tot een sterke daling van de ongelijkheid.

Toekomstperspectieven

Het huidige werk laat nog ruimte voor verbetering. We bespreken kort de mogelijke richtingen waarin het onderzoek kan voortgaan.

De agenten in het bestudeerde model werden op een tweedimensionaal rooster geplaatst. De voornaamste motivatie hiervoor is de compatibiliteit met modellen voor residentiële segregatie, waar het rooster een logisch model voor een geografisch gebied vormt. Wat financiële transacties betreft, impliceert het rooster echter dat elke agent eenzelfde aantal interactiepartners heeft. Het aantal economische en sociale relaties dat mensen onderhouden, varieert in realiteit sterk. Een voor de hand liggende volgende stap is dan ook de uitbreiding van het voorgestelde model naar complexe netwerken, waarbij de woonplaats wordt veralgemeend naar de positie in het sociaal-economische netwerk. De verhuisdynamica kan worden vervangen door, of aangevuld met, het verleggen van links in het netwerk.

Het voorgestelde model bevoordeelt segregatie expliciet in de microscopische dynamica. In het verleden reeds enkele pogingen ondernomen om, in navolging van Schelling, een model te ontwikkelen dat macroscopische segregatie teweegbrengt als niet-triviaal gevolg van tolerante individuele voorkeuren. Deze modellen werden nog niet gecombineerd met kinetische uitwisselingen, en houden bovendien geen rekening met het eigenlijke verschil in rijkdom tussen naburige agenten. De ontwikkeling van een *Schelling-like* mechanisme voor segregatie in kinetisch uitwisselingsmodellen blijft bijgevolg een open vraag.

Het model veronderstelt tenslotte dat economische en residentiële dynamica zich op hetzelfde netwerk afspeelt. Het is aannemelijk dat agenten in de keuze van hun woonplaats of sociale relaties voorkeur geven aan een buurt bestaande uit agenten behorend tot dezelfde economische klasse (zie bijvoorbeeld Figuur 2.2), maar het is niet vanzelfsprekend dat deze buurt ook de relaties voorstelt waarlangs agenten geld uitwisselen. In een reële, moderne economie bestaat een groot aandeel van de economische activiteit juist uit transacties tussen agenten uit erg verschillende klasse. Zo ontvangt een arbeider zijn of haar salaris van een werkgever, en geeft het vervolgens uit aan huisbazen, in supermarkten enzovoort. Kortom, de beperking van financiële transacties tot agenten met een gelijkwaardige welvaart is een sterke vereenvoudiging die in complexe economieën geen stand houdt.

Bibliografie

- [1] J. P. Bouchaud. Econophysics: still fringe after 30 years?. *Europhysics News*. **50**(1):24–27, (2019).
- [2] Vilfredo Pareto. *Cours d'Économie Politique*. F. Rouge, (1897).
- [3] Benoit Mandelbrot & Richard L. Hudson. *The (Mis)behavior of Markets*. Basic Books, (2006).
- [4] Benoit Mandelbrot. The Pareto-Lévy law and the distribution of income. *Int. Econ. Rev.* **1**(2):79–106, (1960).
- [5] Victor M. Yakovenko & J. Barkley Rosser. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Rev. Mod. Phys.* **81**(4):1703–1725, (2009).
- [6] A. Chatterjee & B. K. Chakrabarti. Kinetic exchange models for income and wealth distributions. *Eur. Phys. J. B.* **60**(2):135–149, (2007).
- [7] Robert Eisberg & Robert Resnick. *Quantum Physics of atoms, molecules, solids, nuclei and particles*. John Wiley & sons, (1974).
- [8] Adrian Drăgulescu & Victor M. Yakovenko. Statistical mechanics of money. *Eur. Phys. J. B.* **17**(4):723–729, (2000).
- [9] Thomas Piketty. *Kapitaal in de 21ste eeuw*. De Bezige Bij, (2014). Oorspronkelijke titel: Le capital au XXIe siècle.
- [10] M.E.J. Newman. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemp. Phys.* **46**(5): 323–351, (2005).
- [11] Moshe Levy & Sorin Solomon. Power laws are logarithmic Boltzmann laws. *Int. J. Mod. Phys. C.* **7**(4):595–601, (1996).
- [12] A. Clauset, C. Shalizi, & M. Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM Rev.* **51**(4):661–703, (2009).
- [13] Jacques Tempere. An equilibrium-conserving taxation scheme for income from capital. *Eur. Phys. J. B.* **91**(2):38, (2018).
- [14] Yong Tao, Xiangjun Wu, Tao Zhou, Weibo Yan, Yanyuxiang Huang, Han Yu, Benedict Mondal, & Victor M. Yakovenko. Exponential structure of income inequality: evidence from 67 countries. *J. Econ. Interact. Coord.* **14**(2):345–376, (2019).
- [15] Algemene Directie Statistiek Statistics Belgium. Fiscale inkomens, (2018). URL <https://statbel.fgov.be/nl/themas/huishoudens/fiscale-inkomens>. [Online, geraadpleegd 30 maart 2019].
- [16] Algemene Directie Statistiek Statistics Belgium. Risico op armoede of sociale uitsluiting, (2018). URL <https://statbel.fgov.be/nl/themas/huishoudens/armoede-en-levensomstandigheden/risico-op-armoede-sociale-uitsluiting>. [Online, geraadpleegd 30 maart 2019].

- [17] Adrian Drăgulescu & Victor M. Yakovenko. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States. *Physica A*. **299**(1):213–221, (2001).
- [18] Wataru Souma. Universal structure of the personal income distribution. *Fractals*. **9**(4):463–470, (2001).
- [19] Oren S. Klass, Ofer Biham, Moshe Levy, Ofer Malcai, & Sorin Solomon. The Forbes 400 and the Pareto wealth distribution. *Econ. Lett.* **90**(2):290–295, (2006).
- [20] A. Y. Abul-Magd. Wealth distribution in an ancient Egyptian society. *Phys. Rev. E*. **66**, (2002).
- [21] Corrado Gini. *Variabilità e mutabilità, contributo allo studio delle distribuzioni e delle relazioni statistiche*. C. Cuppini, (1912).
- [22] Federaal Planbureau. Inkomensongelijkheid: Gini-index, (2018). URL http://www.indicators.be/nl/i/G10_GIN/Inkomensongelijkheid. [Online, geraadpleegd 21 mei 2019].
- [23] C. Vann Woodward. *The Strange Career of Jim Crow*. Oxford University Press, (1955). Commemorative Edition, 2002.
- [24] Lincoln Quillian. Does segregation create winners and losers? residential segregation and inequality in educational attainment. *Social Problems*. **61**(3):402–426, (2014).
- [25] Aaron Williams & Armand Emamdjomeh. America is more diverse than ever - but still segregated. *The Washington Post*. (2018). URL <https://www.washingtonpost.com/graphics/2018/national/segregation-us-cities>. [Online, geraadpleegd 20 maart 2019].
- [26] Studiedienst Stad Antwerpen. Omgevingsanalyse bij de opmaak van het meerjarenplan 2014-2019: Samenleven, diversiteit en sociaal beleid, (2012).
- [27] Santo Fortunato & Claudio Castellano. Community structure in graphs, (2007). arXiv:0712.2716.
- [28] Alex Thompson. Journalists and Trump voters live in separate online bubbles, MIT analysis shows. *VICE News*. (2016). URL https://news.vice.com/en_us/article/d3xamx/journalists-and-trump-voters-live-in-separate-online-bubbles-mit-analysis-shows. [Online, geraadpleegd 4 april 2019].
- [29] Vincent D. Blondel, Jean-Loup Guillaume, Renaud Lambiotte, & Etienne Lefebvre. Fast unfolding of communities in large networks. *J. Stat. Mech.* **2008**(10), (2008).
- [30] Wikimedia Commons. File: Network community structure.svg, (2016). URL <https://commons.wikimedia.org/w/index.php>. [Online, geraadpleegd 4 april 2019].
- [31] Renaud Lambiotte, Vincent D. Blondel, Cristobald de Kerchove, Etienne Huens, Christophe Prieur, Zbigniew Smoreda, & Paul Van Dooren. Geographical dispersal of mobile communication networks. *Physica A*. **387**(21):5317 – 5325, (2008).
- [32] Douglas S. Massey & Nancy A. Denton. The dimensions of residential segregation. *Social Forces*. **67**(2):281–315, (1988).
- [33] Thomas C. Schelling. Models of segregation. *Am. Econ. Rev.* **59**(2):488–493, (1969).
- [34] Otis Dudley Duncan & Beverly Duncan. A methodological analysis of segregation indexes. *Am. Sociol. Rev.* **20**(2):210–217, (1955).
- [35] Linton C. Freeman. Segregation in Social Networks. *Sociological Methods & Research*. **6**(4):411–429, (1978).
- [36] Giorgio Fagiolo, Marco Valente, & Nicolaas J. Vriend. Segregation in networks. *J. Econ. Behav. Org.* **64**(3):316 – 336, (2007).

- [37] P. A. P. Moran. Notes on continuous stochastic phenomena. *Biometrika*. **37**(1/2):17–23, (1950).
- [38] B. K. Chakrabarti, A. Chatterjee, & S. Yarlagadda. *Econophysics of Wealth Distributions*. Springer-Verlag, (2005).
- [39] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, & Kimmo Kaski. Statistical model with a standard gamma distribution. *Phys. Rev. E*. **70**:016104, (2004).
- [40] M. Patriarca, A. Chakraborti, K. Kaski, & G. Germano. Kinetic theory models for the distribution of wealth: Power law from overlap of exponentials. In *Econophysics of Wealth Distributions* Chakrabarti et al.^[38], pages 93–110.
- [41] Peter H. Westfall. Kurtosis as peakedness, 1905–2014. R.I.P.. *Am. Stat.* **68**(3):191–195, (2014).
- [42] Oleg Evsutin, Alexander Shelupanov, Roman Meshcheryakov, Dmitry Bondarenko, & Angelika Rashchupkina. The algorithm of continuous optimization based on the modified cellular automaton. *Symmetry*. **8**(9), (2016).
- [43] OpenGenus Foundation. Euclidean vs Manhattan vs Chebyshev distance, (2018). URL <https://iq.opengenus.org/euclidean-vs-manhattan-vs-chebyshev-distance>.
- [44] Thomas C. Schelling. Dynamic models of segregation. *J. Math. Sociol.* **1**(2):143–186, (1971).
- [45] Romans Pancs & Nicolaas J. Vriend. Schelling’s spatial proximity model of segregation revisited. *J. Publ. Econ.* **91**(1):1 – 24, (2007).
- [46] F.L. Jones. Simulation models of group segregation. *Aus. NZ. J. Sociol.* **21**(3):431–444, (1985).
- [47] Thomas C. Schelling. *Micromotives and Macrobehavior*. Norton, New York, (2006). Eerste editie: 1978.
- [48] D. Stauffer & S. Solomon. Ising, Schelling and self-organising segregation. *Eur. Phys. J. B*. **57**(4):473–479, (2007).
- [49] Alexander J. Laurie & Narendra K. Jaggi. Role of ‘vision’ in neighbourhood racial segregation: A variant of the Schelling segregation model. *Urban Studies*. **40**(13):2687–2704, (2003).
- [50] Dejan Vinković & Alan Kirman. A physical analogue of the Schelling model. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. **103**(51):19261–19265, (2006).
- [51] L. Gauvin, J. Vannimenus, & Jean-Pierre Nadal. Phase diagram of a Schelling segregation model. *Eur. Phys. J. B*. **70**(2):293–304, (2009).
- [52] Ernst Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Z. Phys.* **31**(1):253–258, (1925).
- [53] Andrea Taroni. 90 years of the Ising model. *Nat. Phys.* **11**:997, (2015).
- [54] Daniel V. Schroeder. *An introduction to thermal physics*. Addison Wesley Longman, (2005).
- [55] Lars Onsager. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.* **65**: 117–149, (1944).
- [56] Serge Galam, Yuval Gefen, & Yonathan Shapir. Sociophysics: A new approach of social collective behaviour: mean-behaviour description of a strike.. *J. Math. Sociol.* **9**(1):1–13, (1982).
- [57] Dietrich Stauffer & Christian Schulze. Urban and Scientific Segregation: The Schelling-Ising Model, (2007). arXiv:0710.5237v1.
- [58] Anand Sahasranaman & Henrik Jeldtoft Jensen. Dynamics of transformation from segregation to mixed wealth cities. *PLOS ONE*. **11**(11):1–12, (2016).

- [59] Anand Sahasranaman & Henrik Jeldtoft Jensen. Ethnicity and wealth: The dynamics of dual segregation. *PLOS ONE*. **13**(10), (2018).
- [60] Stephen Benard & Robb Willer. A wealth and status-based model of residential segregation. *J. Math. Sociol.* **31**(2):149–174, (2007).
- [61] M. E. J. Newman & G. T. Barkema. *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Clarendon Press, (1999).

Bijlage A

Het Metropolis-Hastings algoritme

Het merendeel van de resultaten in deze thesis werden bekomen via numerieke simulaties. Meer specifiek werd er gezocht naar de verwachtingswaarden voor macroscopische grootheden van een bepaald systeem in evenwicht. In veel gevallen is deze evenwichtssituatie een ensemble van toestanden waarin het systeem zich met een bepaalde waarschijnlijkheid kan bevinden. In deze bijlage bespreken we kort de theoretische basis voor de Monte Carlo Markov chain (MCMC) algoritmes waarmee deze evenwichtsverdeling wordt bemonsterd. Het resulterende algoritme wordt doorheen deze thesis gebruikt voor de dynamica van segregatiemodellen. Een uitgebreide bespreking van Monte-Carlo methodes voor statistische fysica is te vinden in Newman and Barkema^[61].

We beschouwen een algemeen systeem dat zich in een eindig of oneindig aantal toestanden $\{i\}$ met kansen $\{p_i\}$ kan bevinden. De kans dat het systeem gedurende tijd dt van toestand i naar j overgaat, wordt gegeven door de transitiewaarschijnlijkheid $W(i \rightarrow j)$. De dynamica van de bezettingswaarschijnlijkheid p_i is bijgevolg:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j [p_j W(j \rightarrow i) - p_i W(i \rightarrow j)]. \quad (\text{A.1})$$

Ook wanneer het systeem in evenwicht is, hoeft het niet vast te zitten in één toestand: probabilistische fluctuaties van thermische of andere aard kunnen de toestand op elk moment veranderen. Een stationaire toestand van het systeem wordt daarom gedefinieerd door de eis dat de bezettingswaarschijnelijkheden niet veranderen in de tijd. De mastervergelijking hierboven impliceert dan dat, *gemiddeld*, de stroom in en uit een gegeven toestand i gelijk zijn. Dit leidt tot de voorwaarde van *global balance*:

$$\sum_j [p_j W(j \rightarrow i) - p_i W(i \rightarrow j)] = 0. \quad (\text{A.2})$$

Een voldoende (maar niet noodzakelijke) voorwaarde voor global balance, is de eis dat bovenstaand evenwicht geldt tussen elk paar toestanden afzonderlijk. Dit noemt men *detailed balance*:

$$p_j W(j \rightarrow i) = p_i W(i \rightarrow j). \quad (\text{A.3})$$

In Monte Carlo Markov chain (MCMC) simulaties voor het samplen van de evenwichtsverdeling, wordt de toestandruimte doorlopen als een Markov-keten met overgangskansen

die aan de global balance voorwaarde voldoen. De verwachtingswaarde van macroscopische grootheden bij evenwicht kan vervolgens worden bepaald door deze op te meten in een groot aantal realisaties. De meest gebruikelijke keuze voor de overgangskansen is het Metropolis-Hastings algoritme (1953):

$$W(i \rightarrow j) = \min \left[1, \frac{p_j}{p_i} \right] \quad (\text{A.4})$$

Het is makkelijk te verifiëren dat deze keuze inderdaad voldoet aan detailed balance. De transitiewaarschijnlijkheid wordt bij simulaties opgesplitst in een a priori kansverdeling $\mathcal{A}(i \rightarrow j)$ voor het voorstellen van een overgang, en een a posteriori kans $\mathcal{P}(i \rightarrow j)$ voor het aanvaarden van deze overgang. De detailed balance voorwaarde wordt zo:

$$\frac{\mathcal{P}(i \rightarrow j)}{\mathcal{P}(j \rightarrow i)} = \frac{p_j \mathcal{A}(j \rightarrow i)}{p_i \mathcal{A}(i \rightarrow j)}. \quad (\text{A.5})$$

De a priori kans wordt meestal met een *random number generator** uniform gekozen uit een set beschouwde overgangen (zie verder). Deze uniforme kansen kunnen worden weggelaten, zodat de detailed balance voorwaarde wordt herleid tot

$$\frac{\mathcal{P}(i \rightarrow j)}{\mathcal{P}(j \rightarrow i)} = \frac{p_j}{p_i}. \quad (\text{A.6})$$

De finale vorm van het Metropolis-Hastings algoritme, dat aan deze voorwaarde voldoet, is dan:

$$\mathcal{P}(i \rightarrow j) = \min \left[1, \frac{p_j}{p_i} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Met andere woorden: de stationaire verdeling met *gekende* kansen $\{p_i\}$ wordt correct gesampled indien we een willekeurig gekozen overgang $i \rightarrow j$ accepteren met de kans gegeven in (A.7).

In het Ising-model, het Schelling-model en het nieuwe segregatie-model bij eindige temperatuur, worden grootheden opgemeten van deze systemen in contact met een reservoir bij temperatuur T . Het systeem fluctueert continu door uitwisseling van energie met het reservoir, en doorloopt zo de hele toestandsruimte[†]. In deze situatie van thermisch evenwicht is de waarschijnlijkheidsverdeling van toestanden de Boltzmann-verdeling, waarbij het gewicht van een toestand enkel bepaald wordt door de energie E_i :

$$p_i \sim \exp \left\{ \frac{-E_i}{k_B T} \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Dit brengt ons tot het Metropolis-Hastings algoritme voor thermische systemen in evenwicht (waarbij we de Boltzmann-constante in de temperatuur opnemen):

$$\mathcal{P}(i \rightarrow j) = \min \left[1, \exp \left\{ \frac{-\Delta E}{T} \right\} \right], \quad \text{waarin } \Delta E = E_j - E_i. \quad (\text{A.9})$$

* Deze thesis werd volledig in MATLAB gemaakt, met de ingebouwde functies **rand** en **randi**.

† Dit is de aanname van ergodiciteit, een eigenschap die slechts voor een beperkt aantal systemen rigoureus kan worden bewezen.

Bijlage B

Matlab-implementaties

Hieronder worden de voornaamste MATLAB-functies opgelijst die werden gebruikt om de resultaten in deze thesis te bekomen. Alle simulaties werden uitgevoerd in MATLAB R2017b.

B.1 Kinetische uitwisselingsmodellen

B.1.1 Uitwisselen met constante of verdeelde spaarfactor

```
1 % exchange_saving.m
2 % Lennart Fernandes (March 19 2019)
3 % Kinetic exchange with individual saving factors.
4
5 function m_out=exchange_saving(m_in,N,S)
6     % m_in = vector of agents' wealth
7     % N    = number of agents
8     % S    = vector of saving factors
9
10    numIters=N;
11    m=m_in;
12    for i=1:numIters
13        x1=randi(N);    % Pick agent 1
14        x2=randi(N);    % Pick agent 2
15        % Exchange:
16        exchange_m = (1-S(x1))*m(x1) + (1-S(x2))*m(x2);
17        E=rand(1);
18        m1_new=S(x1)*m(x1) + E*(exchange_m);
19        m2_new=S(x2)*m(x2) + (1-E)*(exchange_m);
20        m(x1)=m1_new;
21        m(x2)=m2_new;
22    end
23    m_out=m;
24    end
```

B.1.2 Uitwisselen met herverdelende belasting

```

1 % exchange_tax.m
2 % Lennart Fernandes (March 19 2019)
3 % Kinetic exchange with tax
4
5 function m_out=exchange_tax(m_in,N,taxrate)
6
7 numIters=N;
8 m=m_in;
9 for i=1:numIters
10     x1=randi(N);    % Pick agent 1
11     x2=randi(N);    % Pick agent 2
12     E=rand(1);
13     exchange_gross=E*(m(x1)+m(x2)) - m(x1);
14     % Sign of exchange_gross determines loser and winner
15     % Losing agent loses gross value, winning agent gets net amount
16     if exchange_gross > 0 %m1 is winner
17         m(x2) = m(x2) - exchange_gross;
18         m(x1) = m(x1) + (1-taxrate)*exchange_gross;
19         m = m + taxrate*exchange_gross/N ;
20     else %m2 is winner
21         m(x2) = m(x2) - (1-taxrate)*exchange_gross;
22         m(x1) = m(x1) + exchange_gross;
23         m = m - taxrate*exchange_gross/N ;
24     end
25 end
26 m_out=m;
27 end

```

B.2 Schelling-model

We tonen Algoritme 1 (vaste stof-clustering). Algoritme 2 wordt bekomen door op regel 42 $u_{\text{new}} > u_{\text{old}}$ te vervangen door $u_{\text{new}} \geq u_{\text{old}}$.

```

1 % schelling_move_solid.m
2 % Lennart Fernandes (April 22 2019)
3 % Based on algorithms in:
4 % Vinkovic & Kirman: 'A physical analogue of the Schelling model'
   PNAS 103(51) 2006
5
6 function S_out=schelling_move_solid(S_in,L,Delta)
7     % S_in = Lattice with red, blue or empty sites (+1,-1,0)
8     % L    = Size of square lattice
9     % Delta = Individual tolerance
10 S=S_in;
11 numIters=L^2;
12
13 for i=1:numIters
14     agent=randi(L^2); % Pick agent
15     [xA,yA]=ind2sub(L,agent);
16     trial_pos=randi(L^2); % Pick moving spot
17     [xB,yB]=ind2sub(L,trial_pos);
18
19     if abs(S(xA,yA))==1 && S(xB,yB)==0

```



```

20     %Old spot utility:
21     if S(xA,yA)==1
22         [n_same,n_diff]=n_up_down_moore(S,L,xA,yA);
23     else
24         [n_diff,n_same]=n_up_down_moore(S,L,xA,yA);
25     end
26     if n_diff/(n_same+n_diff)>Delta
27         u_old=0;
28     else
29         u_old=1;
30     end
31     %New spot utility:
32     if S(xA,yA)==1
33         [n_same_new,n_diff_new]=n_up_down_moore(S,L,xB,yB);
34     else
35         [n_diff_new,n_same_new]=n_up_down_moore(S,L,xB,yB);
36     end
37     if n_diff_new/(n_same_new+n_diff_new)>Delta
38         u_new=0;
39     else
40         u_new=1;
41     end
42     if u_new > u_old
43         S(xB,yB)=S(xA,yA);
44         S(xA,yA)=0;
45     else
46     end
47 else
48 end
49 end
50 S_out=S;
51 end

1 % n_up_down_moore.m
2 % Number of up and down spins in Moore neighborhood
3 function [n_up,n_down]=n_up_down_moore(S,N,xA,yA)
4     % Nearest neighbors:
5     aboveA = mod(xA - 1 - 1, N) + 1;
6     belowA = mod(xA + 1 - 1, N) + 1;
7     leftA  = mod(yA - 1 - 1, N) + 1;
8     rightA = mod(yA + 1 - 1, N) + 1;
9
10    %Total amount of neighbors:
11    n_tot = abs(S(aboveA,yA))+abs(S(belowA,yA))+abs(S(xA,leftA))+
12            abs(S(xA,rightA))...
13            +abs(S(aboveA,leftA))+abs(S(aboveA,rightA))+abs(S(belowA,
14                leftA))+abs(S(belowA,rightA));
15    %Net amount of positive (up) neighbors:
16    n_net = S(aboveA,yA)+S(belowA,yA)+S(xA,leftA)+S(xA,rightA)...
17            +S(aboveA,leftA)+S(aboveA,rightA)+S(belowA,leftA)+S(belowA,
18                rightA) ;
19
20    n_up = (n_tot+n_net)/2;
21    n_down = (n_tot-n_net)/2;
22 end

```

B.3 Kinetische uitwisseling op een rooster

We tonen enkel het uitwisselingsmodel tussen Von Neumann-naburen met spaargedrag. De implementatie van een herverdelende belasting is analoog aan Sectie B.1.

```

1 % exchange_lattice_saving.m
2 % Lennart Fernandes (March 19 2019)
3 % Kinetic exchange with individual saving factors.
4 % Exchanges between Neumann-neighbors on LxL lattice.
5
6 function m_out=exchange_lattice_saving(m_in,L,S)
7
8 numIters=L^2;
9 m=m_in;
10 for i=1:numIters
11     agent=randi(L^2); % Pick agent
12     [x,y]=ind2sub(L,agent);
13     neighbor=randi(4); % Pick neighbor
14     switch neighbor
15         case 1
16             x_ne=mod(x-2,L)+1;
17             y_ne=y;
18         case 2
19             x_ne=mod(x,L)+1;
20             y_ne=y;
21         case 3
22             x_ne=x;
23             y_ne=mod(y-2,L)+1;
24         otherwise
25             x_ne=x;
26             y_ne=mod(y,L)+1;
27     end
28     exchange_capital = (1-S(x,y))*m(x,y) + (1-S(x_ne,y_ne))*m(
29         x_ne,y_ne) ;
30     E=rand(1);
31     new_xy=S(x,y)*m(x,y) + E*(exchange_capital);
32     new_ne=S(x_ne,y_ne)*m(x_ne,y_ne)+(1-E)*(exchange_capital);
33     m(x,y)=new_xy;
34     m(x_ne,y_ne)=new_ne;
35 end
36 m_out=m;
end

```

B.4 Segregatie op basis van rijkdom

We tonen de implementatie van Kawasaki-dynamica onder de Hamiltoniaan (5.5) bij eindige temperatuur en over arbitraire afstand in het rooster.

```

1 % segregation_kawasaki_anywhere.m
2 % Lennart Fernandes (April 1 2019)
3 % Segregating Kawasaki move of two agents.
4
5 function m_out = segregation_kawasaki_anywhere(m_in,T,L)

```

```

6
7 numIters=L^2;
8 m=m_in;
9 m_bar=mean(m(:));
10
11 for i=1:numIters
12     linearindexA=randi(L^2); % Pick agent 1
13     [xA,yA]=ind2sub(L,linearindexA);
14     linearindexB=randi(L^2); % Pick agent 2
15     [xB,yB]=ind2sub(L,linearindexB);
16
17     % Neighbors:
18     aboveA = mod(xA - 1 - 1, L) + 1;
19     belowA = mod(xA + 1 - 1, L) + 1;
20     leftA = mod(yA - 1 - 1, L) + 1;
21     rightA = mod(yA + 1 - 1, L) + 1;
22
23     aboveB = mod(xB - 1 - 1, L) + 1;
24     belowB = mod(xB + 1 - 1, L) + 1;
25     leftB = mod(yB - 1 - 1, L) + 1;
26     rightB = mod(yB + 1 - 1, L) + 1;
27
28     dH= (m(xB,yB)-m(aboveA,yA))^2 + (m(xB,yB)-m(belowA,yA))^2 + (
29         m(xB,yB)-m(xA,leftA))^2 + (m(xB,yB)-m(xA,rightA))^2 ...
30         + (m(xA,yA)-m(aboveB,yB))^2 + (m(xA,yA)-m(belowB,yB))^2 + (
31         m(xA,yA)-m(xB,leftB))^2 + (m(xA,yA)-m(xB,rightB))^2 ...
32         -((m(xA,yA)-m(aboveA,yA))^2 + (m(xA,yA)-m(belowA,yA))^2 + (
33         m(xA,yA)-m(xA,leftA))^2 + (m(xA,yA)-m(xA,rightA))^2) ...
34         -((m(xB,yB)-m(aboveB,yB))^2 + (m(xB,yB)-m(belowB,yB))^2 + (
35         m(xB,yB)-m(xB,leftB))^2 + (m(xB,yB)-m(xB,rightB))^2);
36
37     dH=dH/m_bar; %Rescaling
38
39     if dH<0 || rand()<exp(-dH/T)
40         m_hold=m(xA,yA);
41         m(xA,yA)=m(xB,yB);
42         m(xB,yB)=m_hold;
43     else
44         end
45 end
46 m_out=m;
47 end

```

B.5 Kinetische uitwisselingen en segregatie gecombineerd

We tonen de code Kawasaki-dynamica over arbitraire afstand, gevolgd door een kinetische uitwisseling tussen Von Neumann-naburen met spaargedrag. De implementatie van een herverdelende belasting is analoog aan Sectie B.1.

```

1 % kawasaki_exchange_saving.m
2 % Lennart Fernandes (May 4 2019)
3 % Kawasaki segregation move between any two agents, followed by NN
   exchange

```

```

4 % of agent A with a neighbor, with saving.
5
6 function [m_out,S_out]=kawasaki_exchange_saving(m_in,L,T,S_in)
7
8 numIters=L^2;
9 m=m_in; % lattice of money
10 S=S_in; % lattice of saving factors
11 m_bar=mean(m(:));
12 for i=1:numIters
13 % Segregation move:
14 linearindexA=randi(L^2); % Pick agent 1
15 [xA,yA]=ind2sub(L,linearindexA);
16 linearindexB=randi(L^2); % Pick agent 2
17 [xB,yB]=ind2sub(L,linearindexB);
18
19 % Neighbors:
20 aboveA = mod(xA - 1 - 1, L) + 1;
21 belowA = mod(xA + 1 - 1, L) + 1;
22 leftA = mod(yA - 1 - 1, L) + 1;
23 rightA = mod(yA + 1 - 1, L) + 1;
24
25 aboveB = mod(xB - 1 - 1, L) + 1;
26 belowB = mod(xB + 1 - 1, L) + 1;
27 leftB = mod(yB - 1 - 1, L) + 1;
28 rightB = mod(yB + 1 - 1, L) + 1;
29
30 dH= (m(xB,yB)-m(aboveA,yA))^2 + (m(xB,yB)-m(belowA,yA))^2 + (
31 m(xB,yB)-m(xA,leftA))^2 + (m(xB,yB)-m(xA,rightA))^2 ...
32 + (m(xA,yA)-m(aboveB,yB))^2 + (m(xA,yA)-m(belowB,yB))^2 + (
33 m(xA,yA)-m(xB,leftB))^2 + (m(xA,yA)-m(xB,rightB))^2 ...
34 -((m(xA,yA)-m(aboveA,yA))^2 + (m(xA,yA)-m(belowA,yA))^2 + (
35 m(xA,yA)-m(xA,leftA))^2 + (m(xA,yA)-m(xA,rightA))^2) ...
36 -((m(xB,yB)-m(aboveB,yB))^2 + (m(xB,yB)-m(belowB,yB))^2 + (
37 m(xB,yB)-m(xB,leftB))^2 + (m(xB,yB)-m(xB,rightB))^2);
38
39 dH=dH/m_bar; %Rescaling
40
41 if dH<0 || rand()<exp(-dH/T)
42 m_hold=m(xA,yA);
43 m(xA,yA)=m(xB,yB);
44 m(xB,yB)=m_hold;
45 S_hold=S(xA,yA);
46 S(xA,yA)=S(xB,yB);
47 S(xB,yB)=S_hold;
48 else
49 end
50
51 % Transaction with neighbour:
52 x=xA;
53 y=yA;
54 neighbor=randi(4); % Pick neighbor
55 switch neighbor
56 case 1
57 x_ne=mod(x-2,L)+1;
58 y_ne=y;

```

```
56     case 2
57         x_ne=mod(x,L)+1;
58         y_ne=y;
59     case 3
60         x_ne=x;
61         y_ne=mod(y-2,L)+1;
62     otherwise
63         x_ne=x;
64         y_ne=mod(y,L)+1;
65     end
66     exchange_capital = (1-S(x,y))*m(x,y) + (1-S(x_ne,y_ne))*m(
67         x_ne,y_ne) ;
67     E=rand(1);
68     new_xy=S(x,y)*m(x,y)+E*(exchange_capital);
69     new_ne=S(x_ne,y_ne)*m(x_ne,y_ne)+(1-E)*(exchange_capital);
70     m(x,y)=new_xy;
71     m(x_ne,y_ne)=new_ne;
72 end
73 m_out=m;
74 S_out=S;
```