Academiejaar
2022-2023

Breuken breken met Barton

Stef Engels & Pascale Van Elslande

Promotor: Mevr. C. Van den Brande

Begeleider: Mevr. J. Simons

Thomas More Mechelen

Campus Kruidtuin

Educatieve Bachelor Secundair Onderwijs

Samenvatting

Peilingsonderzoeken en eigen stage-ervaringen tonen aan dat breuken een pijnpunt vormen in de eerste graad van het secundair onderwijs. Het boek *Volgens Barton* werd hiermee geassocieerd, omdat het een nieuwe wiskundedidactiek op basis van wetenschappelijk onderzoek aan het licht brengt. Deze twee pijlers brachten volgende onderzoeksvraag voort: “Hoe kunnen de didactische principes van Barton ingezet worden om de leerstof rond breuken aan te brengen in de eerste graad van de B-stroom?”

Via een literatuuronderzoek wordt het boek teruggebracht tot zes krachtige didactische methodes. In de lerarenhandleiding krijgen deze methodes vorm door ze toe te passen op het onderwerp breuken. In de leerlingenbundel met bijhorende correctiesleutel worden deze didactische principes en wenken vertaald in oefeningen. Dit product werd getest in het eerste jaar van het secundair onderwijs, waaruit bleek dat leerlingen een opvallend verschil in resultaten haalden na een les met onze handleiding.

De didactische methodes van Barton zorgen dat breuken op een diepere manier in het langetermijngeheugen terecht komen. Door de schema’s en stappenplannen worden leerinhouden procedureel eigen gemaakt. Deze didactische methodes zouden in bijkomend onderzoek zeker toegepast kunnen worden op andere onderwerpen binnen de wiskunde.

Voorwoord

Volgens Barton is een boek dat altijd een speciaal plaatsje gekregen heeft tijdens onze opleiding. Wij bedanken stagementor Diederik Van Epperzeel van het Sint-Jan-Berchmansinstituut te Puurs uitvoerig voor het aanraden van dit boek aan mevrouw Van den Brande. Zonder hem hadden wij deze bachelorproef nooit kunnen realiseren, want dan had het boek onze opleiding gewoonweg niet bereikt.

De keuze om ons toe te spitsen op breuken, was snel gemaakt. Breuken vormen een blijvend pijnpunt in het secundair onderwijs. Verschillende onderzoeken die wij voor onze literatuurstudie raadpleegden, alsook onze vele eigen stage-ervaringen toonden dat het probleem zich vooral in de B-stroom situeert. Zo is onze focus tot stand gekomen. Dit wil natuurlijk niet zeggen dat onze lerarenhandleiding en bundels niet in de A-stroom gebruikt kunnen worden!

Tijdens het maken van ons praktisch product genoten we van veel mentale en fysieke steun van onze omgeving. Vooral Pascale haar man en Stef zijn vriendin verdienen hier een speciale vernoeming.

De effectieve test van ons product vond plaats in OLVI Boom Eerstegraad. Wij willen directrice Els Verbeeck uitvoerig bedanken voor de toelating om te komen testen in haar B-stroomwerking. Daarnaast verdient Stephanie Janssens nog een pluim voor de vlotte communicatie met de school. Wiskundeleerkracht Sandra Illegems verdient het ook om in de bloemetjes gezet te worden. Zij maakte een uurtje tijd vrij voor ons testmoment.

Ten slotte, maar zeker niet onbelangrijk, bedanken wij Thomas More voor de goede steun en feedback tijdens ons schrijfproces. Onze promotor Conny Van den Brande gaf altijd goede feedbackpuntjes mee en maakte tijd voor fysieke ontmoetingen op de campus. Heel erg bedankt hiervoor! Ook Joke Simons die de sessies van de bachelorproef inrichtte en vormelijk heel duidelijk richtlijnen meegaf, verdient een speciale plaats in dit dankwoord.

Inhoudsopgave

Illustratielijst

Inleiding

Het belang van breuken is in onze maatschappij niet te onderschatten. In het dagelijks leven komen deze dan ook vaak voor in bijvoorbeeld tijdsaanduidingen, kortingen tijdens het winkelen, recepten in een kookboek ... Toch hebben peilingsonderzoeken een daling op het vlak van de kennis van breuken aangetoond. (Steunpunt toetsontwikkeling en peilingen, 2019) De peiling wiskunde werd in mei 2019 afgenomen in de eerste graad B-stroom van het secundair onderwijs bij leerlingen uit verschillende scholen verspreid over heel Vlaanderen. Het was een herhaling van de peiling wiskunde uit 2008. Met de peiling wordt nagegaan in welke mate leerlingen in Vlaanderen de ontwikkelingsdoelen wiskunde beheersen en of trends kunnen worden vastgesteld in vergelijking met de peiling van 2008. Uit onderzoek bleek dat binnen de toetscluster ‘Breuken optellen en aftrekken’ de beheersingsgraad van 34% naar 26% daalde. (Steunpunt toetsontwikkeling en peilingen, 2019) Door deze resultaten en het belang van breuken in het dagelijks leven naast elkaar te plaatsen, was de keuze om deze literatuurstudie hierop te focussen snel gemaakt.

Voor breuken zijn voldoende video’s, werkbladen en oefensites voor handen. De vraag is echter op welke manier de leerstof over breuken voor leerlingen duidelijker en toegankelijker kan worden aangebracht. De zoektocht naar een goede breukendidactiek is noodzakelijk.

Na het lezen van het boek ‘Volgens Barton’, werd de interesse gewekt voor deze specifieke methode van lesgeven. (Barton, 2019) Craig Barton is wiskundedocent sinds 2004 en verdiepte zich in de wiskunde-didactiek. Hij vond tijdens zijn onderzoek antwoorden op vragen waar iedere wiskundeleraar mee worstelt. Hoe deze wetenschappelijke inzichten kunnen worden toegepast in de lessen breuken wordt onder de loep genomen in deze literatuurstudie.

Bij de start van de middelbare schooltijd hebben leerlingen bij getallenleer vaak problemen met breuken. Tijdens de peilingsonderzoeken (2019) die eerder werden vermeld, werd tevens de metacognitie van de leerlingen voor het vak wiskunde bevraagd. Meer dan de helft van de leerlingen geeft aan dat wiskunde niet één van zijn of haar sterkste vakken is. Bovendien blijkt dat gemiddeld genomen het academisch zelfconcept voor wiskunde niet verschilt tussen leerlingen uit de A- en de B-stroom. Daaruit kan afgeleid worden dat het probleem met wiskunde zich niet enkel beperkt tot de B-stroom. (Steunpunt toetsontwikkeling en peilingen, 2019) Dit versterkt de motivatie om op zoek te gaan naar een didactische methode om de rekenregels voor breuken aan te brengen. Deze literatuurstudie kadert de zoektocht van Barton om een manier te vinden die leerlingen comfortabel maakt met breuken. De onderzoeksvraag die aan de basis ligt van deze bachelorproef is: “Hoe kunnen de didactische principes van Barton ingezet worden om de leerstof rond breuken aan te brengen in de eerste graad van de B-stroom?”. Het eindproduct wordt gerealiseerd vanuit die vraagstelling.

In het boek ‘Volgens Barton’ staan alle didactische activiteiten zo concreet beschreven dat ze direct kunnen worden uitgevoerd in de lespraktijk. Het boek bevat uitgewerkte voorbeelden en opgaven. Dat breuken zo vaak voorkomen in de voorbeelden, bevestigt wederom de nood aan een doordachte breukendidactiek. Het boek is echter 500 pagina’s dik en bevat veel achtergrondinformatie. Als leraar is het niet altijd evident om zo’n werk boven op de lesopdracht door te nemen. Wij willen de relevante didactische tips uit dit boek koppelen aan het onderwerp ‘breuken’. In de praktijk zal dit resulteren in een innovatief, didactische handleiding waarmee leerkrachten meteen aan de slag kunnen om breuken vlotter, concreter en toegankelijker over te brengen.

Deel 1: Literatuuronderzoek

In deze bachelorproef wordt het probleem met breuken gekoppeld aan de didactische methode van Barton. Beide elementen worden in dit deel toegelicht. Eerst wordt kort geblikt op wat het concept breuken inhoudt (§ 1) en hoe Craig Barton zijn methode in elkaar zit (§ 2). Dit wordt gekoppeld aan breuken in de eerste graad van het secundair onderwijs (§ 3).

1 Werken met breuken

Breuken is en blijft een belangrijk en niet te onderschatten onderwerp binnen de wiskunde. Breuken gaan eeuwenlang mee. Hoewel ze millennia geleden door oude beschavingen zoals de Egyptenaren werden gebruikt, is de oorsprong van decimale breuken terug te voeren op Simon Stevin in de jaren 1500. Dit was een wiskundige die veel tijd besteedde aan het standaardiseren van het gebruik van decimale breuken.

Nadien hebben wiskundigen en deskundigen gewerkt aan de ontwikkeling van breuken om ze begrijpelijker te maken. Het begrip van breuken start bij de positieve breuken, waarbij de teller en de noemer natuurlijke getallen zijn. Een breuk is een telwoord dat een rationaal getal voorstelt. Een breuk of gebroken getal is de onuitgewerkte deling van een geheel getal, de teller, door een ander geheel getal, de noemer. De teller telt het aantal door de noemer genoemde geheeltallige delen. Tussen de teller en de noemer staat een streep: de breukstreep. (Joep, 2021) Breuken optellen of aftrekken gebeurt steeds met een stappenplan. Breuken vereenvoudigen, gelijknamig maken, de noemer behouden en de tellers optellen of aftrekken en tenslotte het resultaat vereenvoudigen. Om een breuk van een getal te nemen, wordt eveneens gebruik gemaakt van een stappenplan: Deel het geheel door de noemer en vermenigvuldig het resultaat met de teller. Een breuk verandert ook niet van waarde als je de teller en de noemer door eenzelfde getal deelt. We noemen dit een breuk vereenvoudigen.

Vaak wordt in het basisonderwijs te snel door de breuken gegaan en beheersen leerlingen in het secundair onderwijs de regels van de breuken niet meer.

Binnen de onderwijsdoelen wordt in de B-stroom eerste graad gestreefd naar het inzicht ontwikkelen in en omgaan met getallen en hoeveelheden binnen de getallenleer. De leerlingen rekenen functioneel met natuurlijke getallen, negatieve getallen, breuken, decimale getallen en procenten. Binnen de conceptuele kennis leren leerlingen verbanden leggen tussen breuken en decimale getallen. Op vlak van procedurele kennis worden bewerkingen uitgevoerd met de breuken en worden breuken geordend.

De leerplandoelen van Katholiek Onderwijs Vlaanderen verduidelijken nog meer de noodzaak aan een didactisch handboek voor de werking met breuken in de B-stroom. Het eindproduct in de vorm van een didactische handleiding zal opgebouwd worden volgens de leerplandoelen in de tabel. (doelenlijst-Wiskunde 1B, 2022-2023)

WISb5	De leerlingen interpreteren natuurlijke getallen, negatieve getallen, kommagetallen, breuken en procenten in betekenisvolle contexten.
WISb6	De leerlingen ordenen natuurlijke getallen, negatieve getallen, kommagetallen en breuken met behulp van symbolen.
WISb7	De leerlingen zetten kommagetallen om van de ene naar de andere voorstellingswijze: decimale vorm, breuk en procent.
WISb8	De leerlingen voeren hoofdbewerkingen uit op natuurlijke getallen, negatieve getallen, kommagetallen en breuken in betekenisvolle contexten.

Tabel 1: Leerplandoelen rond breuken in de B-stroom

Bij het rekenen met breuken gaat het om het vereenvoudigen van breuken, optellen en aftrekken van gelijknamige breuken en het nemen van een breuk van een getal. Voor de optelling en aftrekking met ongelijknamige breuken wordt een verdiepingsdoel opgesteld waarbij de leerlingen gedeeltelijk LPD 12 van Wiskunde A-stroom realiseren. Bij het uitvoeren van bewerkingen met breuken is het van belang aandacht te schenken aan vakterminologie.

2 Didactische methode van Craig Barton

Onder de titel 'Volgens Barton' staat het geschreven: "Lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts en 12 jaar aan mislukkingen." Na het lezen van die titel lijkt het een boek te zijn voor wiskundeleerkrachten, maar de schrijver geeft zelf toe dat het boek geschikt is voor alle vakken met getallen. Ook leraars natuurkunde, scheikunde, economie … kunnen hier de vruchten van plukken. (Barton, 2019) Craig Barton beschrijft heel wat manieren waarop leraren kunnen zien of leerlingen de gestelde doelen al bereikt hebben. Het eerste deel van het boek is heel breed en algemeen en gaat vooral in op het werkgeheugen en het langetermijngeheugen van leerlingen. Het tweede deel is meer gericht op getallen. Het is een boek dat iedere leraar gegund wordt, omdat Barton alle onderzoeken gaat uitpluizen en dat vertaalt naar heel praktische voorbeelden. Het is een vuistdik boek dat in 2018 voor het eerst verscheen met de titel *How I wish I had taught maths.* De Nederlandse vertaling van het boek kreeg een jaar later de titel 'Volgens Barton'. In dit boek wordt de praktijk van lesgeven in de wiskunde vormgegeven op basis van wetenschappelijke theorie. Barton beschrijft wat hij deed, wat hij geleerd heeft en hoe hij zijn werkwijze aangepast heeft. In het boek worden 12 thema's behandeld, die opgedeeld zijn in ideeën.

Per idee beschrijft de schrijver wat hij vroeger deed (§ 2.2.1) en vervolgens verwijst hij in het naar zijn inspiratiebronnen (§ 2.2.2). Hij sluit de uiteenzetting van elk idee af met een beschrijving wat hij van de bronnen opstak (§ 2.2.3) en hoe hij ermee aan de slag ging (§ 2.2.4).

2.1 Wat ik vroeger deed

Hier staat Barton stil bij zijn vroegere opvattingen, vanwaar deze kwamen en welke invloed ze hadden op zijn lespraktijk. Voor de schrijver is het niet evident om dit onderdeel neer te schrijven. Binnen het hoofdstuk over het nadenken en leren van leerlingen geeft Barton toe tijdens de eerste twaalf jaar lesgeven nooit stilgestaan te hebben bij hoe leerlingen nadenken en leren. Hij had wel een vage notie van concepten als het werkgeheugen of schema's, maar vanuit zijn gelukzalige onwetendheid baseerde hij zich op zijn intuïtie. Door niet stil te staan bij hoe leerlingen nadenken en leren kan de vergelijking gemaakt worden met een dokter die niet stilstaat bij de manier waarop het lichaam functioneert of een bakker die slechts gedeeltelijk geïnteresseerd is in de optimale omstandigheden om brood te laten rijzen. (Barton, 2019)

2.2 Inspiratiebronnen

In dit deel zet de schrijver uiteen wat zijn inspiratiebronnen zijn in de vorm van onderzoeksartikelen, blogs en interviews. Elk hoofdstuk in het boek bevat bijgevolg een literatuurlijst. De originele versies van alle geciteerde artikelen zijn te vinden op de website van de schrijver. (Barton, research, sd) Deze pagina van de website bevat het academisch onderzoek dat Barton tot nu toe heeft gelezen en dat van invloed is geweest op de manier waarop hij wiskunde plant en onderwijst. Het betreft hier een aanvulling op de aanbevolen boeken voor docenten om te lezen. Deze pagina wordt voortdurend aangepast en is onderverdeeld in brede categorieën, maar deze zijn enigszins willekeurig vanwege de vele onderlinge verbanden tussen de artikelen. Het terugkerende thema is proberen het leren van studenten te verbeteren met behulp van wetenschappelijk onderbouwd onderzoek. Volgens de schrijver is voorzichtigheid geboden bij het benaderen van onderwijskundig onderzoek en om elke mening die een mens kan hebben te ondersteunen vindt men altijd een studie of een stuk onderzoek.

2.3 Wat ik ervan opstak

De belangrijkste bevindingen uit zijn inspiratiebronnen vat de schrijver hier in relatie tot het besproken thema samen. Hij nodigt de lezer die het oneens is met zijn interpretaties of dieper in de materie wil duiken uit om de bronnen goed te bestuderen en daaruit eigen conclusies te trekken. Vermits nadenken en leren belangrijke onderdelen van het lesgeven zijn, vormen ze een cruciaal element in het boek van Barton. (Barton, 2019) Heel vroeg in het boek wordt dan ook een model van nadenken en leren geïntroduceerd. Tussen al het toonaangevend onderzoek naar dit onderwerp zit zoveel gemeenschappelijke grond dat het een goed idee is een basismodel op te stellen van hoe nadenken en leren plaatsvindt. (Barton, 2019)

2.4 Wat ik nu doe

In dit laatste onderdeel staat Barton stil bij wat hij anders is gaan doen in zijn lessen. Het is niet alleen hoe hij zou willen dat hij gedurende heel zijn carrière les had gegeven, maar ook hoe hij dat in de toekomst wil blijven doen. Na de kennisopbouw over het geheugen, gaf de schrijver toe meer aandacht te spenderen aan de vorming van een les. Binnen deze vormgeving worden vier punten onderscheiden (Barton, 2019):

1. Leerlingen gaan nadenken over de juiste dingen;
2. Datgene waarover ze nadenken komt terecht in het langetermijngeheugen;
3. De toegankelijkheid nadat het in het langetermijngeheugen opgeslagen ligt;
4. De toepassing ervan succesvol is in verschillende situaties.

3 De combinatie van de breuken met de methode van Barton

Uit het ruime aanbod aan tips en tricks van Craig Barton is voor deze bachelorproef gekozen voor zes methodes die leerkrachten kunnen helpen om breuken aan te brengen volgens de didactische visie van Barton.

3.1 Uitgewerkte voorbeelden optimaal benutten

In hoofdstuk 6 van zijn boek toont Craig Barton waarom uitgewerkte voorbeelden zo belangrijk zijn en hoe deze aan leerlingen gepresenteerd kunnen worden om maximaal effect te verkrijgen. Op dit vlak evolueerde zijn ideeën. Vroeger dacht hij dat uitgewerkte voorbeelden slechts beperkt nut hadden, en dat het belangrijk was om leerlingen zo snel mogelijk zelfstandig te laten oefenen. Dit is het 'uitgewerktevoorbeeldeneffect', een benaming voor de breed gerepliceerde bevinding dat beginners die iets leren door opdrachten te maken het slechter doen op daaropvolgende toetsen dan leerlingen die hetzelfde leren door uitgewerkte voorbeelden te bestuderen. Dit geldt zelfs voor alle opgaven analoog aan het bestudeerde voorbeeld. (Barton, 2019)

Wanneer Barton een uitgewerkt voorbeeld van het optellen van twee breuken behandelt in de klas, dan volgt hij de aanpak van het voorbeeld-opgavepaar. Het bord wordt in tweeën verdeeld. Aan de linkerkant staat het uitgewerkte voorbeeld, en aan de rechterkant een wiskundig soortgelijke opgave die de leerlingen meteen daarna zelf moeten maken. Bij het vereenvoudigen van breuken koos Barton enkele voorbeelden, behandelde elk ervan, en hanteerde daarbij de principes van het voorbeeld-opgavepaar of van de superkrachtige uitgewerkte voorbeelden zoals net besproken. Zo kregen de leerlingen de ideale voorbereiding om elke breuk te vereenvoudigen. (Barton, 2019) Na het bestuderen van enkele inspiratiebronnen vond Barton de voorbeelden belangrijker dan definities, uitleg en vuistregels.

3.2 Voorbeelden en opgaven uitkiezen

3.2.1 Drempelvragen

Gekozen voorbeelden moeten het hele spectrum omtrent een bepaald begrip rond breuken beslaan. Elk hiaat in het geheel aan voorbeelden zal uiteindelijk leiden tot tekortkomingen in de kennis van de leerlingen. Om die reden is het geven van extreme voorbeelden extra belangrijk. Barton kiest een negatieve breuk of een breuk waar de teller het dubbel is van de noemer. Ze zijn anders en de laatste breuk heeft een vreemd resultaat. Leerlingen worden aangemoedigd om hierover na te denken, uit te leggen aan zichzelf wat aan de hand is en daarmee hun begrip te verdiepen van het vereenvoudigen van een breuk. Barton benoemt deze soort vragen met de term 'drempelvragen' of 'drempelvoorbeelden'. Drempelvoorbeelden zijn vreemde vragen, of normaal uitziende vragen met vreemde resultaten. Het zijn niet noodzakelijk ingewikkelde voorbeelden.

3.2.2 Slimme oefening

Goed ontworpen oefenvragen kunnen leerlingen helpen procedurele beheersing te ontwikkelen. Tegelijk worden ze daarmee in staat gesteld om verbanden te leggen en de cognitieve sprongen te maken die nodig zijn om tot conceptueel begrip te komen. Op deze manier hebben leerlingen de gelegenheid om in hun eigen tempo te werken aan de oefenopdrachten. Ze hebben de tijd om uit te leggen aan zichzelf, eerder gemaakt werk erbij te nemen, fouten te corrigeren en hulp te zoeken bij een klasgenoot, terwijl leerlingen niet beperkt worden door de behoeftes van de rest van de klas. Barton gebruikt de term 'slimme oefening' voor wat hij probeert te bereiken met zijn selectie aan vragen. Hij wil de beperkte aandacht van leerlingen richten op de aspecten die veranderen tussen vragen, zodat ze kunnen voorspellen en observeren welk effect de veranderingen hebben op het antwoord. Leerlingen onthouden datgene waar ze hun aandacht op richten, en hij heeft met deze slimme oefening invloed op uitoefenen met behulp van deze reeks vragen. Hieronder volgt een uitgewerkt voorbeeld. (Barton, 2019)

1.	1/5 van 60	Een eenvoudige stambreuk van een hoeveelheid om te starten.
2.	1/5 van 30	De breuk blijft hetzelfde, maar de hoeveelheid is gehalveerd. De leerlingen hebben de gelegenheid om te bedenken dat het antwoord dan ook zal halveren.
3.	2/5 van 30	Dit keer is de hoeveelheid constant, maar verdubbelt de breuk. Leerlingen kunnen het antwoord voorspellen en hebben ook de mogelijkheid om te bedenken waarom de antwoorden op vraag 1 en 3 hetzelfde zijn.
4.	20/5 van 30	Welke verandering treedt op als we de teller met tien vermenigvuldigen, terwijl al het andere hetzelfde blijft? Waarom is het antwoord hetzelfde als vier keer 30?
5.	20/50 van 30	wat als we de noemer met tien vermenigvuldigen? Verrast dit de leerlingen?
6.	20/50 van 300	Hier zijn alle drie de elementen uit vraag 3 vermenigvuldigd met tien.
7.	2/5 van 3	Hier vreest Barton dat hij te veel variatie heeft aangebracht. Op basis van de net besproken drempelvoorbeelden wil Barton dat leerlingen zich bewust worden dat niet elk antwoord een mooi rond getal is. Leerlingen moeten dat zien in de eerste fase van kennis-verwerving, zodat ze niet op een later moment nog gaan twijfelen aan hun methode. Het wordt hier aangeboden te midden van een logische volgorde van vragen, zodat leerlingen de mogelijkheid hebben om te reflecteren en uit te leggen aan zichzelf waar het antwoord vandaan komt.
8.	5/2 van 3	Wat is het resultaat als de breuk omgekeerd wordt? Leerlingen kunnen voorspellen dat het antwoord van vraag 7 dan ook omgekeerd wordt, maar dan zal het verbazen dat dit niet het geval is. Dergelijke verrassingen kunnen een waardevol leermoment zijn.
9.	3/2 van 5	Wat is het gevolg als 3 en 5 van plaats gewisseld worden?
10.	3/5 van 2	Waarom gebeurt hier niet hetzelfde als in vraag 9?

Tabel 2: Een voorbeeld van 'slimme oefeningen'

Aan het einde van deze reeks vragen stelt de schrijver voor volgende opgave op bord te noteren: 'Kijk terug naar de antwoorden en kijk of je enige verschillen ziet.' De mogelijkheid bestaat om een leergesprek te voeren aan de hand van een presentatie van de antwoorden.

3.3 Doelgerichte oefening

Voor het optellen van twee breuken stelt Barton de vijf stappen van doelgericht oefenen voor. Vroeger leek het Barton de beste manier om een complex proces te introduceren door het proces in zijn geheel te doen. Hij zou het belang van het vinden van een geschikte gemeenschappelijke noemer benadrukken, daarna naar het proces kijken om breuken gelijknamig te maken om ten slotte uit te leggen hoe de opgave moet worden uitgewerkt. Na het bestuderen van de inspiratie-bronnen ontwierp de schrijver de vijf stappen van doelgericht oefenen.

1. Isoleer de vaardigheid
2. Ontwikkel de vaardigheid
3. Evalueer de vaardigheid
4. De uiteindelijke prestatie
1. Herhaal het later nog eens

3.3.1 Isoleer de vaardigheid

Om de vaardigheid binnen het proces van het optellen van breuken te isoleren kan het proces als volgt worden opgedeeld:

2. Beslis of de breuken in de juiste vorm staan om opgeteld te kunnen worden.
3. Besluit wat de meest geschikte gemeenschappelijke noemer is.
4. Maak gebruik van gelijkwaardige breuken om de breuken te bewerken.
5. Tel de breuken op.
6. Vereenvoudig het antwoord.

3.3.2 Ontwikkel de vaardigheid

Om de individuele vaardigheden te ontwikkelen moet gebruik gemaakt worden van de voorbeeld-opgave-paren, voorbeelden, non-voorbeelden en slimme oefening.

3.3.3 Evalueer de vaardigheid

De vaardigheid evalueren moet niet meteen na de ontwikkeling volgen. Het is zelfs zo, gegeven het verschil tussen leren en presteren, dat dit wellicht niet het optimale moment is om dit te evalueren. Een optie is aan het einde van de les of aan het begin van de volgende les. De favoriete manier om te evalueren is volgens Barton een quiz of diagnostische multiplechoicevragen.

3.3.4 De uiteindelijke prestatie

Nadat subprocessen geïsoleerd, ontwikkeld en geëvalueerd zijn, is het tijd voor de uiteindelijke prestatie. Om zeker te zijn dat alle leerlingen de gelegenheid hebben gehad om te zien hoe Barton het hele proces voordeed en op belangrijke momenten aan zichzelf uitlegde, hanteert hij de aanpak met superkrachtige uitgewerkte voorbeelden. Daarna is het tijd om te oefenen. Een selectie standaardvragen over het optellen van breuken is in dit geval perfect.

3.3.5 Herhaal het later nog eens

Een succesvolle prestatie tijdens een toets is echter nog geen betrouwbare indicatie van daadwerkelijk leren. Het is noodzakelijk om het geleerde nog eens terug te halen, als leerlingen ook de kans hebben gehad om het weer te vergeten. Dit dient immers de dubbele functie van evalueren: het maakt het begrip betrouwbaarder en vergroot de opslagsterkte van deze kennis in het langetermijngeheugen. Deze herhaling kan de vorm aannemen van een vraag in een quizje, huiswerk of een opwarmer waarin verschillende onderwerpen terugkomen. Het kan bestaan in het uiteindelijke optellen van breuken of een van de subprocessen die daaronder liggen.

3.4 Formatieve evaluatie

Lesgeven zonder formatieve evaluatie is volgens Craig Barton als schilderen met je ogen dicht. Bij formatieve evaluatie gaat het om het reageren in het moment. Het draait om het verzamelen van informatie over het begrip van leerlingen op de meest efficiënte manier, en beslissingen maken die op deze informatie gebaseerd zijn. Kort gezegd draait het om het aanpassen van het lesgeven aan de behoeftes van onze leerlingen.

3.5 SSDD-problemen

Op Bartons website is nog een toepassing te vinden van zijn didactische methode. Leerlingen oefenen leerstof gedifferentieerd in via het SSDD-model. Dit letterwoord staat voor 'same surface, different depths' en dekt zo de lading van het model. Leerlingen krijgen vier problemen voorgeschotend die stuk voor stuk hetzelfde onderwerp behandelen. Alleen de inkleding is verschillend. Sterke leerlingen kunnen alle of enkel de moeilijkste problemen oplossen, terwijl de minder sterke leerlingen enkel de kale oefeningen maken. (Mr Barton Maths, n.d.)

Onderstaand voorbeeld behandelt het vermenigvuldigen en delen van breuken. Deze bewerkingen zijn nauw verwant aan elkaar. De kale vermenigvuldiging is de makkelijkste oefening. Afhankelijk van taalproblemen of problemen met het delen van een breuk volgen de eerste of de vierde oefening op de moeilijkheidsladder. De oefening rechtsboven is zonder twijfel de moeilijkste.

What is $\frac{2}{3}$ of 18?	$\frac{2}{3}$ of a number is 18. What is the number?
$18 \times \frac{2}{3} =$	$18 \div \frac{2}{3} =$

Figuur 1: SSDD Problem: breuken vermenigvuldigen

3.6 Stille leraar

Rond 2012 werd Craig Barton zich bewust van het principe van de stille leraar. Dit houdt in dat een leraar modelleert hoe iets moet – zoals een lineaire vergelijking oplossen – maar dan in absolute stilte. De leerlingen kijken in stilte toe en aan het einde van de demonstratie hebben ze de mogelijkheid om vragen te stellen zoals: ‘Waarom moet je daar door drie delen?’. Een tijd lang was deze strategie een rage. Iedereen deed het: wiskundeleraren, leraren Engels, zelfs de godsdienstleraar. Net als bij veel andere onderwijskundige hypes was de stille leraar plotseling weer verdwenen. De schrijver vond het tijd om de hele idee opnieuw te gaan reanimeren. Hoe het principe werkt, wordt duidelijk gemaakt in onderstaand voorbeeld. (Barton, 2019)

We lossen volgende lineaire vergelijking op: 3x-4= 17.

Een traditionele manier om dit vorm te geven, is door elke stap uit te schrijven en deze stappen verbaal toe te lichten zoals hieronder uitgeschreven.

1. *We willen ‘x’ afzonderen dus we vermeerderen beide leden met 4.*
2. *Vervolgens delen we beide leden door 3.*
3. *x = 7*

Leerlingen kijken naar het bord en zien ‘3x-4=17’ staan. Dit wordt verwerkt als tekst via het visueel-ruimtelijke schetsblok en wordt in het hoofd als het ware voorgelezen als ‘drie-iks-min-vier-is-zeventien’. Daar wordt het in behandeling genomen door het werkgeheugen. Doordat de leraar de mondelinge uitleg geeft en de stappen opschrijft, zien we zowel meer dan nodig als verdeelde aandacht optreden. De vergelijking voorlezen is overbodig, en doordat de leerlingen hun aandacht moeten richten op het verwerken van geschreven woorden en symbolen en de verbale uitleg van de leraar, raakt de aandacht van de leerlingen verdeeld.

In plaats daarvan is het volgens het principe van de stille leraar de bedoeling om het uitgewerkte voorbeeld in stilte te kunnen presenteren, waardoor de belasting op het werkgeheugen van de leerling afneemt. Het stelt de leraar in staat om zijn eigen aandacht te richten op wat hij noteert, in plaats van die te verdelen over schrijven en praten tegelijkertijd. Na het voordoen in stilte, worden de leerlingen aangemoedigd om vragen te stellen over het uitgewerkte voorbeeld of geeft de leraar mondelinge uitleg. Het principe van de stille leraar kan vergeleken worden met een bioscoop. Voordat de film begint, praten mensen gezellig met elkaar, spelen wat op hun telefoon en verdelen hun beperkte aandacht zo over verschillende media. Maar zodra de lichten uitgaan, wordt het stil en gaat hun volledige aandacht uit naar het scherm. Wil men in de klas de stille leraar nog beter laten functioneren, dan kan men beter de gordijnen dichtdoen, de lichten uitdoen en dan kan de show beginnen. (Barton, 2019)

Een bijkomend voordeel van de stille leraar heeft te maken met orde houden in de klas. Wanneer uitgewerkte voorbeelden besproken worden, moeten leerlingen met elkaar praten, maar het kan vaak moeilijk zijn om uit te maken wanneer een gesprek tussen twee leerlingen wel of niet met de stof te maken heeft. Leerlingen weten met dit principe dat ze helemaal stil moeten zijn. Dit soort heldere begrenzingen maken het leven een stuk makkelijker. (Barton, 2019)

4 Conclusie

In de eerste graad situeert zich het probleem dat leerlingen niet goed met breuken aan de slag kunnen. Voor velen vormt dit een moeilijkheid die hun hele middelbare schoolcarrière nog zal aanslepen. Het Steunpunt toetsontwikkeling en peilingen stelde in 2019 vast dat het beheersingsniveau aanzienlijk gedaald is wat breuken betreft. Hieruit vloeit deze bachelorproef voort. De methode van Craig Barton wordt toegepast om breuken aan te brengen in de eerste graad van het secundair onderwijs.

Barton zijn redeneringen zijn steeds opgebouwd volgens hetzelfde stramien:
1. Wat ik vroeger deed: hierin beschrijft Craig Barton hoe hij zijn onderwijs vorm heeft in de vijftien jaar die aan zijn boek voorafgaan.
2. Inspiratiebronnen: Barton lijst de bronnen op die hem hebben doen inzien hoe hij werkelijk les wou geven.
3. Wat ik ervan opstak: in dit deel vertelt hij welke inzichten hij uit zijn talrijke lijst van informatiebronnen opstak.
4. Wat ik nu doe: in dit sluitstuk past Barton zijn inzichten toe op zijn klaspraktijk.

In de literatuurstudie werd een selectie gemaakt van inzichten uit het boek die toepasbaar zijn op het onderwerp breuken. Het effect van uitgewerkte voorbeelden wordt vaak onderschat. Leerlingen moeten oefeningen maken op basis van de theorie. Het heeft echter meer effect om ze eerst enkele oefeningen te laten bestuderen, zodat ze zich de verschillende tussenstappen realiseren. Bij het kiezen van voorbeeldoefeningen, is het belangrijk om de extreemste gevallen te gebruiken om elk hiaat te dekken. Bovendien moeten oefeningen zo gekozen worden dat leerlingen optimaal geholpen worden bij het ontwikkelen van procedurele beheersing.

Via doelgerichte oefening worden technieken stap voor stap aangeleerd. Het heeft geen zin om breuken op te tellen als leerlingen de vaardigheden voor het gelijknamig maken van breuken nog niet onder de knie hebben. Barton kwam met een vijfstappenplan om vaardigheden te ontwikkelen:
1. Isoleer de vaardigheid
2. Ontwikkel de vaardigheid
3. Evalueer de vaardigheid
4. De uiteindelijke prestatie
5. Herhaal het later nog eens

Vooral de derde stap moet hier genoeg aandacht krijgen. Formatieve evaluaties bieden de leerlingen en de leerkracht de kans om te bekijken hoe het met het leerproces van bepaalde vaardigheden gesteld is. Op basis van deze formatieve toetsen kan het onderwijsleerproces aangepast worden naar de noden van de leerlingen. Een handige tool hierbij zijn de SSDD-problemen. Hiermee worden leerlingen aangemoedigd om via een opbouwende moeilijkheidsgraad opdrachten op te lossen die allemaal de vaardigheid behandelen die op dat moment getraind wordt. Daarbovenop kunnen deze problemen ook worden ingezet om te differentiëren op basis van de formatieve evaluaties.

Deel 2: Methodologie

5 Het probleem

Voor het praktisch product was de centrale vraag of en hoe een innovatief didactisch leerwerkboek op basis van de van de methodes van Barton iets kan doen aan de breukenproblematiek in de B-stroom. Vanuit deze probleemstelling werd als belangrijkste onderdeel van het product een lerarenhandleiding ontwikkeld. De leerinhouden binnen de breuken worden voorzien van een Barton-laag om op die manier duidelijk overgebracht te worden aan de leerlingen.

6 Doelgroep

Op basis van de peilingen leek enkel de eerste graad B-stroom onze doelgroep. De leerinhouden en methodes van Barton lenen er echter toe om ook de leerlingen uit derde graad basisonderwijs te laten kennis maken met breuken. Voor de eerste graad van de A-stroom zouden de methodes van Barton als vorm van herhaling, remediëring of versterking van de hersenverbindingen kunnen zorgen. Binnen bepaalde methodes worden vragen gesteld om te reflecteren over genomen stappen binnen de breuken. De doelgroep beperkt zich bijgevolg niet tot de eerste graad B-stroom.

7 Concrete werkwijze

Om de didactische handleiding volgens Barton te ontwerpen, werden de leerinhouden waarbij de meeste leerlingen in de B-stroom problemen ondervinden als fundamenten gekozen. In een volgende stap werd de literatuurstudie terug onder de loep genomen om de juiste methodes bij de juiste onderdelen te zetten. Elke methode wordt zowel algemeen in de literatuurstudie, als voor een specifiek thema in de lerarenhandleiding besproken.

Concreet bestaat het praktisch product in de eerste plaats uit een handleiding voor leraren. Deze zal elk onderdeel van de breuken voorzien van instructies binnen één of meerdere methodes van Barton. Dit gebeurt op een duidelijke en efficiënte manier waarmee elke leraar onmiddellijk aan de slag kan gaan. Als toepassing op deze handleiding bestaat het practisch product ook uit een leerlingenbundel bestaande uit een bordschema en de bijhorende oefeningen. Elke oefening kan de leraar integreren in de bijhorende methode. De correctiesleutel zorgt dat de leerlingen zelf hun werk kunnen nakijken of elkaar kunnen verbeteren.

In de testfase van het praktisch product hebben we gedurende één lesuur de handleiding gecontroleerd op zijn doelmatigheid. Tot de doelmatigheidseisen worden gerekend: validiteit, betrouwbaarheid en efficiëntie. Tijdens de productcontrole in deze drie categorieën scoorden onze gekozen methodes heel goed. De laatste fase bestond uit enkele aanpassingen in de structuur en lay-out van de handleiding om ze klaar voor publicatie te maken. Ook werden enkele inhoudelijke foutjes aangepast.

Deel 3: Beschrijving van de toepassing

8 Opzet van de lerarenhandleiding

Als toepassing op het onderzoek naar Barton zijn didactische methodes, werd een lerarenhandleiding uitgewerkt. Binnen het onderwerp breuken werden verschillende hoofdstukken onderscheiden. Per hoofdstuk wordt eerst gekeken hoe de huidige handboeken elk onderdeel aanbrengen. Dit wordt in vergelijking gebracht met de didactische methodes van Barton die in de literatuurstudie onderzocht werden. In elk deelhoofdstuk wordt een van de zes onderzochte methodes concreet ingekleed specifiek voor het onderwerp dat behandeld wordt in het hoofdstuk. De methode wordt beschreven en didactische wenken worden meegegeven, zodat leerkrachten vlot aan de slag kunnen in hun lespraktijk.

Naast de handleiding werd een leerlingenbundel vol schema's en oefeningen voorzien met uitgebreid correctiemodel. Deze bundels bevatten geen didactische wenken of verklaringen van de methodes, maar zijn specifiek gericht op de leerlingen. Deze zijn bijgevolg minder van belang voor het begrijpen van deze bachelorproef en werden afdrukklaar toegevoegd aan de bijlagen.

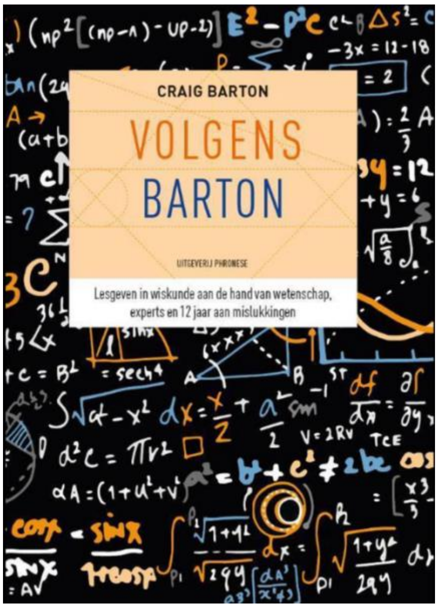
9 Breukendidactiek aan de hand van Bartons methodes

9.1 De methodes van Barton

9.1.1 De gekozen methodes

Methode	Beschrijving didactische methode	In het boek 'Volgens Barton'
B1	Uitgewerkte voorbeelden optimaal benutten	Hoofdstuk 6 (pagina 225 tem 260)
B2	Voorbeelden en opgaven uitkiezen	Hoofdstuk 7 (pagina 261 tem 307)
B3	Doelgerichte oefening	Hoofdstuk 8 (pagina 309 tem 331)
B4	Formatieve evaluatie	Hoofdstuk 11 (pagina 399 tem 466)
B5	SSDD-problemen	
B6	De stille leraar als didactische wenk	Hoofdstuk 4 (pagina 205 tem 207)

9.1.2 Keuze uit de waaier van methodes 'Volgens Barton'



In het boek 'Volgens Barton' staan heel veel methodes om in de klas mee aan de slag te gaan en het breken van breuken op een handige didactische manier aan te brengen. Om breuken te breken hebben we een keuze moeten maken uit de waaier van methodes dis Craig Barton aanbied. Elke methode kreeg een code die hierboven opgelijst staan en waar we binnen elk hoofdstuk naar verwijzen. In bovenstaande lijst verwijzen we ook naar het boek en de website van Barton waar elke methode nog meer uitgelegd wordt. In deze handleiding vertalen we deze methodes naar de praktijk en hoe je met de verschillende methodes tijdens het breken van breuken aan de slag kan gaan.

9.2 Interpreteren van breuken

9.2.1 Een breuk nemen van een getal

In de handboeken

Opgave: Los op.

$\frac{1}{2}$ van 26 is ___________ .	$\frac{2}{3}$ van 21 is ___________ .	$\frac{1}{2}$ van 42 is ___________ .
$\frac{3}{4}$ van 20 is ___________ .	$\frac{1}{5}$ van 100 is ___________ .	$\frac{2}{3}$ van 26 is ___________ .

Theorie:

Om een breuk van een getal te nemen …

- deel je het getal door de noemer en
- vermenigvuldig je de uitkomst met de teller.

In de klas met methode B1: Voorbeeld-opgavepaar

- Deel je bord in tweeën.
- Aan de linkerkant plaats je het uitgewerkte voorbeeld, en aan de rechterkant een wiskundig soortgelijke opgave die de leerlingen meteen daarna zelf moeten maken.
- Het bord ziet er zo uit:

Uitgewerkt voorbeeld	Jouw beurt
$\frac{1}{2}$ van 26 = (26:2).1 = 13	$\frac{3}{4}$ van 20 =

Tip! Tijdens het noteren van het uitgewerkt voorbeeld worden de leerlingen niet betrokken in de uitwerking. Vragen stellen aan de leerlingen tijdens de uitwerking is nuttig om reeds aanwezige voorkennis terug te halen, maar niet om iemand iets nieuws proberen te leren. Als de leerling goed antwoord op de vragen zegt dat nog niets over de andere leerlingen van de klas. Als de leerling het fout heeft duurt het onderwijsleergesprek met de hele klas veel te lang.

Proces:

1. Gebruik aan het begin van de les multiplechoicevragen om de basiskenis te evalueren, en om misvattingen te identificeren en op te lossen.

Wat in een breuk vertelt ons in hoeveel gelijke delen het geheeld verdeeld is? De teller of de noemer?

Wat in een breuk vertelt ons in hoeveel delen je moet nemen? De teller of de noemer?

Voor welke bewerking is de breukstreep een andere schrijfwijze? Gedeeld door of vermenigvuldigd met?

2. De leerlingen zijn stil tijdens de introductie van een nieuw concept met het bijbehorende uitgewerkte voorbeeld.
3. Gebruik de methode van de stille leraar (zie didactische wenken) en pauzeer kort na elke stap. Leerlingen schrijven niets op en kijken alleen maar.
4. Zodra de stille uitwerking afgerond is, pauzeer je even en licht vervolgens elke stap toe.
5. Vervolgens vraag je de leerlingen om de uitwerking in hun schrift over te nemen. Dit is belangrijk, omdat het uitgewerktevoorbeeldeneffect het gevolg is van het bestuderen van uitgewerkte voorbeelden en hierop te reflecteren. Leerlingen moeten toegang hebben tot het correcte uitgewerkte voorbeeld, zowel voor de oefenvragen later in de les als om later nog eens te raadplegen. Op deze manier doen leerlingen ervaring op met iets wiskundig correct noteren door het precies zo op te schrijven als de leerkracht het doet.
6. Vraag vervolgens of er nog vragen zijn en geef de leerlingen de opdracht om de ‘jouw beurt’-opgave te proberen.
7. Leerlingen maken de opgave in stilte.

Tip! Wisbordjes zijn nuttig in dit gedeelte. Leerlingen zijn bereidwilliger om een poging te wagen wanneer ze iets gewoon kunnen uitvegen zonder dat er ergens iets permanent achterblijft.

8. Wandel ondertussen door het lokaal terwijl leerlingen aan deze opdracht werken. Wanneer je een erg goed uitgevoerde uitwerking aantreft leen je het wisbordje even van een leerling en toon je het aan de rest van de klas of als er voldoende tijd is vraag je de leerling om het op bord te komen schrijven.
9. Je helpt leerlingen die vastzitten of het niet begrijpen.
10. Je geeft leerlingen oefeningen over een breuk nemen van een getal.

Tip! Van het uitgewerkt voorbeeld heeft Barton ook een superkrachtige variant, maar die komt verder in deze bundel aan bod bij moeilijkere hoofdstukken binnen de breuken.

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.2.2 Gelijkwaardige breuken

In de handboeken

Opgave: Vul de juiste teller en noemer in.

$\frac{2}{3} = \frac{6}{\dots\dots}$	$\frac{5}{6} = \frac{\dots\dots}{24}$	$\frac{15}{20} = \frac{\dots\dots}{4}$	$\frac{12}{16} = \frac{3}{\dots\dots}$
$\frac{6}{12} = \frac{\dots\dots}{2}$	$\frac{4}{7} = \frac{\dots\dots}{14}$	$\frac{25}{35} = \frac{5}{\dots\dots}$	$\frac{1}{5} = \frac{\dots\dots}{20}$

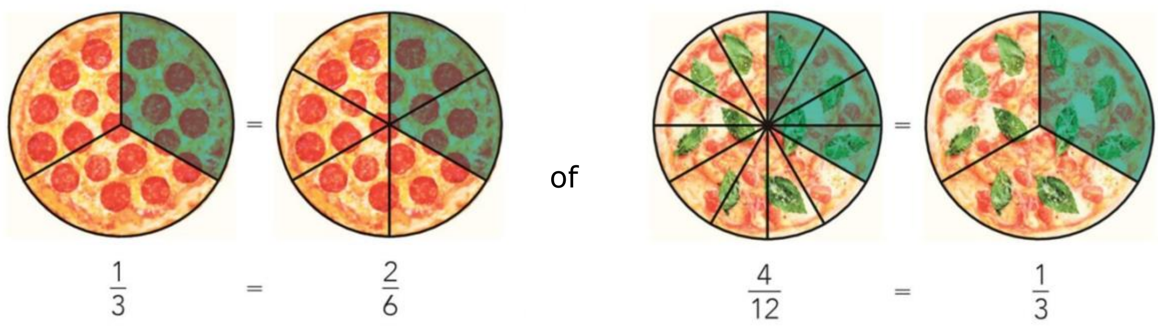
Theorie:

Een breuk verandert niet van waarde als je de teller en de noemer van de breuk met eenzelfde getal vermenigvuldigt of door eenzelfde getal deelt. De breuken zijn even groot, ze hebben dezelfde waarde. We noemen het gelijkwaardige breuken.

In de klas volgens Barton methode B2: Voorbeelden versus definities

In plaats van te beginnen met een uitleg van een concept, begin je met voorbeelden. Zodra leerlingen een flink aantal voorbeelden hebben gezien, vormen ze hun eigen interpretatie van een bepaald begrip, en zijn daardoor beter in staat om de daaropvolgende definitie of uitleg te begrijpen en te waarderen.

<u>Voorbeeld 1</u>:



Het gekleurde deel is telkens even groot.

Voorbeeld 2:

➔ Dit is een volledige reep chocolade bestaande uit zes blokjes.

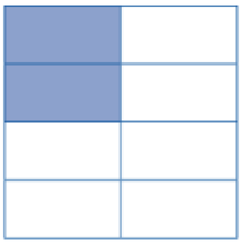
➔ Elk stuk is hier $\frac{1}{3}$ van de reep chocolade. Elise eet $\frac{2}{3}$ van deze reep chocolade. Trek een kring rond $\frac{2}{3}$ van de reep.

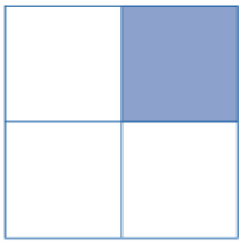
➔ Elk stuk is hier $\frac{1}{6}$ van de reep chocolade. Matthias eet $\frac{4}{6}$ van deze reep chocolade. Trek een kring rond $\frac{4}{6}$ van de reep.

Wie eet het meest? Elise en Matthias eten evenveel.

Voorbeeld 3:

Teken twee vierkanten van 3 cm op 3 cm. Stel in het ene vierkant de breuk $\frac{2}{8}$ en in het andere de breuk $\frac{1}{4}$ voor.

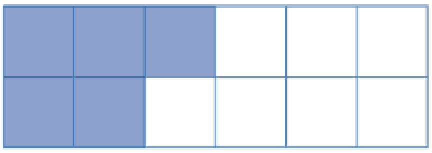




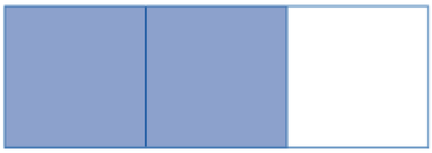
Tip! Toon ook voorbeelden van niet-gelijkwaardige breuken.

Voorbeeld 4:

Teken twee rechthoeken van 6 cm op 2 cm. Stel in de ene rechthoek de breuk $\frac{5}{12}$ voor en in de andere de breuk $\frac{2}{3}$.



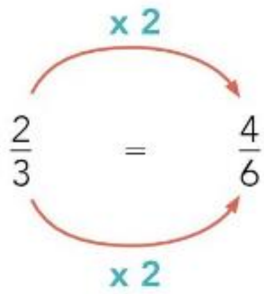
$\frac{5}{12}$

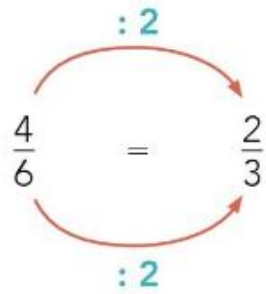


$\frac{2}{3}$

Het is aan te raden deze voorbeelden een voor een te laten zien en niet tegelijkertijd en telkens per voorbeeld aan te geven of ze gelijkwaardig zijn of niet. Op deze manier kan je leerlingen goed besef bijbrengen van wat een gelijkwaardige breuk is.

Bordschema:





Een breuk verandert niet van waarde als je de teller en de noemer van de breuk met eenzelfde getal vermenigvuldigt of door eenzelfde getal deelt. De breuken zijn even groot, ze hebben dezelfde waarde. We noemen het gelijkwaardige breuken.

In de klas volgens Barton methode B2: Minimaal verschillende voorbeelden

Je kan als alternatief van de voorbeelden twee breuken op het bord noteren die gelijkwaardig zijn en daarna een kleine, opzettelijke verandering maken, en vervolgens reflecteren op het effect van deze verandering. Zijn de breuken nog steeds gelijkwaardig?

Bordschema:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ √ Teller en noemer zijn vermenigvuldigd met 2.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ × Enkel teller is vermenigvuldigd met 3.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ √ Teller en noemer zijn vermenigvuldigd met 3.

$\frac{1}{3} = \frac{3}{6}$ × Noemer is veranderd van 2 naar 3.

$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ √ Teller en noemer zijn vermenigvuldigd met 3.

$\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ √ Teller en noemer zijn gedeeld door 9.

$\frac{9}{18} = \frac{9}{2}$ × Enkel noemer is gedeeld door 9.

$\frac{9}{18} = \frac{3}{6}$ √ Teller en noemer zijn gedeeld door 3.

$\frac{9}{12} = \frac{3}{6}$ × Noemer is veranderd van 18 naar 12.

$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ √ Teller is veranderd van 9 naar 4 en teller en noemer zijn gedeeld door 4.

Uit dit bordschema kan afgeleid worden dat breuken slechts gelijkwaardig blijven als je de teller en de noemer met eenzelfde getal vermenigvuldigt of door eenzelfde getal deelt. Bij stap 2 in het bordschema is de teller van de eerste breuk vermenigvuldigt met 3 maar de noemer niet. Door in stap 3 ook de noemer van breuk 1 te vermenigvuldigen met 3 krijgen we opnieuw gelijkwaardige breuken. In stap 4 is de noemer van de eerste breuk verandert en de teller niet. Om zo weinig mogelijk veranderingen te moeten doorvoeren om gelijkwaardige breuken te behouden vermenigvuldigen we de nieuwe noemer van de eerste breuk opnieuw met 3 om zo weer gelijkwaardige breuken te krijgen.

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.2.3 Breuken vereenvoudigen

In de handboeken

Opgave: Hoe eenvoudiger, hoe liever! Vereenvoudig de breuken. Schrijf de breuken zo eenvoudig mogelijk.

$\frac{6}{8} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{9}{12} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{20}{25} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{8}{12} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
$\frac{10}{20} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{6}{10} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{24}{36} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{4}{20} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Theorie:

Een breuk verandert niet van waarde als je de teller en de noemer van de breuk door eenzelfde getal deelt. Op die manier wordt de breuk eenvoudiger geschreven. We noemen dit een breuk vereenvoudigen.

Methode B1: Voorbeeld-opgavepaar met stille leraar als wenk

Als toepassing van gelijkwaardige breuken is het hier aangewezen de methode van voorbeeld-opgave-paar op het bord te gebruiken in combinatie met de stille leraar. Alle informatie over de didactische wenk van stille leraar wordt verduidelijkt in hoofdstuk 6.

Bordschema:

Uitgewerkt voorbeeld	Jouw beurt
$\frac{2 \xrightarrow{:2} 1}{4 \xrightarrow[:2]{} 2}$, i.e. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{9}{12} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.3 Ordenen van breuken

9.3.1 Breuken gelijknamig maken

In de handboeken

Om breuken te kunnen optellen of aftrekken, moet je ze eerst gelijknamig maken. $\frac{4}{10}$ en $\frac{2}{8}$

Stap 1 Vereenvoudig de breuken. $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ en $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Stap 2 Zoek het kleinste gemene veelvoud van beide noemers. Dit is de nieuwe noemer. Het k.g.v. van 5 en 4 is 20.

Stap 3 Pas de tellers aan door ze met hetzelfde getal te vermenigvuldigen als de noemers. $\frac{2}{5}$ wordt $\frac{8}{20}$ en $\frac{1}{4}$ wordt $\frac{5}{20}$

Theorie: Breuken gelijknamig maken doe je door de breuken te vervangen door breuken met dezelfde noemer. Gelijknamige breuken zijn breuken met eenzelfde noemer.

Methode B1: Superkrachtige uitgewerkte voorbeelden

Het proces van superkrachtige uitgewerkte voorbeelden is ongeveer gelijk aan dat van het voorbeeld-opgave-paar, met een aantal belangrijke toevoegingen.

Wanneer we een superkrachtig uitgewerkt voorbeeld behandelen over het gelijknamig maken van twee breuken, dan ziet het bord er als volgt uit:

Bordschema:

Uitgewerkt voorbeeld	Reflectie	Jouw beurt
$\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{2}$ wordt $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$		$\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{5}$ wordt $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Werk het eerste voorbeeld in stilte uit. Wanneer je klaar bent, zal je er ongeveer zo over vertellen: ‘Ik wil beide breuken op dezelfde noemer brengen. Een goede manier om dit te doen is door het kleinst gemeenschappelijk veelvoud te zoeken van beide noemers.’

Het bord ziet er dan als volgt uit:

Bordschema:

Uitgewerkt voorbeeld	Reflectie	Jouw beurt
$\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{2}$ wordt $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$		$\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{5}$ wordt $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
$\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{2}$ wordt $\frac{6}{10}$ en $\frac{5}{10}$		

Daarna komt het uitleggen-aan-jezelf. Je vraagt de leerlingen om na te denken over de vraag: waarom heb ik de breuken gelijknamig moeten maken? De leerlingen moeten niets opschrijven. Uitleggen-aan-jezelf draait juist om het pauzeren, reflecteren en proberen om wat je ziet of hoort te verhelderen en te begrijpen. Je vraagt je leerlingen naar een verklaring, of legt het gewoon zelf uit. Hierna ga je door met de volgende stap van de uitwerking. Ook deze presenteer je eerst in stilte, waarna je een mondelinge toelichting geeft, om uiteindelijk de leerlingen weer te laten uitleggen-aan-zichzelf. Uiteindelijk ziet uw bord eruit als volgt:

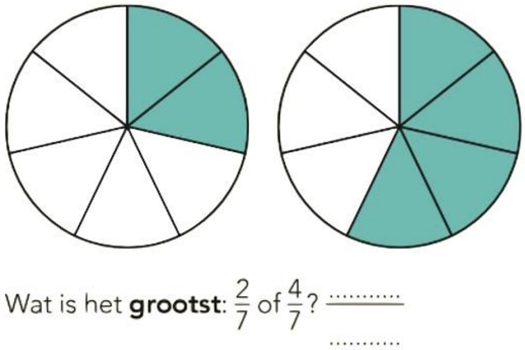
Bordschema:

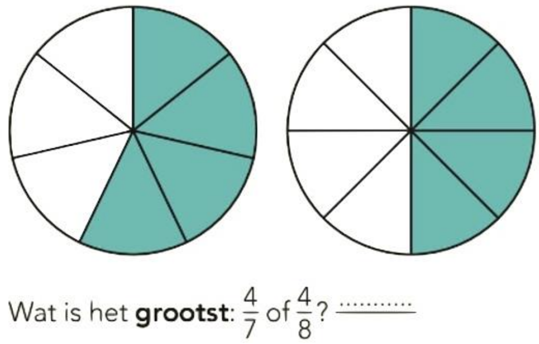
Uitgewerkt voorbeeld	Reflectie	Jouw beurt
$\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{2}$ wordt $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$		$\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{5}$ wordt $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ en $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
$\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{2}$ wordt $\frac{6}{10}$ en $\frac{5}{10}$	*Waarom heb ik de breuken gelijknamig moeten maken?*	
$\frac{6}{10}$ en $\frac{5}{10}$	*Wat kan ik nu met de 2 breuken doen?*	

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.3.2 Breuken rangschikken

In de handboeken





Theorie: Kijk naar de afbeelding.

$\frac{1}{4}$ .... $\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$ .... $\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$ .... $\frac{4}{8}$

Theorie: Als de breuken gelijknamig zijn kan je makkelijk aan de teller zien wat de volgorde van klein naar groot is. Als de breuken ongelijknamig zijn is het de bedoeling dat je alle noemers aan elkaar gelijk gaat maken. Als alle breuken eenmaal gelijknamig zijn, kan je opnieuw makkelijk aan de teller zien wat de volgorde van klein naar groot is.

Methode B3: De vijf stappen van doelgericht oefenen

Wanneer je een proces zoals rangschikken van breuken moet introduceren, deel je het eerst, waar mogelijk, op in kleinere stukjes. Hierna ga je aan de slag met het vijfstappenproces van doelgericht oefenen:

1. Isoleer de vaardigheid

We moeten zorgvuldig nadenken over de subprocessen die er in het spel zijn. Het proces van ordenen van breuken kan bijvoorbeeld als volgt worden opgedeeld:

1. Beslis of we een of beide breuken moet vereenvoudigen.
2. Beslis of de breuken gelijknamig moeten gemaakt worden of niet.
3. Maak de breuken gelijknamig indien nodig.
4. Vergelijk de tellers van beide breuken.
5. Beslis over de volgorde van de breuken. Van groot naar klein of omgekeerd.
6. Beslis over de keuze van symbool. Kies uit $<$ of $>$.
7. Rangschik de breuken volgens de gevraagde volgorde.

2. Ontwikkel de vaardigheid

Om deze individuele vaardigheden te ontwikkelen moeten we gebruik maken van de voorbeeld-opgave-paren die we eerder gebruikten. Voor de vaardigheid 'beslissen we een of beide breuken moeten vereenvoudigen' begin je door paren van breuken op het bord te schrijven, één paar per keer, en geef in stilte aan of een of beide breuken moeten vereenvoudigd worden.

Bordschema:

$\frac{4}{7}$ .... $\frac{4}{8}$	Ja/Nee Ja, $\frac{4}{8}$ kunnen we vereenvoudigen

Dit is een eenvoudige ja/nee-activiteit.

Tip! Vraag de leerlingen om de vragen te beantwoorden op een wisbordje. Dit zou nooit meer dan een minuut mogen duren. De activiteit is zo ontworpen dat de leerlingen zich alleen richten op de noemer, en niet op de teller.

Op deze manier doorlopen we elke vaardigheid en ziet na het ontwikkelen van de 7 vaardigheden het bord er als volgt uit:

Bordschema bij het ontwikkelen van de 7 vaardigheden:

$\frac{4}{7}$ .... $\frac{4}{8}$	Ja/Nee Ja, $\frac{4}{8}$ kunnen we vereenvoudigen
$\frac{4}{7}$ .... $\frac{1}{2}$	Ja/Nee Ja, noemer 14
$\frac{4}{7}$ .... $\frac{1}{2}$	Gelijknamig maken: $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$ .... $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$
$\frac{8}{14}$ .... $\frac{7}{14}$	Vergelijk de tellers: 8 en 7

$\frac{8}{14}$ .... $\frac{7}{14}$	Volgorde: Wat is het grootste? $\frac{8}{14}$ of $\frac{7}{14}$
$\frac{8}{14}$ .... $\frac{7}{14}$	Symbool: >
$\frac{8}{14}$ .... $\frac{7}{14}$	Rangschik: $\frac{8}{14} > \frac{7}{14}$

3. Evalueer de vaardigheid

De vaardigheid evalueren hoeft niet meteen na de ontwikkeling te volgen. Misschien doe je het aan het einde van de les of aan het begin van de volgende les.

Tip! De favoriete manier van Craig Barton om te evalueren is een quiz waarbij weinig op het spel staat zoals het voorbeeld van een diagnostische multiplechoicevraag hieronder op het bord.

Bordschema bij het formuleren van een diagnostische vraag:

Welke breuk van deze breuken is groter dan $\frac{8}{5}$?			
A	B	C	D
$\frac{6}{7}$	$\frac{18}{3}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{8}{7}$

In deze evaluatie is het de bedoeling om misvattingen en hun specifieke aard op te sporen, en om te zien of je voldoende basis hebt om verder te gaan.

Bron - Diagnostische vragen voor het ordenen van breuken:

Barton, C. (sd). *ordering fractions*. Opgeroepen in mei 2023, van diagnostic questions: https://diagnosticquestions.com/Account/Login?ReturnUrl=%2fQuestions%3fCurrentSubjectId%3d228%26OrderBy%3dNewest%26IsByStudent%3dFalse&CurrentSubjectId=228&OrderBy=Newest&IsByStudent=False

4. De uiteindelijke prestatie

Als we eenmaal subprocessen géïsoleerd, ontwikkeld en geëvalueerd hebben, wordt het tijd voor de uiteindelijke prestatie. Om uzelf als leerkracht ervan te verzekeren dat alle leerlingen de gelegenheid hebben gehad om te zien hoe je het hele proces voordeed, en op belangrijke momenten aan jezelf uitlegde, hanteer je de aanpak met superkrachtige uitgewerkte voorbeelden. Deze aanpak werd eerder uitgewerkt bij het gelijknamig maken van breuken. Daarna is het tijd om te oefenen.

5. Herhaal het later nog eens

Een succesvolle prestatie tijdens de toets is nog geen betrouwbare indicatie van daadwerkelijk leren. Het is noodzakelijk om het geleerde nog eens terug te herhalen, als leerlingen ook de kans hebben gehad om het weer te vergeten. Deze herhaling kan de vorm aannemen van een vraag in een quizje, huiswerk, of een opwarmer waarin verschillende onderwerpen terugkomen. Het kan bestaan uit de uiteindelijke prestatie zijnde het optellen van breuken, of een van de subprocessen die daaronder liggen.

Door te isoleren, ontwikkelen, evalueren, presteren en op een later moment te herhalen, help je leerlingen in hun transitie naar expertise zodat ze het , uiteindelijk, ook gaan beschouwen als een enkel proces.

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.4 Breuken omzetten naar kommagetallen en omgekeerd

9.4.1 Een breuk voorstellen als kommagetal

In de handboeken

Opgave: Schrijf de breuken eerst als een deling. Schrijf de breuken daarna als een kommagetal.

$\frac{4}{10}$ = …… : …… = ……	$\frac{15}{100}$ = …… : …… = ……
$\frac{3}{5}$ = …… : …… = ……	$\frac{7}{20}$ = …… : …… = ……

Theorie:

We weten dat de breukstreep een andere schrijfwijze is voor 'gedeeld door'. Om een breuk om te zetten naar een kommagetal deel je de teller door de noemer.

$\frac{3}{10} = 3 : 10 = 0,3$

Methode B1: Superkrachtige uitgewerkte voorbeelden

Het proces van superkrachtige uitgewerkte voorbeelden is ongeveer gelijk aan dat van het voorbeeld-opgave-paar, met een aantal belangrijke toevoegingen.

Wanneer we een superkrachtig uitgewerkt voorbeeld behandelen over het voorstellen van een breuk als kommagetal, dan ziet het bord er als volgt uit:

Bordschema:

Uitgewerkt voorbeeld	Reflectie	Jouw beurt
$\frac{2}{4}$ = ……		$\frac{3}{5}$ = ……
$\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$	*Waarom zetten we de breuk op noemer 100?*	

$\frac{25}{100} = 25 : 100$	*Welke bewerking is een breukstreep?*	
25 : 100 = 0,25	*Reken uit met je rekenmachine!*	

Werk het eerste voorbeeld in stilte uit. Wanneer je klaar bent, zal je er ongeveer zo over vertellen: ‘Ik wil de breuk voorstellen als kommagetal. Een goede manier om dit te doen is door de breuk op noemer 100 te zetten.’ Daarna komt het uitleggen-aan-jezelf. Je vraagt de leerlingen om na te denken over de vraag: waarom zetten we de breuk op noemer 100? De leerlingen moeten niets opschrijven. Uitleggen-aan-jezelf draait juist om het pauzeren, reflecteren en proberen om wat je ziet of hoort te verhelderen en te begrijpen. Je vraagt je leerlingen naar een verklaring, of legt het gewoon zelf uit. Hierna ga je door met de volgende stap van de uitwerking. Ook deze presenteer je eerst in stilte, waarna je een mondelinge toelichting geeft, om uiteindelijk de leerlingen weer te laten uitleggen-aan-zichzelf.

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.4.2 Een kommagetal voorstellen als breuk

In de handboeken

Opgave: Schrijf als een breuk met noemer 10,100 of 1000.

$0{,}71 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$0{,}3 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$0{,}237 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Theorie: Stappenplan om een kommagetal om te zetten naar een breuk.

Stap 1: Schrijf het getal zonder komma over in de teller.

Stap 2: Kijk naar het aantal cijfers na de komma om de noemer te bepalen.

1 cijfer na de komma → noemer 10

2 cijfers na de komma → noemer 100

3 cijfers na de komma → noemer 1000

Methode B1: Superkrachtige uitgewerkte voorbeelden

Het proces van superkrachtige uitgewerkte voorbeelden is ongeveer gelijk aan dat van het voorbeeld-opgave-paar, met een aantal belangrijke toevoegingen.

Wanneer we een superkrachtig uitgewerkt voorbeeld behandelen over het voorstellen van een kommagetal als breuk, dan ziet het bord er als volgt uit:

Bordschema:

Uitgewerkt voorbeeld	Reflectie	Jouw beurt
$0{,}4 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$		$0{,}12 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
$0{,}4 = \frac{4}{10}$	*Hoe lees je het kommagetal 0,4? Met welke breuk komt dit overeen?*	
$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	*Wat moet ik nog doen met vier tiende om tot de eenvoudigste breuk te komen?*	

Werk het eerste voorbeeld in stilte uit. Wanneer je klaar bent, zal je er ongeveer zo over vertellen: ‘Ik wil het kommagetal voorstellen als een breuk. Een goede manier om dit te doen is door het kommagetal te lezen.’ Daarna komt het uitleggen-aan-jezelf. Je vraagt de leerlingen om na te denken over de vraag: Met welke breuk komt dit overeen? De leerlingen moeten niets opschrijven. Uitleggen-aan-jezelf draait juist om het pauzeren, reflecteren en proberen om wat je ziet of hoort te verhelderen en te begrijpen. Je vraagt je leerlingen naar een verklaring, of legt het gewoon zelf uit. Hierna ga je door met de volgende stap van de uitwerking. Ook deze presenteer je eerst in stilte, waarna je een mondelinge toelichting geeft, om uiteindelijk de leerlingen weer te laten uitleggen-aan-zichzelf.

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.5 Bewerkingen met breuken

9.5.1 Breuken optellen

In de handboeken

Opgave: Reken uit. Vereenvoudig je uitkomst, indien mogelijk.

$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{7}{12}+\frac{3}{12}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Theorie: Stappenplan om gelijknamige breuken op te tellen:

Stap 1: Tel de tellers op.

Stap 2: Schrijf de noemer over.

Stap 3: Vereenvoudig de uitkomst, indien mogelijk.

Theorie: Stappenplan om ongelijknamige breuken op te tellen:

Stap 1: Maak de breuken gelijknamig.

Stap 2: Tel de tellers op.

Stap 3: Behoud de noemer.

Stap 4: Vereenvoudig de uitkomst, indien mogelijk.

Stap 3: Vereenvoudig de uitkomst, indien mogelijk.

Methode B3: De vijf stappen van doelgericht oefenen

1. Isoleer de vaardigheid

Het proces van het optellen van twee breuken kan bijvoorbeeld als volgt worden opgedeeld:

1. Beslis of de breuken in de juiste vorm staan om opgeteld te kunnen worden.
2. Besluit wat de meest geschikte gemeenschappelijke noemer is.
3. Maak gebruik van gelijkwaardige breuken om de breuken te bewerken.
4. Tel de breuken op.
5. Vereenvoudig het antwoord.

2. Ontwikkel de vaardigheid

Om deze individuele vaardigheden te ontwikkelen moeten we gebruik maken van de voorbeeld-opgave-paren die we eerder gebruikten. Voor de vaardigheid 'beslissen of breuken in de juiste vorm staan om opgeteld te kunnen worden' begin je door paren van breuken op het bord te schrijven, één paar per keer, en geef in stilte aan of ze opgeteld kunnen worden of niet.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$	Ja/Nee
$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$	Ja/Nee
$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$	Ja/Nee
$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$	Ja/Nee

Dit is een eenvoudige ja/nee-activiteit.

Tip! Vraag de leerlingen om de vragen te beantwoorden op een wisbordje. Dit zou nooit meer dan een minuut mogen duren. De activiteit is zo ontworpen dat de leerlingen zich alleen richten op de noemer, en niet op de teller.

Ook wanneer leerlingen de meest geschikte gemene deler moeten bepalen, kan je best een voorbeeld-opgave-paar doorlopen zoals in het bordschema voorgesteld:

Bordschema:

$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$	Noemer:
$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	Noemer:
$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$	Noemer:

$\frac{2}{5}+\frac{2}{3}$	Noemer:
$\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$	Noemer:
$\frac{1}{8}+\frac{5}{12}$	Noemer:

In de vragen probeer je best een logische variatie en volgorde aan te brengen zodat leerlingen zich kunnen richten op wat er veranderd is en op wat er hetzelfde gebleven is, en wat de gevolgen hiervan zijn op de antwoorden. Leerlingen kunnen deze activiteit alleen succesvol afronden als ze begrijpen hoe ze het kleinst gemeenschappelijke veelvoud kunnen vinden.

Bordschema bij het ontwikkelen van de 5 vaardigheden:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$	Ja/Nee Nee
$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$	Noemer: 15
$\frac{10}{15} + \frac{3}{15}$	Gelijkwaardige breuken: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ en $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$
$\frac{10}{15} + \frac{3}{15}$	Tel de breuken op: $\frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$
$\frac{10}{15} + \frac{3}{15}$	Vereenvoudigen: nee $\frac{13}{15}$

3. Evalueer de vaardigheid

De vaardigheid evalueren hoeft niet meteen na de ontwikkeling te volgen. Misschien doe je het aan het einde van de les of bij het begin van de volgende les.

Tip! De favoriete manier van Craig Barton om te evalueren is een quiz waarbij weinig op het spel staat zoals het voorbeeld van een diagnostische multiplechoicevraag hieronder op het bord.

Bordschema bij het formuleren van een diagnostische vraag:

Wat is de kleinste noemer die je kan gebruiken om deze breuken op te tellen?

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{9}$$

A	B	C	D
9	18	54	3

4. De uiteindelijke prestatie

Als we eenmaal subprocessen géïsoleerd, ontwikkeld en geëvalueerd hebben, wordt het tijd voor de uiteindelijke prestatie. Om uzelf als leerkracht ervan te verzekeren dat alle leerlingen de gelegenheid hebben gehad om te zien hoe je het hele proces voordeed, en op belangrijke momenten aan jezelf uitlegde, hanteer je de aanpak met superkrachtige uitgewerkte voorbeelden. Deze aanpak werd eerder uitgewerkt bij het gelijknamig maken van breuken. Daarna is het tijd om te oefenen.

5. Herhaal het later nog eens

Een succesvolle prestatie tijdens de toets is nog geen betrouwbare indicatie van daadwerkelijk leren. Het is noodzakelijk om het geleerde nog eens terug te herhalen, als leerlingen ook de kans hebben gehad om het weer te vergeten. Deze herhaling kan de vorm aannemen van een vraag in een quizje, huiswerk, of een opwarmer waarin verschillende onderwerpen terugkomen. Het kan bestaan uit de uiteindelijke prestatie zijnde het optellen van breuken, of een van de subprocessen die daaronder liggen.

Door te isoleren, ontwikkelen, evalueren, presteren en op een later moment te herhalen, help je leerlingen in hun transitie naar expertise zodat ze het, uiteindelijk, ook gaan beschouwen als een enkel proces.

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.5.2 Breuken aftrekken

In de handboeken

Opgave: Reken uit. Vereenvoudig de uitkomst, indien mogelijk.

$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{13}{15} - \frac{4}{15} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
$\frac{5}{9} - \frac{3}{9} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{17}{20} - \frac{9}{20} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{11}{18} - \frac{10}{18} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Theorie: Stappenplan om gelijknamige breuken af te trekken.

Stap 1: Trek de tellers af.

Stap 2: Behoud de noemer.

Stap 3: Vereenvoudig de uitkomst, indien mogelijk.

Opgave: Reken uit. Vereenvoudig de uitkomst, indien mogelijk.

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Theorie: Stappenplan om ongelijknamige breuken af te trekken.

Stap 1: Maak de breuken gelijknamig. Zorg ervoor dat ze dezelfde noemer hebben.

Stap 2: Trek de tellers van elkaar af.

Stap 3: Behoud de noemer.

Stap 4: Vereenvoudig de uitkomst, indien mogelijk.

Methode B4: Duidelijke en ondubbelzinnige diagnostische vragen

Toen Barton begon met het maken van multiplechoicevragen, dacht hij dat zo'n een beetje elke multiplechoicevraag wel voldeed. Maar hij had er niet verder kunnen naast zitten. Niet alle diagnostische vragen zijn even goed; een echt goede vraag ontwerpen kan heel moeilijk zijn. Diagnostische vragen moeten duidelijk en ondubbelzinnig zijn. We hebben allemaal wel eens slecht geformuleerde vragen zien langskomen in examens of methodes, maar bij diagnostische vragen kan de dubbelzinnigheid ook in de antwoorden zelf liggen. De beste manier om uit te leggen wat een diagnostische vraag is, is er een laten zien. Elk gegeven antwoord kan je iets vertellen over het begrip, of gebrek daaraan, van de leerling. Het moet opvallen dat elk antwoord een specifieke, andere fout of misvatting blootlegt. Kijk maar eens naar de volgende vraag:

Bordschema:

Hoeveel is $\frac{7}{12} - \frac{1}{12}$?

A	B	C	D
$\frac{6}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$

Op het eerste gezicht lijkt er weinig mis. De vraag is duidelijk verwoord, en de antwoorden die niet kloppen, brengen specifieke misvattingen aan het licht. Maar wat is het correcte antwoord? D is overduidelijk correct, en dit is waarschijnlijk het antwoord dat de auteur bedoeld heeft. Maar wat dacht je van A? Aangezien de vraag niet expliciet vraagt om een vereenvoudigd antwoord, is antwoord A ook correct. Dus wat kunnen we opmaken uit antwoord A? Dat de leerlingen geen breuken kunnen vereenvoudigen, of dat ze antwoord D niet hadden gezien? Denken ze dat B het enige goede antwoord is, of een van de goede antwoorden? De kern is dat zonder er verder naar te vragen, we het nooit zeker zullen weten. En een belangrijk kenmerk van een goede diagnostische vraag is juist dat we in staat zouden moeten zijn om het begrip van een leerling accuraat op te maken uit het gekozen antwoord, zonder verdere toelichting van hun kant. In zijn huidige vorm is deze vraag een prima discussievraag, maar geen goede diagnostische vraag.

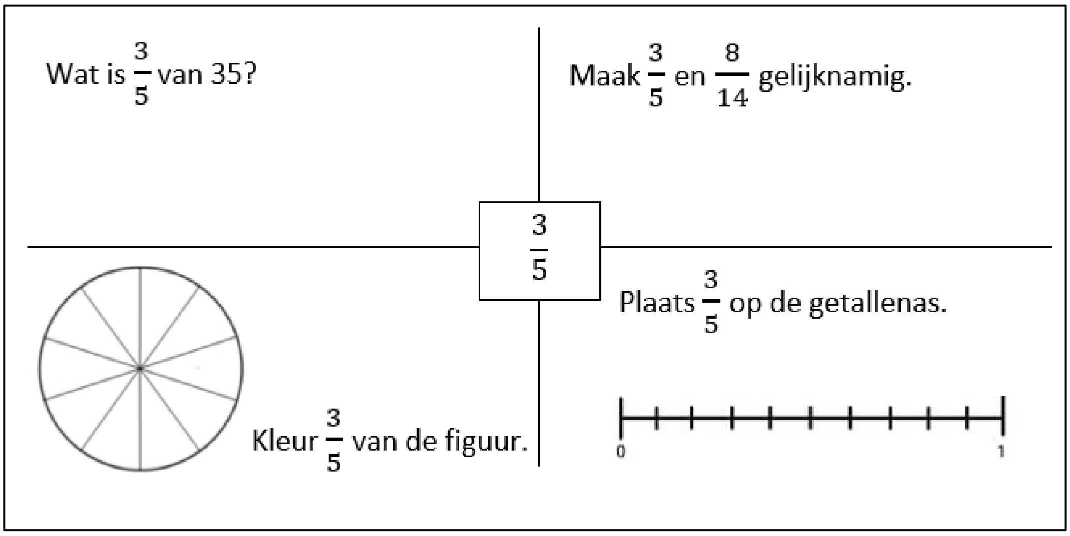
Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.6 SSDD-problemen

De opbouw van een SSDD-probleem

Op Bartons website is nog een toepassing te vinden van zijn didactische methode. Leerlingen oefenen leerstof gedifferentieerd in via het SSDD-model. Dit letterwoord staat voor 'same surface, different depths' en dekt zo de lading van het model. Leerlingen krijgen vier problemen voorgeschotend die stuk voor stuk hetzelfde onderwerp behandelen. Alleen de inkleding is verschillend. Sterke leerlingen kunnen alle of enkel de moeilijkste problemen oplossen, terwijl de minder sterke leerlingen enkel de kale oefeningen maken.

SSDD-problemen zijn heel goed om te differentiëren of specifieke hiaten op te vullen. Neem nu volgend probleem als voorbeeld. Met eenzelfde breuk (= same surface) kunnen vier verschillende leerinhouden getraind worden.



Een SSDD-probleem opstellen is niet moeilijk. Verdeel een blad in vier delen en kies een centraal begrip/thema. Hier worden vier opgaven bij gemaakt. De twee opties zijn:

1. Kies een leerinhoud en verzin hier vier opgaven bij in stijgende moeilijkheidsgraad. Deze komen het vaakst voor in de leerlingenbundel.

2. Kies een bepaalde breuk of afbeelding en maak hier vier opgaven rond die elks een verschillende leerinhoud (= different depth) behandelen.

Oefeningen (zie leerlingenbundel)

9.7 Didactische wenken bij het breken van breuken

9.7.1 De hype van de stille leraar

Het principe van de stille leraar houdt in dat een leraar modelleert hoe iets moet - bijvoorbeeld het vereenvoudigen van breuken -, maar dan in absolute stilte. De leerlingen kijken toe, ook in stilte, en aan het einde van de demonstratie hebben ze de mogelijkheid om vragen te stellen, zoals: 'Waarom moet je daar door 2 delen?' Een tijdlang was deze strategie echt een rage. Iedereen deed het: wiskundeleraren, leraren Engels, zelfs de godsdienstleraar. En toen, net als bij zoveel andere onderwijskundige hypes, was de stille leraar plotseling weer verdwenen. We vinden het tijd om het hele idee weer te gaan reanimeren.

Tip! Maak uitgebreid gebruik van de stille leraar, zeker wanneer je een nieuw concept introduceert. Het past mooi in het proces van werken met uitgewerkte voorbeelden, en de leerlingen lijken daar plezier aan te beleven. Het lijkt erop dat deze vergeten hype toe is aan een terugkeer.

9.7.2 De stille leraar in beeld

Scan de QR-code of gebruik onderstaande link voor het filmpje over de stille leraar.

https://www.youtube.com/watch?v=bE0YvsW8gdg

Besluit en reflectie

Volgens het steunpunt toetsontwikkeling en peilingen (2019) vormen breuken een pijnpunt dat ieder jaar groter wordt in de secundaire scholen. Het laatste decennium daalde de beheersingsgraad voor breuken optellen en aftrekken van 34% naar 26%. Dat wil zeggen dat selchts één vierde van de leerlingen in de eerste graad B-stroom in staat is om bewerkingen met breuken uit te voeren. Deze bachelorproef tracht dit probleem van de baan te helpen met de didactische methodes van Barton en biedt een antwoord op volgende onderzoeksvraag: "Hoe kunnen we met een innovatief didactisch werkboek op basis van de methodes van Barton inspelen op de breukenproblematiek in de eerste graad B-stroom?"

Craig Barton is de auteur van How I wish I thought mats. In dit boek bespreekt hij vijftien jaar aan mislukkingen en hoe hij het anders had willen doen. Elk hoofdstuk is opgebouwd volgens dezelfde structuur. Eerst bespreekt hij in het kort hoe hij vroeger lesgaf. Vervolgens vuurt hij een reeks informatiebronnen op de lezer af die hij daarna samenvat. Ten slotte overloopt hij hoe hij nu handelt in de lespraktijk inclusief alle fouten van vroeger die hij nu niet meer maakt. Deze bachelorproef focust op de belangrijkste methodes uit het boek. In de literatuurstudie worden deze uitvoerig onderzocht om vervolgens vertaald te worden in een didactische handleiding die zich toespitst op breuken in de B-stroom.

Volgende didactische methodes worden onder de loep genomen:

1. Uitgewerkte voorbeelden optimaal benutten: leerlingen moeten altijd eerst een uitgewerkt voorbeeld krijgen, voordat ze zelf aan de slag gaan. Via een voorbeeld-opgavepaar krijgen leerlingen eerst een uitgeschreven oefening aangeboden met alle bijhorende tussenstappen. Nadien maken ze een soortgelijke oefening aan de hand van het modelvoorbeeld. Een wiskundige methode wordt de leerling pas eigen, nadat hij eerst gezien heeft hoe deze in werking treedt. Hierbij kunnen eventueel reflectievragen worden toegevoegd om de leerling aan het denken te zetten over bepaalde tussenstappen.

2. Voorbeelden en opgaven uitkiezen: in handboeken wordt vaak te snel naar gemengde oefeningen gegrepen. Volgens Barton is het belangrijk om te beginnen met drempelvragen en -voorbeelden. Dit zijn extreme voorbeelden die heel het spectrum omtrent een begrip beslaan. Via slimme oefeningen wordt een concept verder ingeoefend om tot procedurele beheersing te komen. Bij slimme oefeningen verschillen de deelvragen slechts in één klein detail, zodat het resultaat telkens licht verandert. Nadien wordt onderzocht wat die verandering in het resultaat teweeg bracht.

3. De vijf stappen van doelgericht oefenen: bij complexe wiskundige processen is het belangrijk om de benodigde vaardigheden eerst te isoleren. Het heeft geen zin om te beginnen met het optellen van breuken als een leerling nog geen breuken kan vereenvoudigen of gelijknamig kan maken. Vanaf alle deelvaardigheden geïsoleerd zijn, wordt via een andere methode (bv. voorbeeld-opgavepaar) elk onderdeeltje ingeoefend. Na het inoefenproces vindt formatieve evaluatie plaats. Als deze drie stappen vlot verlopen, is het tijd voor de uiteindelijke prestatie. Een succesvolle prestatie op een toets is echter geen betrouwbare indicatie van daadwerkelijk leren. Daarom noemt Barton herhaling de laatste stap van het doelgericht oefenen.

4. Formatieve evaluatie: evaluatie is een belangrijke tool om vast te stellen of leerlingen een onderwerp begrepen hebben. Dit hoeft in de beginfases niet altijd op punten te staan. De vaststelling is dat secundaire scholen te weinig aan formatieve evaluatie doen.
5. SSDD-problemen: dit is een handige tool om leerlingen gedifferentieerd te laten oefenen. Elk van deze problemen kent dezelfde opbouw: een centraal thema (= same surface) behandelt vier opgaven met telkens een andere moeilijkheidsgraad of manier van aanpak (= different depht). Deze oefenmethode komt niet aan bod in het boek, maar werd integraal vanop Craig Barton zijn website gehaald.
6. De stille leraar: deze didactische methode is enkel bruikbaar in de klaspraktijk en kan als aanvulling dienen bij een andere methode. De leraar moddeleert namelijk hoe een methode of oefening in zijn werk gaat, maar doet dit in complete stilte. Onderzoek heeft aangetoond dat op hetzelfde moment praten en schrijven het werkgeheugen van de leerling te veel belast. Tijdens het stil moddeleren van een methode, denken de leerlingen na over de verschillende handelingen.

Deze zes methodes vertaalden zich in een didactische handleiding met bijhorende leerlingenbundel en correctiesleutel. In de lerarenhandleiding worden alle aspecten van breuken van elkaar gescheiden. Elk onderdeel wordt behandeld met één van de zes methodes die hierboven kort beschreven werden. Volgend onderscheid werd gemaakt om de hoofdstukken van het praktisch product af te bakenen:

- Breuken interpreteren: dit onderdeel omvat het nemen van een breuk van een getal, breuken gelijkwaardig maken en bijgevolg het vereenvoudigen van breuken.
- Het ordenen van breuken: hierbij wordt eerst aangeleerd hoe breuken gelijknamig gemaakt moeten worden om ze vervolgens te ordenen met vergelijkingstekens en op een getallenas.
- Het omzetten van breuken naar decimale getallen en vice versa.
- Bewerkingen met breuken: het praktisch product beperkt zich tot het optellen en aftrekken van breuken, omdat hier de lijn wordt getrokken in de eerste graad van de B-stroom.

De testfase van de lerarenhandleiding met didactisch materiaal voor de leerlingen vond plaats in OLVI Boom. De onderzoeksresultaten waren sprekend, desondanks dat de leerstof van de breuken een half jaar eerder behandeld werd en het gezeur van de leerlingen meteen begon bij het horen van het woord 'breuken'. Doordat de testfase in een 1B-klas plaatsvond, moesten we ons beperken tot een breuk nemen van een getal en gelijkwaardige breuken. Een breuk nemen van een getal werd getest conform de lerarenhandleiding. In de vorm van een voorbeeld-opgavepaar gecombineerd met het principe van de stille leraar, gingen de leerlingen aan de slag met drie mogelijke extreme gevallen. De vaststelling was dat de leerlingen deze methode goed onder de knie hadden na enkele voorbeelden. Het gebruik van wisbordjes is hier een meerwaarde, zoals het aangeraden werd in de handleiding.

Om breuken gelijkwaardig te leren maken, werd het principe ‘minimaal verschillende voorbeelden’ ingezet. Twee gelijkwaardige breuken werden op bord genoteerd en stelselmatig werd telkens één getal in de teller of noemer aangepast om te onderzoeken of de breuken nog steeds gelijkwaardig waren. De leerlingen waren zeer actief tijdens dit denkproces en uit latere oefeningen ter formatieve evaluatie bleek dat deze manier van werken zijn vruchten had afgeworpen.

Dit testmoment heeft bewezen dat de methodes van Barton maken een verschil in de B-stroom voor het aanbrengen van breuken en dat de didactische handleiding doet wat ze moet doen. Het spreekt voor zich dat een enkel testmoment niet volstaat. Vervolgonderzoek op twee vlakken is nodig:

1) Aan de slag gaan met de bundel: geen enkele wiskundeleerkracht staat te springen om een boek van 500 pagina’s te lezen die hun werkwijzen in vraag stelt. Deze lerarenhandleiding met bijhorende oefenbundel kan hier verandering in brengen. Doordat leerkrachten dit product in verschillende klassen in verschillende jaren inzetten, kan pas echt geconcludeerd worden dat de methodes van Barton effectiever zijn dan de traditionele methodes.

2) Andere pijnpunten in het secundair onderwijs aanpakken: deze bachelorproef spitst zich toe op breuken in de eerste graad van het secundair onderwijs. In realiteit kent de wiskundedidactiek in het secundair onderwijs nog veel andere pijnpunten zoals vraagstukken, functieleer en vergelijking. Mogelijks vervolg-onderzoek naar de didactische methodes van Barton zou een van die onderwerpen kunnen behandelen.

Literatuurlijst

Barton, C. (2019). *Volgens Barton*. Culemborg, Gelderland, Nederland: Phronese.

Barton, C. (sd). *Research*. Opgeroepen in november 2022, van Mr Barton Maths: https://www.mrbartonmaths.com/teachers/research/

Barton, C. (sd). *Ordering fractions*. Opgeroepen op mei 2023, van diagnostic questions: https://diagnosticquestions.com/Questions?CurrentSubjectId=228&OrderBy=Newest&IsByStudent=False

Breuken en rekenen met breuken. (sd). Opgeroepen in november 2022, van examenoverzicht: https://www.examenoverzicht.nl/wiskunde/rekenen-met-breuken#:~:text=Bij%20een%20breuk%20bereken%20je,de%20deelstreep%20tussen%20haakjes%20staat

Die Keure. (sd). *Max-Wiskunde 2B Module 10*. (D. Keure, Producent) Opgeroepen op februari 2023, van Polpo: https://api.polpo.be/boeke/book/7056

Doelenlijst-Wiskunde 1B. (2022-2023). Opgeroepen op januari 2023, van LLinked Katholiek Onderwijs Vlaanderen: https://llinkid.katholiekonderwijs.vlaanderen/#!/leerplan/d9bd18bf-761c-4af9-a035-766cd8da8d54/doelenlijst

Joep. (2021, augustus 24). *Hoe moet je breuken vermenigvuldigen*. Opgeroepen in november 2022, van Superprof: https://nl.superprof.be/blog/hoe-moet-je-breuken-vermenigvuldigen/

Mr Barton Maths. (sd). *Four operations with fractions*. Opgeroepen in januari 2023, van SSDD Problems: https://ssddproblems.com/four-operations-with-fractions/

Mr Barton Maths. (sd). *2/3 of 18 – SSDD Problem.* Opgeroepen in januari 2023, van SSDD Problems: https://ssddproblems.com/2-3-of-18/

Steunpunt toetsontwikkeling en peilingen. (2019). *Brochure wiskunde SO1B - 2019*. Opgeroepen in oktober 2022, van Kwalificaties en curriculum: https://www.kwalificatiesencurriculum.be/sites/default/files/2022-06/Brochure_wisk_SO1B_2019.pdf

Steunpunt toetsontwikkeling en peilingen. (2019). *Factsheet wiskunde SO1B-2019*. Opgeroepen in oktober 2022, van Peilingsonderzoek: https://peilingsonderzoek.be/wp-content/uploads/2018/11/Factsheet-wiskunde-SO1B-2019_DEF.pdf

Veluwenkamp, G. (2020). *Logaritmen volgens Barton.* (Masterthesis, University of Twente). Opgeroepen in januari 2022, van: file:///C:/Users/Gebruiker/Downloads/Veluwenkamp_MA_ELAN.pdf

Verbeek, K. P. (sd). *Max-wiskunde 1B module 09.* (D. Keure, Producent) Opgeroepen op februari 2023, van Polpo: https://api.polpo.be/boeke/book/5856

Volgens Barton een bespreking en recensie. (sd). Opgeroepen in november 2022, van Onderwijs Huizederidder: https://onderwijs.huizederidder.nl/2021/09/06/volgens-barton-een-bespreking-en-recensie/