

KU LEUVEN

**FACULTEIT PSYCHOLOGIE EN
PEDAGOGISCHE WETENSCHAPPEN**

DE GENERATIE'BREUK'

Een vergelijkend onderzoek naar het strategiegebruik bij het
schatten van breuken op een getallenlijn in het zesde leerjaar
en vijfde middelbaar

Masterproef aangeboden tot het
verkrijgen van de graad van
Master of Science in de
Pedagogische wetenschappen
Door
Ine Meers

promotor: Prof. Dr. Wim Van Dooren



*Copyright informatie:
studiewerk van een student in het kader van de academische
opleiding en examenbeoordeling.
Na deze beoordeling vond geen correctie plaats
van het studiewerk.*

KU LEUVEN

**FACULTEIT PSYCHOLOGIE EN
PEDAGOGISCHE WETENSCHAPPEN**

DE GENERATIE'BREUK'

Een vergelijkend onderzoek naar het strategiegebruik bij het
schatten van breuken op een getallenlijn in het zesde leerjaar
en vijfde middelbaar

Masterproef aangeboden tot het
verkrijgen van de graad van
Master of Science in de
Pedagogische wetenschappen
Door
Ine Meers

promotor: Prof. Dr. Wim Van Dooren

SAMENVATTING

Breuken vormen een fundamenteel onderdeel van het curriculum in het basis- en secundair onderwijs. Toch blijkt uit onderzoek dat mensen meer moeilijkheden ervaren met het begrijpen van de numerieke grootte van breuken, in vergelijking met natuurlijke en decimale getallen. Dit heeft geleid tot verder onderzoek naar hoe leerlingen breuken begrijpen en welke strategieën zij daarbij gebruiken. Zo onderzocht Hofmans (2022) het strategiegebruik bij het schatten van breuken op een getallenlijn van leerlingen uit het zesde leerjaar met verschillende wiskundige competenties. Zij maakte daarbij gebruik van de Number Line Estimation (NLE)-taak, waarbij leerlingen verschillende breuken op een getallenlijn van 0 tot 1 moesten plaatsen. Daarnaast ontwikkelde ze een codeerschema waarmee ze het strategiegebruik systematisch kon coderen en analyseren in relatie tot item- en leerlingkenmerken. In dit driedelig codeerschema werd elke trial eerst globaal beoordeeld als 'correct', 'inaccuraat' of 'rest'. Het schatten van de breuk werd vervolgens opgesplitst in drie stappen, namelijk 'encoderen', 'positioneren' en 'finaliseren'.

Hoewel Hofmans (2022) aantoonde dat de strategiekeuze en adaptief strategiegebruik samenhangen met de schattingsnauwkeurigheid, beperkte haar studie zich enkel tot leerlingen uit het zesde leerjaar. Hierdoor werd niet duidelijk in hoeverre onderwijsniveau of expertise een invloed uitoefende op het strategiegebruik en de schattingsfouten.

Het huidige onderzoek vergeleek daarom leerlingen uit het zesde leerjaar en vijfde middelbaar. Er werd via een gelijkaardig onderzoeksopzet nagegaan hoe deze onderwijsniveaus verschillen in hun strategiegebruik en adaptiviteit en welk effect dit had op hun schattingsfouten. Hierbij werd er gebruikgemaakt van hetzelfde codeerschema, mits enkele aanpassingen, en de NLE-taak. De nauwkeurigheid van de schattingen van de leerlingen werd berekend door middel van de Percentage of Absolute Error (PAE).

Er werd onderzocht welke strategieën leerlingen hanteerden, hoe accuraat en hoe flexibel deze werden toegepast en in welke mate die samenhangen met leerling- of itemkenmerken. Er werd gekeken naar de algemene schattingsfout bij het positioneren van breuken op een getallenlijn en naar de verschillen in strategiegebruik en nauwkeurigheid tussen leerlingen uit verschillende onderwijsniveaus. Daarnaast werd onderzocht of er verschillen optraden in de nauwkeurigheid van de schattingen op leerling- en itemniveau. Ook de relatie tussen de strategiediversiteit van een leerling en diens onderwijsniveau werd geanalyseerd in relatie tot de schattingsnauwkeurigheid. Tot slot werd nagegaan of bepaalde itemkenmerken specifieke strategieën uitlokten en of dit leidde tot een grotere nauwkeurigheid in de schatting. Zo werd het adaptief strategiegebruik van leerlingen uit verschillende onderwijsniveaus in kaart gebracht worden.

Samenvattend toonden de resultaten aan dat zowel het onderwijsniveau als het strategiegebruik een rol spelen bij het accuraat schatten van breuken op een getallenlijn. Leerlingen uit het vijfde middelbaar schatten over het algemeen nauwkeuriger dan leerlingen uit het zesde leerjaar. Dit verschil leek eerder samen te hangen met het strategiegebruik

binnen de stap 'positioneren' dan met 'encoderen' of 'finaliseren'. Daarnaast bleek dat itemkenmerken, zoals de noemergrootte en de ligging ten opzichte van referentiepunten, het strategiegebruik en de schattingsnauwkeurigheid sterk beïnvloedden.

WOORD VAN DANK

Graag wil ik van deze gelegenheid gebruikmaken om een aantal mensen te bedanken die me op verschillende manieren hebben geholpen en ondersteund tijdens dit traject.

In de eerste plaats wil ik mijn promotor prof. Dr. Wim Van Dooren bedanken voor zijn deskundige begeleiding en zijn snelle, gerichte feedback. De ruimte die u bood om vragen te stellen en samen te reflecteren gaf me vertrouwen en hielp me mijn onderzoek concreet vorm te geven.

Een welgemeende dankjewel gaat ook uit naar mijn thesispartner Marie Meuris, met wie ik een groot deel van dit traject mocht delen. Onze samenwerking moedigde me aan om kritisch na te denken en maakte het hele proces bovendien een stuk aangenamer.

Daarnaast ben ik alle leerlingen en leerkrachten dankbaar die hebben meegewerkt aan dit onderzoek. Hun inzet was essentieel voor het tot stand komen van deze masterproef.

Tot slot wil ik mijn familie en vrienden bedanken voor hun steun doorheen mijn schoolloopbaan en in het bijzonder het afgelopen jaar.

Bedankt!

TOELICHTING AANPAK EN EIGEN INBRENG

In oktober 2023 nam ik op eigen initiatief contact op met prof. Dr. Wim Van Dooren met de gerichte vraag om dit onderwerp te mogen onderzoeken. Het werd initieel niet aan mij toegewezen via de eerste keuzeronde, maar sloot nauw aan bij mijn persoonlijke interesse en mijn achtergrond als voormalig leerkracht wiskunde in het secundair onderwijs. Enkele weken later sloot mijn thesispartner, Marie Meuris, zich ook aan bij dit onderzoek.

Deze studie werd gezamenlijk opgezet, maar kende een duidelijk afbakening wat betreft vergelijkingsgroepen. Marie onderzocht het verschil in strategiegebruik tussen leerlingen uit het vierde en het zesde leerjaar, terwijl ik deze vergelijking uitvoerde tussen de leerlingen uit het zesde leerjaar en het vijfde middelbaar. Vanwege de grote inhoudelijke en methodologische overlap tussen beide onderzoeken werd ervoor gekozen om de inleiding, de literatuurstudie, het onderzoeksopzet en de dataverzameling samen uit te werken. De onderzoeksresultaten werden tussentijds regelmatig besproken om bepaalde inzichten te verhelderen en kritisch te benaderen. De uiteindelijke rapportering, interpretatie en conclusies werden echter volledig afzonderlijk uitgewerkt. Bepaalde bevindingen kunnen desondanks gelijkenissen vertonen, vanwege de gedeelde context van het onderzoek, maar ze zijn steeds gebaseerd op eigen analyses en redeneringen.

Het eerder uitgevoerde onderzoek van Mathise Hofmans (2022) vormde het uitgangspunt voor deze studie. De onderzoeksopzet, inclusief de Number Line Estimation (NLE)-taak, werd grotendeels overgenomen. Bepaalde onderdelen, zoals de itemset en het codeerschema, werden echter herwerkt op basis van haar bevindingen. In tegenstelling tot Hofmans' onderzoek (2022), die zich uitsluitend richtte op leerlingen van het zesde leerjaar, omvat de huidige studie een bredere doelgroep, namelijk leerlingen uit het vierde leerjaar, zesde leerjaar en vijfde middelbaar.

Vanaf november 2023 werd gestart met het verzamelen en verwerken van relevante literatuur. Deze literatuurstudie werd in de loop van het traject verder uitgewerkt en nagelezen door onze promotor. Tegelijkertijd werd een aanvraag ingediend bij de Sociaal-Maatschappelijke Ethische Commissie (SMEC). In de periode voorafgaand aan de goedkeuring, die in februari 2024 werd verleend, werden de itemset en het codeerschema aangepast. Na de goedkeuring werden 26 scholen gecontacteerd met de vraag om deel te nemen aan het onderzoek. Uiteindelijk engageerden drie basisscholen en drie middelbare scholen zich voor deze studie.

Om het codeersysteem en de afnameprocedure te evalueren, werd in dezelfde periode een pilotstudie uitgevoerd. De effectieve dataverzameling vond plaats van begin maart tot begin juni 2024. Deze werd steeds uitgevoerd volgens een gestandaardiseerd protocol. Tijdens de interviews werd gebruikgemaakt van het Think-Aloud-protocol. Er werden ook geluidsopnames gemaakt, die als hulpmiddel dienden bij het coderen en het berekenen van

de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid. Bij de verwerking van de data gingen 24 audiobestanden van het vijfde middelbaar verloren. De codering van deze trials was al afgerond, waardoor de gevolgen voor de verdere analyses beperkt bleven.

Gelijktijdig met de dataverzameling werd de methodesectie uitgewerkt, die tevens werd nagelezen door onze promotor. De verwerking van de ruwe data werd uitgevoerd in Excel en liep door tot oktober 2024.

Vervolgens voerde elke onderzoeker zelfstandig statistische analyses uit in SPSS op hun eigen dataset. In het kader van deze studie, betrof dit de gegevens van het zesde leerjaar en vijfde middelbaar. De rapportering van de resultaten, de interpretatie en de conclusies werden eveneens zelfstandig opgesteld, met inhoudelijke feedback van onze promotor.

INHOUDSOPGAVE

1	INLEIDING.....	1
2	LITERATUURSTUDIE.....	3
2.1	GETALLENVERZAMELING.....	3
2.2	BASESYSTEEM VAN EEN GETALREPRESENTATIE.....	5
2.3	NUMBER LINE ESTIMATION (NLE)-TAAK.....	6
2.4	DE IMPLEMENTATIE VAN DE NLE-TAAK IN ONDERZOEK.....	7
2.4.1	<i>Onderzoek met natuurlijke getallen.....</i>	<i>7</i>
2.4.2	<i>Onderzoek met breuken.....</i>	<i>8</i>
2.5	STRATEGIEGEBRUIK BIJ HET SCHATTEN VAN BREUKEN DOOR ZESDEKLASSERS: INZICHTEN UIT HOFMANS (2022).....	9
2.5.1	<i>Onderzoeksopzet en bevindingen.....</i>	<i>9</i>
2.5.2	<i>Implicaties voor verder onderzoek.....</i>	<i>11</i>
2.6	PROBLEEMSTELLING.....	12
3	METHODE.....	14
3.1	DEELNEMERS.....	14
3.2	MEETINSTRUMENT: NUMBER LINE ESTIMATION (NLE)-TAAK.....	15
3.3	ITEMSET.....	15
3.4	PROCEDURE.....	17
3.5	SCHATTINGSNAUWKEURIGHEID (PERCENTAGE OF ABSOLUTE ERROR; PAE).....	18
3.6	CODEERSYSTEEM VAN DE STRATEGIEËN.....	18
3.6.1	<i>Algemene beoordeling trial.....</i>	<i>18</i>
3.6.2	<i>Beoordeling van de strategie.....</i>	<i>19</i>
3.6.3	<i>Interbeoordelaarsbetrouwbaarheid.....</i>	<i>22</i>
3.7	STATISTISCHE ANALYSE.....	22
3.7.1	<i>Centrummaat.....</i>	<i>22</i>
3.7.2	<i>Generalized Estimating Equations.....</i>	<i>24</i>
3.7.3	<i>Niet-parametrische toetsen.....</i>	<i>24</i>
4	RESULTATEN.....	26
4.1	DATABESTAND.....	26
4.1.1	<i>Filtering van trials en algemene beoordeling.....</i>	<i>26</i>
4.1.2	<i>Verschillen in algemene beoordeling per onderwijsniveau.....</i>	<i>28</i>
4.2	ALGEMENE SCHATTINGSFOUT.....	29
4.2.1	<i>Algemene schattingsfout binnen onderwijsniveaus.....</i>	<i>29</i>
4.2.2	<i>Algemene schattingsfout tussen onderwijsniveaus.....</i>	<i>35</i>
4.3	ENCODEREN EN FINALISEREN.....	36
4.4	POSITIONEREN.....	39
4.4.1	<i>Strategiegebruik en accuraatheid.....</i>	<i>39</i>

4.4.2	<i>Diversiteit in strategiegebruik</i>	42
4.4.3	<i>Schattingsfout per item per onderwijsniveau</i>	43
4.4.4	<i>Frequentie en schattingsfout per item per strategie</i>	45
5	CONCLUSIE	62
6	DISCUSSIE	66
	LITERATUURLIJST	70
	BIJLAGEN	73
	BIJLAGE A: GEÏNFORMEERDE TOESTEMMING.....	73
	BIJLAGE B: VOORBEELD SCHATTINGSTAAK.....	76
	BIJLAGE C: PROTOCOL 'INLEIDING MEETMOMENT'.....	77
	BIJLAGE D: VOORBEELD CODEERSHEMA.....	78

FIGURENLIJST

FIGUUR 1: VENNDIAGRAM VAN DE GETALLENVERZAMELINGEN.....	5
FIGUUR 2: HET DECIMAAL TALSTELSEL: HET GETAL 5937,8.....	6
FIGUUR 3: BOXPLOT VAN DE PAE-WAARDEN PER ONDERWIJSNIVEAU MET UITSCHIETERS	23
FIGUUR 4: HISTOGRAM VAN DE MEDIAAN PERCENTAGE OF ABSOLUTE ERROR (PAE) VAN LEERLINGEN UIT HET ZESDE LEERJAAR (L6).....	30
FIGUUR 5: HISTOGRAM VAN DE MEDIAAN PERCENTAGE OF ABSOLUTE ERROR (PAE) VAN LEERLINGEN UIT HET VIJFDE LEERJAAR (M5).....	31
FIGUUR 6: MEDIAAN PAE PER ITEM VOOR DE LEERLINGEN UIT HET ZESDE LEERJAAR.....	44
FIGUUR 7: MEDIAAN PAE PER ITEM VOOR DE LEERLINGEN UIT HET VIJFDE MIDDELBAAR.....	44

TABELLENLIJST

TABEL 1: CODEERSYSTEEM	19
TABEL 2: AANTAL ITEMS PER ALGEMENE BEOORDELING PER ONDERWIJSNIVEAU	27
TABEL 3: ENCODEREN: FREQUENTIEVERDELING PER ONDERWIJSNIVEAU	37
TABEL 4: ENCODEREN: MEDIAAN PAE EN STANDAARDDEVIATIE PER AANPAK PER ONDERWIJSNIVEAU	37
TABEL 5: FINALISEREN: FREQUENTIEVERDELING PER ONDERWIJSNIVEAU	38
TABEL 6: FINALISEREN: MEDIAAN PAE EN STANDAARDDEVIATIE PER AANPAK PER ONDERWIJSNIVEAU	38
TABEL 7: POSITIONEREN: FREQUENTIEVERDELING STRATEGIEGEBRUIK PER ONDERWIJSNIVEAU	40
TABEL 8: POSITIONEREN: MEDIAAN PAE EN STANDAARDDEVIATIE PER STRATEGIE PER ONDERWIJSNIVEAU ...	40
TABEL 9: RESULTATEN VAN DE SHAPIRO-WILK-TEST VOOR NORMALITEIT PER STRATEGIE BINNEN ELK ONDERWIJSNIVEAU	41
TABEL 10: DIVERSITEIT IN STRATEGIEGEBRUIK PER ONDERWIJSNIVEAU	43
TABEL 11: FREQUENTIE EN SCHATTINGSFOUT VAN 'EENMAAL SEGMENTEREN' PER BREUK EN LEERJAAR, MET MEDIAAN PAE EN BIJHORENDE STANDAARDAFWIJKING	47
TABEL 12: FREQUENTIE EN SCHATTINGSFOUT VAN 'GETRAPT SEGMENTEREN' PER BREUK EN LEERJAAR, MET MEDIAAN PAE EN BIJHORENDE STANDAARDAFWIJKING	51
TABEL 13: FREQUENTIE EN SCHATTINGSFOUT VAN 'BENCHMARKEN' PER BREUK EN LEERJAAR, MET MEDIAAN PAE EN BIJHORENDE STANDAARDAFWIJKING	54
TABEL 14: FREQUENTIE EN SCHATTINGSFOUT VAN 'GEEN STRATEGIE' PER BREUK EN LEERJAAR, MET MEDIAAN PAE EN BIJHORENDE STANDAARDAFWIJKING	61

1 INLEIDING

In de huidige maatschappij komen mensen dagelijks in aanraking met getallen en hun representaties. Deze spelen namelijk een cruciale rol in het weergeven, interpreteren en verwerken van informatie, gaande van het representeren van weersvoorspellingen tot het verdelen van een rekening onder vrienden. Dit veelvuldige gebruik van getallen illustreert de noodzaak van een grondig inzicht in de manier waarop ze in verschillende contexten worden toegepast en geïnterpreteerd.

Het Vlaamse onderwijssysteem weerspiegelt dit belang van getalbegrip in het aangeboden curriculum, waarbij leerlingen bij de start van hun schoolloopbaan in aanraking komen met het concept 'hoeveelheid' en de verschillende manieren waarop deze hoeveelheden kunnen worden uitgedrukt met behulp van getalgroepen (Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming, 2010). De leerlingen maken op deze manier kennis met natuurlijke getallen en met rationale getallen, waaronder decimale getallen en breuken. Naarmate hun schoolloopbaan vordert, ontwikkelen ze vaardigheden om deze getallen te schatten, te ordenen, er bewerkingen op uit te voeren en ze toe te passen in verschillende contexten, aansluitend bij hun leefwereld (Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming, 2010).

Ondanks de centrale rol die rationale getallen spelen in het onderwijs en de maatschappij, blijkt uit onderzoek dat veel leerlingen in het basis- en secundair onderwijs, alsook opgeleide volwassenen, aanzienlijke moeilijkheden ervaren met het begrijpen en toepassen van breuken (bijv. Bonato et al., 2007; Obersteiner et al., 2013; Van Hoof et al., 2015). Dit is verontrustend, aangezien het vermogen om rationale getallen te begrijpen en te verwerken van cruciaal belang blijkt voor algemene wiskundeprestaties (bijv. Siegler et al., 2012; Van Hoof et al., 2017). Deze discrepantie tussen het belang van dit inzicht en de bestaande moeilijkheden bij kinderen en volwassenen toont aan dat er verder onderzoek nodig is naar de manieren waarop rationale getallen benaderd en begrepen worden.

In dit onderzoek werd voortgebouwd op het werk van Hofmans (2022). Zij onderzocht welke strategieën leerlingen uit het zesde leerjaar hanteerden bij het schatten van breuken op een getallenlijn en hoe ze deze strategieën aanpasten in functie van de specifieke kenmerken van de breuk. Daarnaast bestudeerde Hofmans (2022) ook de invloed hiervan op de accuraatheid van de schatting. Tot slot analyseerde zij in welke mate de wiskundige competenties van de leerlingen hiermee samenhangen. Haar onderzoek toonde aan dat zowel het gebruik van strategieën als de wiskundige competentie van de leerlingen een significante rol spelen in de nauwkeurigheid van hun schattingen van breuken. Op basis van deze bevindingen, richtte het huidige onderzoek zich op de diverse strategieën die leerlingen van verschillende onderwijsniveaus, namelijk het vierde leerjaar, het zesde leerjaar en vijfde middelbaar, gebruikten om breuken te schatten op een getallenlijn. Er werd gekeken naar welke strategieën de leerlingen hanteerden, hoe deze varieerden per onderwijsniveau en welk effect ze hadden op de nauwkeurigheid van de schatting. Om deze onderzoeksvragen te

beantwoorden, werd gebruikgemaakt van de 'Number-to-Position'-variant van de Number Line Estimation (NLE)-taak.

Om de thematiek van dit onderzoek te schetsen, wordt het concept 'breuken' eerst geplaatst binnen het bredere kader van getallenverzamelingen. Daarbij wordt de relatie tussen rationale getallen en andere verzamelingen aangetoond. Eveneens wordt het bijbehorende notatiesysteem toegelicht, namelijk het decimale talstelsel. Vervolgens worden de bevindingen van voorafgaande onderzoeken omtrent het begrip van de numerieke grootte van getallen gekaderd. De geselecteerde studies maakten telkens gebruik van de NLE-taak. Samen vormen deze concepten en onderzoeksbevindingen het theoretisch kader dat aan de problematiek ten grondslag ligt. Uiteindelijk mondt dit uit in de probleemstelling, waarin ook een duidelijke richting wordt gegeven aan de relevantie en het verdere verloop van dit onderzoek.

2 LITERATUURSTUDIE

2.1 Getallenverzameling

Getallen kunnen worden onderverdeeld in een getallensysteem dat opgebouwd is uit een aantal hiërarchisch georganiseerde verzamelingen. Deze verzamelingen zijn essentieel voor het bestuderen van numerieke concepten in uiteenlopende toepassingen (Groep Wetenschap en Technologie, 2024).

De verzameling van de natuurlijke getallen, aangeduid met het symbool $\mathbb{N}$, bestaat uit alle positieve getallen en het getal nul. Deze getallen worden voornamelijk gebruikt voor het tellen van discrete hoeveelheden (bijv. het aantal studenten in een klas) en het representeren van entiteiten (bijv. een studentnummer). Formeel kan de verzameling van de natuurlijke getallen als volgt worden gedefinieerd (Carreyn et al., 2022a):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

De optelling, vermenigvuldiging en machtsverheffing van uitsluitend natuurlijke getallen resulteert steeds opnieuw in een natuurlijk getal. Deze eigenschap geldt echter niet voor aftrekking, deling en vierkantsworteltrekking. Ter illustratie, het verschil tussen twee natuurlijke getallen kan resulteren in een negatieve uitkomst, die niet langer behoort tot de verzameling van natuurlijke getallen (bijv. $5 - 7 = -2$) (Carreyn et al., 2022a).

Om deze tekortkoming te verhelpen, is er een uitbreiding nodig van de verzameling van natuurlijke getallen naar de verzameling van gehele getallen, genoteerd met het symbool $\mathbb{Z}$. Deze verzameling omvat niet alleen alle natuurlijke getallen, maar introduceert ook hun negatieve tegenhangers, die worden gekenmerkt door een negatief teken ‘-’. Door deze uitbreiding kunnen ook situaties worden bestudeerd waarin waarden onder nul ontstaan, zoals bij temperatuurverschillen (Carreyn et al., 2022b).

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

De deling van twee gehele getallen kan, wanneer de deler geen exacte deler is van het deeltal, resulteren in een quotiënt dat niet behoort tot de verzameling van de gehele getallen (Carreyn et al., 2022b). Dit impliceert de noodzaak van een verdere uitbreiding naar een bredere verzameling, genaamd de rationale getallen.

De verzameling van rationale getallen, uitgedrukt met het symbool $\mathbb{Q}$, omvat alle getallen die kunnen worden uitgedrukt als een breuk van twee gehele getallen, waarbij de noemer verschillend is van nul (Carreyn et al., 2024).

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ met } a \in \mathbb{Z} \text{ en } b \in \mathbb{Z}_0 \right\}$$

Een alternatieve representatie van een rationaal getal, naast een breuk, is een decimaal getal. Binnen de verzameling van rationale getallen wordt een onderscheid gemaakt tussen begrensde en onbegrensde repeterende decimale vormen. Begrensde decimale getallen hebben een eindig aantal cijfers na de komma (bijv. $26/5 = 5,2$). Onbegrensde repeterende decimale getallen vertonen daarentegen een periodiek patroon, waarbij een reeks cijfers zich na de komma tot in het oneindige herhaalt (bijv. $1/3 = 0,333\dots$) (Carreyn et al., 2024). Daarnaast zijn er ook gemengde repeterende decimale vormen binnen de rationale getallen. Deze worden gekenmerkt door een initiële niet-repeterende sequentie van cijfers na de komma, gevolgd door een periode waarin een specifieke reeks zich eindeloos herhaalt (bijv. $7/22 = 0,3181818\dots$) (Carreyn et al., 2024).

De vierkantsworteltrekking van bepaalde rationale getallen resulteert echter niet altijd in een rationaal getal. In sommige gevallen is het resultaat een irrationaal getal. Dit zal de vorm aannemen van een oneindige, niet-repeterende reeks decimale getallen (bijv. $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$). Deze eigenschap maakt het onmogelijk om irrationale getallen uit te drukken als een breuk van twee gehele getallen, in tegenstelling tot hun rationale tegenhangers (Carreyn et al., 2024).

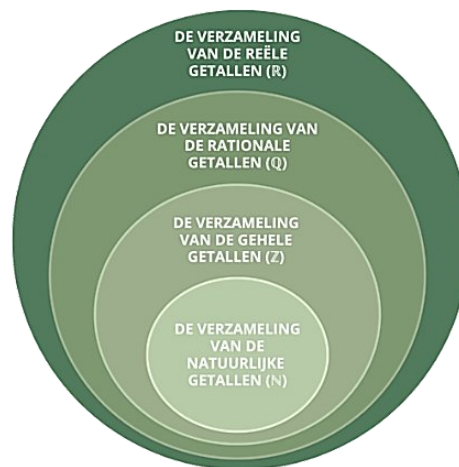
De introductie van irrationale getallen leidt tot een uitbreiding van de verzameling van rationale getallen naar de verzameling van reële getallen, aangeduid met het symbool $\mathbb{R}$. Deze verzameling bestaat zowel uit rationale als irrationale getallen. Het omvat dus een breed spectrum van mogelijke decimale representaties (Carreyn et al., 2024).

$$\mathbb{R} = \left\{ \dots; 0,1; -4; \pi; 3,1423, \dots; \sqrt{\frac{9}{16}}; \dots \right\}$$

Figuur 1 illustreert de gelaagde structuur van de verschillende getallenverzamelingen. De verzameling van natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ vormt een deelverzameling van de verzameling van gehele getallen $\mathbb{Z}$. De verzameling van rationale getallen $\mathbb{Q}$ omvat de gehele getallen en daarmee impliciet ook de natuurlijke getallen. Bovendien is deze verzameling zelf een deelverzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$ (Carreyn et al., 2024).

Figuur 1

Vennndiagram van de getallenverzamelingen



2.2 Basesysteem van een getalrepresentatie

Het decimale talstelsel, gebaseerd op de cijfers nul tot en met negen, wordt, naast andere systemen in de wereld, gebruikt om getallen te representeren en voor bewerkingen uit te voeren. Binnen dit tiendelige talstelsel, ook wel bekend als een positiestelsel (Carreyn et al., 2022a), is de positie van elk cijfer binnen een getal van belang. De plaats bepaalt namelijk de numerieke waarde van het cijfer. Het cijfer met de laagste waarde bevindt zich altijd helemaal rechts, voor of na de komma, afhankelijk van het getal. De exacte waarde van elk cijfer wordt verkregen door het te vermenigvuldigen met de bijbehorende macht van het grondtal, zijnde tien. Deze macht komt overeen met de specifieke positie van dat cijfer binnen de numerieke sequentie (Latif et al., 2011).

Bij het gebruik van een komma wordt er gesproken van decimale getallen, een specifieke representatie van rationale getallen (Carreyn et al., 2024).

Voor de cijfers die zich aan de rechterzijde van de komma bevinden, neemt de exponent in de macht af met negatieve waarden van tien. De bijdrage van elk cijfer wordt dus kleiner naarmate de positie van het getal zich verder naar rechts bevindt. Aan de linkerzijde van de komma wordt daarentegen elk cijfer vermenigvuldigd met toenemende positieve machten van tien, waardoor de cijfers exponentieel een grotere bijdrage leveren aan de totale waarde van het getal (Latif et al., 2011). Dit wordt geïllustreerd in Figuur 2 (Carreyn et al., 2022a; Latif et al., 2011).

Figuur 2

Het decimaal talstelsel: het getal 5937,8

5	9	3	7,8		
				tienden	$8 \times 10^{-1} = 0,8$
				eenheden	$7 \times 10^0 = 7$
				tientallen	$3 \times 10^1 = 30$
				honderdtallen	$9 \times 10^2 = 900$
				duizendtallen	$5 \times 10^3 = 5000$
totaal:					5937,8

De getallen uit de verschillende getallenverzamelingen worden uitgedrukt aan de hand van het decimale talstelsel. Breuken, een alternatieve representatie van rationale getallen, vormen hierbij echter een uitzondering. Hoewel de teller en noemer van een breuk als afzonderlijke waarden in het decimale talstelsel kunnen worden genoteerd, wordt de grootte van een breuk niet direct bepaald door deze notatie. Een breuk vertegenwoordigt namelijk de verhouding van twee getallen en het is die verhouding die de waarde ervan bepaalt (Latif et al., 2011).

Deze unieke eigenschap maakt dat breuken niet alleen een uitzondering zijn binnen het decimale talstelsel, maar draagt er ook toe bij dat ze conceptueel complexer en moeilijker te doorgronden zijn dan natuurlijke en decimale getallen. Onderzoek toont namelijk aan dat mensen significant meer moeite hebben met het begrijpen van de numerieke grootte van breuken (Iuculano & Butterworth, 2011; Vamvakoussi et al., 2018). Volgens Seunarine-MacKay (2021), kan dit verschil mogelijk verklaard worden door de complexe structuur van het notatiesysteem van breuken zoals eerder werd toegelicht. Natuurlijke en decimale getallen worden geschreven in een decimaal systeem. Het notatiesysteem van breuken is echter niet gebaseerd op het tiendelig talstelsel en vereist een begrip van onderliggende verhoudingen tussen teller en noemer. Deze structuur maakt het conceptueel uitdagender om de waarde van breuken intuïtief te begrijpen en in te schatten (Seunarine-MacKay, 2021).

2.3 Number Line Estimation (NLE)-taak

De Number Line Estimation (NLE)-taak is een veelgebruikte cognitieve taak om inzicht te verkrijgen in het numeriek begrip van de deelnemers (Schneider et al., 2018). Er zijn twee varianten van deze taak ontwikkeld. Bij de eerste variant, de 'Number-to-Position' (NP)-versie, krijgen deelnemers een begrensde horizontale getallenlijn te zien, waarbij het begin- en eindpunt zijn aangeduid. Vervolgens wordt een getal aangeboden dat zij op de getallenlijn moeten positioneren. Dit kan zowel een natuurlijk als rationaal getal zijn. Deze variant van de NLE-taak wordt beschouwd als de standaardversie van de taak (Siegler & Opfer, 2003).

Naast de NP-versie van de NLE-taak, bestaat ook de 'Position-to-Number' (PN)-variant. Hierbij krijgen de deelnemers een gemarkeerd punt op de getallenlijn te zien en moeten ze het getal schatten dat overeenkomt met die specifieke ruimtelijke positie (Siegler & Opfer, 2003).

Het begrip van de numerieke grootte van getallen kan aan de hand van de NLE-taak op verschillende manieren worden gemeten (Seunarine-MacKay, 2021). Een veelgebruikte maatstaf hiervoor is de schattingsfout, die het absolute verschil weergeeft tussen de door de deelnemer geschatte waarde en de werkelijke waarde. Deze fout kan worden uitgedrukt in absolute termen of als een percentage van de werkelijke waarde (Percentage of Absolute Error; PAE) (Schneider et al., 2018). De PAE geeft dus aan in welke mate de schatting afwijkt van de werkelijke waarde. Hierbij duidt een hogere PAE op een grotere afwijking (Siegler & Booth, 2004; Siegler & Thomson, 2014). De exacte berekening van deze schattingsfout wordt geïllustreerd in de methodesectie (zie sectie 3.2).

2.4 De implementatie van de NLE-taak in onderzoek

De NLE-taak blijkt een waardevol instrument te zijn voor onderzoek naar het begrip van de numerieke grootte van getallen. Studies tonen aan dat de getallenlijntaak effectief ingezet kan worden om het numeriek begrip van zowel jonge als oudere leerlingen te meten en te voorspellen. Zo blijkt de taak bijvoorbeeld voorspellend te zijn voor rekenvaardigheden en algemene wiskundeprestaties (Booth & Siegler, 2008).

2.4.1 Onderzoek met natuurlijke getallen

Veel onderzoek met de NLE-taak richtte zich aanvankelijk op het in kaart brengen van de kwaliteit van de numerieke presentatie van natuurlijke getallen. Hierbij wilden onderzoekers nagaan hoe nauwkeurig mensen dergelijke getallen op een getallenlijn konden plaatsen. Daarbij werd aangenomen dat de taak vooral de interne grootterepresentatie meet. Dit verwijst naar de manier waarop mensen de grootte van de getallen mentaal voorstellen (Booth & Siegler, 2008). Later werd echter duidelijk dat ook het gebruik van strategieën een belangrijke rol speelt in hoe leerlingen tot hun schatting komen. Zo ontdekten Newman en Berger (1984) dat sommige leerlingen het middelpunt als referentiepunt gebruikten. Ashcraft en Moore (2012) identificeerden een M-vormig patroon in de foutpercentages, wat eveneens wijst op het gebruik van referentiepunten zoals midden- en eindpunten. Voortbouwend op deze bevindingen, onderzochten Peeters et al. (2015) het gebruik van benchmarks op het eerste kwartiel, het middelpunt en derde kwartiel als strategie bij het schatten van de positie van natuurlijke getallen op een getallenlijn. Hun bevindingen bevestigden opnieuw dat leerlingen gebruikmaken van dergelijke referentiepunten tijdens de schatting.

Deze inzichten leidden tot een bredere interesse in de verschillende strategieën die worden gehanteerd tijdens het uitvoeren van de NLE-taken. Verschaffel et al. (2009) maakten hierbij een onderscheid tussen strategie-flexibiliteit en strategie-adaptiviteit. Strategie-flexibiliteit verwijst naar het vermogen van leerlingen om verschillende strategieën te gebruiken en tussen deze strategieën te schakelen. Strategie-adaptiviteit gaat verder dan strategie-flexibiliteit. Het betreft het vermogen om de meest geschikte strategie te selecteren op basis van de eigenschappen van het specifieke item. Dit impliceert niet alleen dat de leerling beschikt over een repertoire aan beschikbare strategieën maar ook dat hij of zij in staat is de meest optimale strategie te kiezen, die het beste aansluit bij de opdracht. Dit leidt tot een betere prestatie, wat zich uit in een hogere nauwkeurigheid of een snellere uitvoering.

2.4.2 Onderzoek met breuken

Naast het schatten van natuurlijke getallen werd de NLE-taak ook ingezet bij onderzoek naar complexere numerieke concepten, zoals breuken. In tegenstelling tot natuurlijke getallen vereisen breuken vaak een expliciete redenering, waardoor deze taak bijzonder geschikt is om het gebruik van deze strategieën in kaart te brengen (Siegler & Thompson, 2014). Siegler et al. (2011) onderzochten hoe leerlingen uit het zesde leerjaar en het tweede middelbaar breuken positioneerden op een getallenlijn. Ze maakten daarbij een onderscheid tussen twee categorieën van strategieën, namelijk 'numerieke transformatie' en 'segmentatie'. 'Numerieke transformatie' wijst op strategieën waarbij leerlingen de breuk omzetten naar een ander getal voordat ze deze op de getallenlijn schatten. Dit omvat bijvoorbeeld het afronden, vereenvoudigen of omzetten van een breuk naar een decimaal getal of percentage. Bijvoorbeeld, een leerling zet de breuk $12/13$ om naar 90% vooraleer hij deze schat op de getallenlijn. Bij het analyseren van de gegevens werd geen onderscheid gemaakt tussen de verschillende mogelijkheden binnen de transformatiestrategieën en werd dit als één geheel gecodeerd. 'Segmentatie' wijst op strategieën waarbij leerlingen de getallenlijn opdelen, vaak op basis van de noemer, of referentiepunten gebruiken om de breuk te schatten. De getallenlijn kan zo worden opgedeeld in helften of in eenheden die overeenkomen met de noemer. Bijvoorbeeld, een leerling verdeelt de getallenlijn in zeven gelijke delen om vervolgens het vierde streepje aan te duiden voor de breuk $4/7$.

Siegler et al. (2011) vonden dat de leerlingen uit het tweede middelbaar vaker numerieke transformatiestrategieën toepasten, terwijl jongere of zwakkere leerlingen eerder vertrouwden op segmentatie of andere minder efficiënte strategieën. Het gebruik van strategieën bleek ook sterk samen te hangen met de nauwkeurigheid van de schatting, die eveneens werd beïnvloed door het onderwijsniveau van de leerling.

Zhang et al. (2017) breidden de doelgroep van Siegler et al. (2011) uit en voerden onderzoek uit bij leerlingen uit het zesde leerjaar tot en met het tweede middelbaar, waaronder leerlingen met en zonder leerachterstanden in wiskunde. Naast de correcte strategieën die Siegler et al. (2011) identificeerden, ontdekten zij ook categorieën van strategieën die tot

verkeerde antwoorden leidden op de getallenlijn van 0 tot 1. Dit omvatte onder andere de 'ruler-tick-mark'-strategie, waarbij de leerlingen de getallenlijn gebruikte alsof het een liniaal was. Hierbij tekenden zij streepjes met gelijke tussenruimtes zonder rekening te houden met de noemer van de breuk. Een andere incorrecte strategie is de 'not-on-the-line'-strategie, waarbij leerlingen aangaven dat een breuk niet op de getallenlijn lag omdat de teller of noemer groter was dan de waarde van het eindpunt.

Zij toonden aan dat het gebruik van deze foutieve strategieën vaak leidde tot grotere schattingsfouten. Het gebruik van correcte strategieën daarentegen, zoals segmentatie en numerieke transformatie, bleek positief samen te hangen met de nauwkeurigheid van de schatting van de breuken op de getallenlijn van 0 tot 1. De bevindingen van Zhang et al. (2017) onderstrepen het belang van gerichte strategie-instructie bij het schatten van breuken.

2.5 Strategiegebruik bij het schatten van breuken door zesdeklassers: inzichten uit Hofmans (2022)

De studie van Hofmans (2022) vormde het uitgangspunt van het huidige onderzoek. Haar onderzoeksopzet en bevindingen vormden een basis voor de verdere uitwerking van dit onderzoek. Hieronder worden het opzet en de resultaten besproken, alsook de mogelijke implicaties die uit haar onderzoek voortkomen.

2.5.1 Onderzoeksopzet en bevindingen

Uit eerder onderzoek bleek dat leerlingen bij het uitvoeren van de Number Line Estimation (NLE)-taak met zowel natuurlijke getallen als breuken gebruikmaakten van verschillende strategieën. De studies van Siegler et al. (2011) en Zhang et al. (2017) benadrukten hierbij het belang van strategiegebruik bij het positioneren van breuken op een getallenlijn. Beide studies toonden namelijk aan dat het toepassen van correcte strategieën, zoals numerieke transformaties of segmentaties, sterk samenhang met de accuraatheid van de schatting. Daarnaast bleek het onderwijsniveau ook een bepalende factor hierin te zijn.

Het onderzoek van Hofmans (2022) bouwde voort op deze inzichten door leerlingen uit het zesde leerjaar met verschillende wiskundige competenties de 'Number-to-Position'-variant van een NLE-taak te laten uitvoeren. De leerlingen moesten hierbij breuken schatten op een getallenlijn van 0 tot 1. Hiervoor ontwikkelde Hofmans (2022) een codeersysteem waarmee ze het strategiegebruik van de leerlingen systematisch classificeerde, codeerde en analyseerde in relatie tot item- en leerlingkenmerken. Binnen dit driedelig codeerschema werd eerst elke trial globaal beoordeeld als 'correct', 'inaccuraat' of 'rest'. Het schatten van de breuk werd daarna opgesplitst in drie stappen, namelijk 'encoderen', 'positioneren' en 'finaliseren'. Binnen de stap 'encoderen', onderzocht Hofmans (2022) of de leerlingen de breuk exact of bij benadering transformeerden naar een andere presentatie, zoals een breuk of een decimaal getal. Deze stap sluit aan bij de strategie 'numerieke transformatie', die eerder werd beschreven door Siegler et al. (2011) en Zhang et al. (2017). Zij vonden dat het transformeren

van breuken door leerlingen leidde tot een nauwkeurigere schatting. In tegenstelling tot Siegler et al. (2011) en Zhang et al. (2017) maakte Hofmans (2022) in dit codeerschema een onderscheid tussen de verschillende mogelijke transformaties. Deze mogelijkheden worden verder besproken in sectie 3.6.2.

Hofmans (2022) focuste zich in haar onderzoek voornamelijk op de tweede stap, namelijk 'positioneren'. Daarbij bracht ze in kaart welke strategieën leerlingen gebruikten tijdens het positioneren van de breuk op de getallenlijn. Ze onderscheidde vier strategieën: 'segmenteren', 'getrapt segmenteren', 'benchmarken' en 'geen strategie'. Deze indeling ligt in lijn met het onderzoek van Siegler et al. (2011) en Zhang et al. (2017), die eveneens het gebruik van 'segmentatie' benadrukten om een nauwkeurige schatting te bekomen. Hierin maakte Hofmans (2022) echter een onderscheid door 'segmentatie' op te splitsen in 'segmenteren' en 'getrapt segmenteren'. Daarnaast beschouwde ze 'benchmarken' als een aparte strategie, terwijl Zhang et al. (2017) dit codeerde onder 'numerieke transformatie'. Deze keuze sluit ook aan bij het onderzoek naar natuurlijke getallen, waarin 'benchmarken' ook als een aparte strategie werd erkend (bijv. Peeters et al., 2015). Deze strategieën worden verder toegelicht in sectie 3.6.2.

Hofmans (2022) stelde daarnaast een itemset samen met breuken die ontworpen waren om het gebruik van de eerdergenoemde strategieën te stimuleren (zie sectie 3.3). Bij het creëren van haar itemset, maakte ze eerst een onderscheid op basis van de noemer van de breuk. Een even noemer maakt het schatten makkelijker, omdat de getallenlijn eenvoudig kan gehalveerd worden. Bij een oneven noemer is dit niet mogelijk, aangezien deze getallen niet zo eenvoudig in twee gelijke delen te splitsen zijn. Ten tweede werden vereenvoudigbare breuken vermeden. Er werd dus gekozen voor tellers en noemers die geen gemeenschappelijke delers hebben. Ten slotte werden ook breuken uitgesloten, waarvan de decimale waarde vaak gekend is en noemers die veelvouden van tien zijn. Dergelijke breuken zijn immers gemakkelijker te herleiden, waardoor het gebruik van strategieën minder aangewezen is.

Aan de hand van deze items en het codeerschema werd nagegaan bij leerlingen uit het zesde leerjaar of bepaalde strategieën vaker voorkwamen, hetzij in het algemeen, hetzij in functie van bepaalde breukeigenschappen. Verder bestudeerde Hofmans (2022) of het gebruik van deze strategieën samenhangt met de nauwkeurigheid van de schatting. Dit werd berekend aan de hand van de Percentage of Absolute Error (PAE) (Siegler & Booth, 2004; Siegler & Thomson, 2014). Bovendien onderzocht ze of er significante verschillen waren in accuraatheid tussen leerlingen met verschillende wiskundecompetenties en of deze verband hielden met verschillen in strategiegebruik of strategie-adaptiviteit. Hiervoor baseerde ze zich, onder andere, op het gemaakte onderscheid tussen strategie-flexibiliteit en strategie-adaptiviteit door Verschaffel et al. (2009).

Uit Hofmans' onderzoek bleek dat het inzetten van strategieën leidde tot nauwkeurigere schattingen van breuken op een getallenlijn dan wanneer er geen strategie werd toegepast. Dit effect was voornamelijk zichtbaar wanneer ze doelgericht werden ingezet in functie van de kenmerken van het item. Daarnaast toonde het onderzoek aan dat de wiskundecompetentie van een leerling en de diversiteit in strategiegebruik onafhankelijk bijdroegen aan de schattingsnauwkeurigheid. De specifieke itemkenmerken hadden tevens invloed op zowel de gekozen strategie als op de uiteindelijke schattingsfout. Deze bevindingen sloten aan bij de studies van Siegler et al. (2011) en Zhang et al. (2017). Zij toonden eveneens aan dat het onderwijsniveau van leerlingen alsook het gebruik van strategieën medebepalend waren voor de nauwkeurigheid van hun schattingen.

2.5.2 Implicaties voor verder onderzoek

Hofmans (2022) gaf aan dat enkele vragen onbeantwoord bleven binnen haar studie.

Ten eerste werd er voorgesteld om binnen vervolgonderzoek te focussen op items met specifieke kenmerken (bijv. items met een priemgetal als noemer).

Ten tweede suggereerde zij dat de onderzoeksopzet aangepast kan worden door gebruik te maken van een choice/ no-choice-paradigma, om te na te gaan welke strategieën het meest efficiënt zijn. Hierdoor kunnen minder frequent gebruikte strategieën, zoals 'getrapt segmenteren', beter beoordeeld worden.

Ten derde onderzocht Hofmans (2022) uitsluitend leerlingen uit het zesde leerjaar, waarbij ze enkel verschillen binnen deze groep bestudeerde op basis van hun algemene wiskundevaardigheden. Hun wiskundige kennis was echter relatief coherent, in die zin dat ze allemaal min of meer dezelfde leerervaringen hebben gehad. Daardoor bleef het onduidelijk in welke mate deze bevindingen over strategiegebruik en nauwkeurigheid ook van toepassing zijn op jongere of oudere leerlingen. Ook de invloed van leeftijd en expertise op het adaptief gedrag werd in haar onderzoek niet in kaart gebracht.

Voor jongere leerlingen, die pas in aanmerking zijn gekomen met breuken, bleef het interessant om na te gaan of zij reeds over een breed scala aan strategieën beschikten of dat hun aanpak nog beperkt en minder adaptief was. Voor oudere leerlingen daarentegen stelde zich de vraag of zij gebruikmaakten van andere en meer doelgerichte strategieën, waarbij zij mogelijk hun aanpak afstemden op de kenmerken van het item.

2.6 Probleemstelling

Breuken vormen een fundamenteel onderdeel van het curriculum in het basis- en secundair onderwijs. Toch blijkt uit onderzoek dat mensen meer moeilijkheden ervaren met het begrijpen van de numerieke grootte van breuken, in vergelijking met natuurlijke en decimale getallen (bijv. Iuculano & Butterworth, 2011; Vamvakoussi et al., 2018). Dit heeft geleid tot verder onderzoek naar hoe leerlingen breuken begrijpen en welke strategieën zij daarbij gebruiken. Om inzicht te krijgen in het numeriek begrip en het strategiegebruik bij het positioneren van breuken op een getallenlijn, wordt frequent de Number Line Estimation (NLE)-taak ingezet. Hofmans (2022) gebruikte deze taak in haar onderzoek naar het strategiegebruik bij het schatten van breuken op een getallenlijn door leerlingen uit het zesde leerjaar met verschillende wiskundige competenties. Haar bevindingen toonden aan dat de wiskundige competentie en de diversiteit in strategiegebruik onafhankelijk van elkaar bijdroegen aan de nauwkeurigheid van de schattingen. Daarnaast werd het adaptief strategiegebruik, dat zich baseert op de kenmerken van de aangeboden items, in kaart gebracht. Er waren echter bepaalde beperkingen aan het onderzoek van Hofmans (2022). Zo onderzocht ze uitsluitend leerlingen uit het zesde leerjaar en kon ze dus geen uitspraken doen over het strategiegebruik en -adaptiviteit van andere onderwijsniveaus. Het bleef dus onduidelijk hoe het strategiegebruik, de adaptiviteit en de schattingsnauwkeurigheid verschillen tussen leerlingen van verschillende onderwijsniveaus. Deze openstaande vraag is relevant, aangezien eerder onderzoek van Siegler et al. (2011) reeds aantoonde dat de strategiekeuze significant samenhangt met het onderwijsniveau en met de nauwkeurigheid van de schattingen.

Het huidige onderzoek verkende deze kwestie verder door verschillende onderwijsniveaus te vergelijken, namelijk het vierde leerjaar, het zesde leerjaar en het vijfde middelbaar.

Deze keuze werd gebaseerd op de mogelijke expertises die deze leerlingen reeds hebben ontwikkeld met breuken. Het vierde leerjaar werd gekozen omdat leerlingen op dat moment voor het eerst in aanraking komen met breuken en deze op een getallenlijn leren te situeren (Gemeenschapsonderwijs, s.d.). In dit onderzoek werd op die manier geobserveerd hoe deze leerlingen in hun vroege leerfase de breukopgaven benaderden of welke beginnende strategieën ze daarbij hanteerden. Het zesde leerjaar werd gekozen omdat deze leerlingen al meer ervaring en vaardigheden hadden opgebouwd in het werken met breuken. Volgens de eindtermen werd van hen verwacht dat ze breuken konden gebruiken als een verhouding, konden noteren als kommagetallen en konden gelijknamig maken in functie van optelling, aftrekking en ordening (Gemeenschapsonderwijs, s.d.). Daarnaast gebruikte Hofmans (2022) in haar onderzoek eveneens het zesde leerjaar als doelgroep waardoor er beter kon worden vergeleken met de bevindingen die uit haar onderzoek naar boven kwamen. Ten slotte werden ook leerlingen uit het vijfde middelbaar opgenomen in het huidige onderzoek. Deze leerlingen beschikten normaliter over aanzienlijk meer ervaring door een bredere blootstelling aan

breuken in verschillende contexten. Daarnaast hadden zij, eveneens door ervaring, meer inzicht kunnen verwerven in getalstructuren en meer geautomatiseerde rekenvaardigheden kunnen ontwikkelen. Bovendien werden enkel leerlingen geselecteerd uit studierichtingen binnen de doorstroomfinaliteit. Hierbij varieerde de wiskundige inhoud per studierichting, maar werd er over het algemeen verwacht dat deze leerlingen over een redelijke wiskundige basis en redeneervaardigheden beschikten.

Door deze drie onderwijsniveaus te vergelijken werd met dit onderzoek nagaan welke verschillen er bestaan in het strategiegebruik bij het schatten van breuken op een getallenlijn. De onderzoeksopzet van de huidige studie werd gebaseerd op die van Hofmans (2022). Er werd, net zoals in haar onderzoek, gebruikgemaakt van de NP-variant van de NLE-taak, waarbij leerlingen verschillende breuken op een getallenlijn van 0 tot 1 moesten plaatsen. De criteria voor de selectie van deze breuken, evenals een opsomming van de specifieke breuken, worden verder toegelicht in sectie 3.3. De nauwkeurigheid van de schattingen van de leerlingen werd ook berekend door middel van de Percentage of Absolute Error (PAE). Aan de hand van deze taak en de uiteindelijk bekomen PAE-waarden werd onderzocht welke strategieën leerlingen hanteerden, hoe accuraat en hoe flexibel deze werden toegepast, en in welke mate die samenhangen met leerling- of itemkenmerken. Er werd gekeken naar de algemene schattingsfout bij het positioneren van breuken op een getallenlijn en naar de verschillen in strategiegebruik en nauwkeurigheid tussen leerlingen uit verschillende onderwijsniveaus. Daarnaast werd onderzocht of er verschillen optraden in de nauwkeurigheid van de schattingen op leerling- en itemniveau. Ook de relatie tussen de strategiediversiteit van een leerling en diens onderwijsniveau werd geanalyseerd in relatie tot de schattingsnauwkeurigheid. Tot slot werd nagegaan of bepaalde itemkenmerken specifieke strategieën uitlokten en of dit leidde tot een grotere nauwkeurigheid in de schatting. Zo werd het adaptief strategiegebruik van leerlingen uit verschillende onderwijsniveaus in kaart gebracht worden.

3 METHODE

Dit onderzoek werd goedgekeurd door de Sociaal-Maatschappelijke Ethische Commissie (SMEC) van de Katholieke Universiteit Leuven [G-2021-3036-R2(AMD)]. De methodologie werd grotendeels gebaseerd op het onderzoek van Hofmans (2022). Het opzet en de uitvoering van deze methode werden uitgeschreven en uitgevoerd in samenwerking met Marie Meuris. De methode bleef identiek in beide onderzoeken, maar het onderzoek werd uitgevoerd bij verschillende onderwijsniveaus.

3.1 Deelnemers

Voor dit onderzoek werden leerlingen uit drie verschillende onderwijsniveaus geselecteerd, namelijk het vierde leerjaar, het zesde leerjaar en het vijfde middelbaar. De totale steekproef bestond uit 200 leerlingen, waarvan 69 leerlingen uit het vierde leerjaar, 60 leerlingen uit het zesde leerjaar en 71 leerlingen uit het vijfde middelbaar. In totaal namen drie basisscholen en drie middelbare scholen deel aan het onderzoek, verspreid over de provincies Limburg en Vlaams-Brabant. Vanuit het lager onderwijs namen 78 leerlingen deel uit basisschool A in Aarschot, waarvan 42 uit het vierde leerjaar en 36 uit het zesde leerjaar, 33 leerlingen uit basisschool B in Tongeren, waarvan 17 uit het vierde leerjaar en 16 uit het zesde leerjaar, en 18 leerlingen uit basisschool C in Heers, waarvan 10 uit het vierde leerjaar en 8 uit het zesde leerjaar. Wat betreft het secundair onderwijs, namen 37 leerlingen deel uit middelbare school A in Aarschot, 19 leerlingen uit middelbare school B in Tongeren en 15 leerlingen uit middelbare school C in Diest. Deze leerlingen volgden allemaal een richting binnen de doorstroomfinaliteit.

Hoewel er leerlingen uit drie onderwijsniveaus deelnamen, vergeleek dit specifieke onderzoek het zesde leerjaar met het vijfde middelbaar. De gegevens van de leerlingen uit het vierde leerjaar werden afzonderlijk vergeleken met het zesde leerjaar in een gelijktijdig uitgevoerd onderzoek door Marie Meuris.

Nadat de scholen akkoord waren gegaan om deel te nemen aan het onderzoek, werd aan de ouders van de leerlingen uit de basisscholen gevraagd om een geïnformeerde toestemming (zie Bijlage A: Geïnformeerde toestemming) te ondertekenen. De leerlingen uit het vijfde middelbaar ondertekenden dit document zelf indien ze wilden deelnemen. Het doel en de opzet van het onderzoek werden hierin gekaderd en daarnaast werd aangegeven welke categorieën van persoonsgegevens verwerkt zouden worden, zoals naam, leeftijd en audio-opname. Verder werd benadrukt dat alle verzamelde gegevens geanonimiseerd zouden worden.

3.2 Meetinstrument: Number Line Estimation (NLE)-taak

In dit onderzoek werd, net zoals in het onderzoek van Hofmans (2022), gebruikgemaakt van de 'Number-to-Position' (NP)-variant van de Number Line Estimation (NLE)-taak. In totaal kregen alle leerlingen veertien getallenlijntaken aangeboden, elk in een volledig willekeurige volgorde. Deze taken werden één voor één gepresenteerd op aparte A4-bladen aan de leerling. In het midden van elk blad stond een begrensde horizontale getallenlijn van 200 mm weergegeven. Enkel het begin- en eindpunt waren aangeduid met '0' en '1'. Links bovenaan het blad werd steeds een andere breuk getoond. Een voorbeeld van een desbetreffende getallenlijntaak is te vinden in Bijlage B: Voorbeeld schattingstaak

3.3 Itemset

De itemset van dit onderzoek werd gebaseerd op die van het onderzoek van Hofmans (2022). Hofmans (2022) creëerde breuken op basis van bepaalde wiskundige eigenschappen die leerlingen mogelijk konden aanzetten om specifieke strategieën te gebruiken. Deze strategieën bestaan uit 'benchmarken', 'eenmaal segmenteren', 'getrapt segmenteren' en 'geen strategie'. Een verdere toelichting van deze strategieën wordt gegeven in de volgende sectie (zie sectie 3.6.2). Op basis van Hofmans' itemset (2022) werden in dit onderzoek een aantal breuken geselecteerd en aanvullend werden ook nieuwe breuken opgesteld, aan de hand van haar bevindingen.

Zoals vermeld in sectie 2.5.1, maakte Hofmans (2022) bij het creëren van haar itemset een onderscheid op basis van de noemer van de breuk. Daarnaast werden vereenvoudigbare breuken vermeden. Breuken waarvan de decimale waarde vaak gekend is en noemers die veelvouden van tien zijn, werden eveneens uitgesloten. Deze wiskundige eigenschappen werden ook meegenomen in dit onderzoek bij het bepalen van de items. Naast deze eigenschappen werd de keuze van de items in dit onderzoek verder gebaseerd op de resultaten van het onderzoek van Hofmans (2022). Alle items beoogden een bepaalde strategie uit te lokken. De items waarbij de resultaten uitwezen dat de beoogde strategie het vaakst werd toegepast en waarbij dit tot een nauwkeurige schatting leidde, werden geselecteerd.

Om de strategie 'benchmarken' uit te lokken, werd gekozen voor items die dicht bij de benchmarks 0; 0,25; 0,5; 0,75 en 1 liggen. In dit onderzoek werd, anders dan bij Hofmans (2022), per benchmark systematisch een breuk geselecteerd met zowel een grote noemer als een kleine noemer. Zo werd bijvoorbeeld voor benchmark '1' gekozen voor de breuken $\frac{93}{94}$ (met een grote noemer) en $\frac{10}{11}$ (met een kleinere noemer). Dit was een bewuste keuze in het onderzoeksdesign, bedoeld om subtiele verschillen in positioneringsgedrag uit te lokken. Omdat de breuk met de kleinere noemer verder van de benchmark lag (vb. $\frac{10}{11}$ ligt verder van 1 dan $\frac{93}{94}$), werd verwacht dat de leerling meer zou moeten compenseren om tot een nauwkeurige schatting te komen. Om continuïteit te waarborgen bij het samenstellen van deze

itemset, werd telkens een breuk geselecteerd die precies op de benchmark lag, waarna één eenheid werd opgeteld of afgetrokken van de noemer. De keuze om de noemer aan te passen werd gemaakt omdat aanpassingen aan de teller bij kleinere breuken vaker leidden tot vereenvoudigbare breuken.

De breuken $4/65$ en $51/53$, die Hofmans (2022) gebruikte om 'benchmarken' bij 0 en 1 uit te lokken, bleken deze strategie niet voldoende uit te lokken. Uit de resultaten van haar exploratieve studie bleek dat leerlingen eerder kozen voor 'geen strategie' dan voor 'benchmarken'. Deze items werden daarom niet overgenomen in dit onderzoek. Er werd gekozen voor items die nog dicht bij 0 en 1 lagen, om deze strategie maximaal te trachten uit te lokken. De geselecteerde items waren $93/94$, $10/11$, $2/81$ en $1/13$.

Met de items $3/11$ en $15/61$ probeerde Hofmans (2022) 'benchmarken' dichtbij 0,25 uit te lokken. Bij het schatten van de breuk $3/11$ was 'segmenteren' populairder en even nauwkeurig als 'benchmarken'. In dit onderzoek werd daarom gekozen voor een breuk met een grotere noemer die dicht bij de benchmark lag, namelijk $6/25$. De PAE bij de breuk $15/61$ was lager bij 'benchmarken' dan bij de andere strategieën. Deze breuk werd om deze reden wel overgenomen in dit onderzoek. De breuk werd aangepast naar $15/59$, aangezien bij één van deze twee breuken één eenheid moest worden afgetrokken van de noemer.

Om 'benchmarken' dichtbij 0,5 te stimuleren, koos Hofmans (2022) voor de breuk $29/63$. Hoewel deze breuk 'benchmarken' wel degelijk bleek uit te lokken, werd er in dit onderzoek gekozen voor items die dicht bij 0,5 lagen, namelijk $8/17$ en $40/79$.

De breuken $9/13$ en $45/58$ werden in het onderzoek van Hofmans (2022) ingezet om het gebruik van 'benchmarken' dichtbij 0,75 te stimuleren. Aangezien de breuk $9/13$ een erg moeilijke breuk bleek te zijn om te schatten, werd deze in dit onderzoek niet overgenomen. Om deze strategie uit te lokken, werden ter vervanging breuken gekozen die dicht bij de benchmark 0,75 lagen, namelijk $15/19$ en $36/49$.

De strategie 'eenmaal segmenteren' probeerde Hofmans (2022) uit te lokken aan de hand van breuken met als noemer een klein priemgetal, namelijk $2/11$, $1/3$, $3/5$ en $4/7$. In dit onderzoek werden de items $2/11$ en $4/7$ behouden. Bij deze items werd de strategie 'segmenteren' het vaakst waargenomen en leidde dit tot de meest nauwkeurige schatting.

Om 'getrapt segmenteren' te stimuleren, werd in het onderzoek van Hofmans (2022) gekozen voor breuken met een kleine noemer die op verschillende manieren opgedeeld konden worden, namelijk $5/6$, $3/14$, $2/9$, $5/12$ en $8/15$. In dit onderzoek werden de breuken $2/9$ en $5/12$ behouden. Hoewel 'benchmarken' de meest populaire strategie bleek te zijn om de breuk $5/12$ te schatten, bleek 'getrapt segmenteren' aanzienlijk nauwkeuriger te zijn. Voor de breuk $2/9$ was 'segmenteren' de populairste strategie, terwijl 'getrapt segmenteren' ook hier het meest nauwkeurige was.

Uit de exploratieve studie van Hofmans (2022) bleek dat het toepassen van strategieën leidde tot een grotere nauwkeurigheid dan het niet toepassen ervan. In dit onderzoek werden er daarom geen items geselecteerd die ‘geen strategie’ zouden uitlokken, aangezien het doel is om de meest precieze schattingen te verkrijgen.

3.4 Procedure

Vooraleer de schattingstaken werden afgenomen, werd een pilotstudie uitgevoerd bij drie leerlingen per onderwijsniveau. Hierdoor konden de duur, haalbaarheid en uitvoerbaarheid van het onderzoek worden ingeschat. Daarnaast konden zo eventuele knelpunten in de opstelling van het codeerschema, de itemset en/of procedure worden herkend en indien nodig worden aangepast. Uit de pilotstudie bleek dat de voorziene afnameduur van twintig minuten per leerling slechts met moeite te realiseren was. Om een realistische planning op te stellen, werd er een tijdsduur van 25 minuten per leerling voorzien. Opvallend was dat leerlingen bij kleinere breuken, zoals $\frac{4}{7}$, niet altijd streepjes op de getallenlijn trokken, maar deze opdeelden door met hun vinger of met hun potlood de delen aan te wijzen. Er werd besloten dit ook als ‘eenmaal segmenteren’ te categoriseren, aangezien tijdens de afname duidelijk werd dat de leerling de getallenlijn effectief in delen verdeelde. Verder waren er geen aanpassingen nodig aan de onderzoeksopzet en kon de volledige dataverzameling van start gaan.

Bij de start van de afnames, werd aan de betrokken leerkracht gevraagd om een rustige omgeving te voorzien waar de schattingstaken konden worden afgenomen. De leerlingen, waarvan de ouders het geïnformeerde toestemmingsformulier hadden getekend, werden één voor één uit de klas gehaald. Volgens het vooraf opgestelde protocol (zie Bijlage C: Protocol ‘Inleiding meetmoment’), werd uitgelegd aan de leerling wat er van hem of haar werd verwacht. De leerling werd gevraagd om de aangeboden breuken op de getallenlijn te plaatsen, op zo’n nauwkeurig mogelijke wijze, zonder gebruik te maken van een liniaal. Daarnaast werd hij of zij aangespoord om hardop te denken tijdens het uitvoeren van de taak, volgens het Think-Aloud Protocol (TAP). In dit onderzoek betekende dit dat de leerling zijn of haar gedachtenproces luidop verwoordde, zodat de onderzoeker inzicht kreeg in zijn of haar redenering achter de gemaakte schattingen (Baxter et al., 2015). Indien dit niet spontaan gebeurde, werden er neutrale vragen gesteld, zoals “Kan je me uitleggen hoe je tot deze oplossing bent gekomen?” of “Hoe kom je hierbij?” om hen aan te moedigen.

Tijdens de afnames van de getallenlijntaken werd het vooraf opgestelde codeerschema (zie Bijlage D: Voorbeeld codeerschema) onmiddellijk ingevuld door de onderzoeker. Indien zeven of meer items van een leerling als ‘rest’ werden gecodeerd, werd de afname vroegtijdig afgebroken. Deze leerlingen werden namelijk niet meegenomen in het verdere onderzoek. Aan de hand van een spraakrecorder werden de gesprekken opgenomen. Deze opnames werden bewaard zodat ze later geraadpleegd konden worden bij het coderen van de

strategieën. Er zijn echter enkele opnames van het vijfde middelbaar verloren gegaan, maar dit gebeurde pas na het coderen, waardoor de gegevens nog steeds bruikbaar bleven voor het onderzoek.

3.5 Schattingsnauwkeurigheid (Percentage of Absolute Error; PAE)

De nauwkeurigheid van de schattingen van de leerlingen werd naderhand berekend op dezelfde wijze als in het onderzoek van Hofmans (2022), namelijk aan de hand van de Percentage of Absolute Error (PAE). Deze maat werd bovendien veelvuldig gehanteerd in vergelijkbaar onderzoek naar schattingsvaardigheden (zie sectie 2.4). De schattingsfout werd berekend door het verschil tussen de geschatte en werkelijke waarde als een percentage uit te drukken. Dit getal gaf aan hoe ver de schatting van de leerling afwijkt van de werkelijke waarde; hoe hoger de PAE-score, hoe groter de afwijking.

Ter illustratie, stel dat een leerling de breuk 36/49 op een getallenlijn moest plaatsen. De correcte positie op de getallenlijn bedroeg 146,94 mm. Als deze leerling de breuk plaatste op 133 mm, werd de PAE-score als volgt berekend:

$$PAE = \frac{|133 - 146,94|}{200} \times 100 = 6,97$$

3.6 Codeersysteem van de strategieën

Het codeersysteem van de strategieën werd gebaseerd op het codeerschema van het voorafgaand onderzoek van Hofmans naar het strategiegebruik van zesdeklassers bij het schatten van breuken op een getallenlijn (2022). In dit systeem kreeg elk item eerst een algemene beoordeling, waarna de toegepaste strategie per stap wordt geanalyseerd.

Het oorspronkelijke codeerschema werd in dit onderzoek overgenomen, mits enkele inhoudelijke aanpassingen. De specifieke wijzigingen worden per onderdeel verder toegelicht.

3.6.1 Algemene beoordeling trial

Bij de afname van elk item werd eerst een algemene beoordeling toegekend, namelijk 'correct', 'inaccuraat' of 'rest'.

Een trial werd als 'correct' gecategoriseerd wanneer de leerling bij het plaatsen van het item op de getallenlijn een correct begrip vertoonde van het concept 'breuk' en hierbij geen reken- en/of denkfouten maakte.

Een trial werd als 'inaccuraat' beoordeeld indien de leerling bij het plaatsen van het item op de getallenlijn bepaalde nauwkeurigheidsfouten maakte, die niet wijzen op een fundamenteel gebrek aan begrip van breuken. Dit had betrekking op rekenfouten of fouten bij de verdeling van de getallenlijn. Bijvoorbeeld, bij de breuk 4/7 wilde de leerling de getallenlijn opdelen in zeven delen, maar hij trok zeven strepen. Hierdoor werd de getallenlijn opgedeeld in acht segmenten in plaats van zeven.

Een trial werd als ‘rest’ gecategoriseerd wanneer de leerling geen rekening leek te houden met de relatie tussen de teller en de noemer bij het plaatsen van de breuk op de getallenlijn. Bijvoorbeeld, een leerling verdeelde eerst de getallenlijn in vier gelijke delen om vervolgens de breuk $6/25$ boven de markering van het eerste segment te plaatsen, omdat hij deze breuk interpreteerde als 25% van de gehele getallenlijn. Daarnaast vielen ook wiskundige handelingen die te onduidelijk waren om correct te interpreteren onder de ‘rest’categorie.

Het verschil tussen de algemene beoordeling ‘inaccuraat’ en ‘rest’ lag dus in het onderliggend begrip van breuken. Bij ‘inaccuraat’ toonde de leerling wel degelijk inzicht in het concept van een breuk, maar werden er fouten gemaakt in de verdere verwerking. Bij de ‘rest’categorie werd daarentegen geen rekening gehouden met de relatie tussen de teller en noemer.

Er werd voor de verdere analyses in dit onderzoek uitsluitend gewerkt met de trials met algemene beoordeling ‘correct’ en ‘inaccuraat’. Dit omvatte de trials waarbij de leerling zichtbaar beschikte over een correct begrip van het concept ‘breuken’, ongeacht of er fouten zijn gemaakt in de uitvoering. Trials die werden ingedeeld in de ‘rest’categorie werden niet meegenomen in de analyses. Deze trials wezen op een beperkt begrip van breuken of bevatten handelingen die te onduidelijk waren om betrouwbaar te scoren.

3.6.2 Beoordeling van de strategie

Het codeersysteem dat werd opgesteld door Hofmans (2022) bestond uit drie opeenvolgende stappen: ‘encoderen’, ‘positioneren’ en ‘finaliseren’ (zie Tabel 1). Bij het beoordelen van elke stap werd uitsluitend gecodeerd wat de leerling expliciet vermeldde of wat duidelijk kon worden afgeleid uit zijn of haar notities. Het is echter mogelijk dat de leerling verdere denkstappen maakte die niet geëxpliciteerd werden tijdens het interview, waardoor deze niet werden meegenomen in de codering.

Tabel 1

Codeersysteem

Encoderen	Positioneren	Finaliseren
Niets	Geen strategie	Niets
Bij benadering:	Eenmaal segmenteren	Compenseren
Naar decimaal getal	Getrapt segmenteren	Corrigeren
Naar breuk	Benchmarken	

De eerste stap, ‘encoderen’, wees op het eventueel transformeren van een breuk. Hierbij kon het gegeven item worden omgezet bij benadering naar een kommagetal of een andere breuk, zoals $40/79 \approx 0,5$ of $15/19 \approx 3/4$. Er werd dus in de daaropvolgende stappen niet verder gewerkt met de exacte waarde van de breuk, maar met een schatting.

Er werd besloten om, in tegenstelling tot het oorspronkelijk codeerschema van Hofmans (2022), de optie voor 'exacte transformatie naar een breuk' of 'naar een kommagetal' weg te laten. Deze beslissing werd genomen omdat in de itemset voornamelijk werd gekozen voor onvereenvoudigbare breuken. Het omzetten van deze breuken naar het exacte kommagetal zou resulteren in een oneindig of herhalend aantal decimalen. Dit is moeilijk uit het hoofd te berekenen en de precieze positie op de getallenlijn kan onmogelijk bepaald worden met de beschikbare middelen binnen onze taak. Een exacte transformatie naar een andere breuk is ook niet zinvol, omdat de gekozen items hierdoor zouden resulteren in complexere en minder bruikbare representaties. Daarom werd enkel 'transformatie bij benadering' behouden, zodat de breuk op de getallenlijn kon worden geplaatst zonder onrealistische eisen te stellen aan de nauwkeurigheid.

Het was echter niet noodzakelijk om de breuk bij benadering te transformeren. Het was ook mogelijk om de oorspronkelijke breuk ongewijzigd te laten en hiermee verder te werken. Dit werd gecodeerd als 'niets'.

Na de eventuele transformatie van het item volgde de plaatsing op de getallenlijn binnen de tweede stap 'positioneren'. Een leerling kon dit op verschillende manieren trachten te doen, onderverdeeld in verschillende strategieën: 'eenmaal segmenteren', 'getrapt segmenteren' of 'benchmarken'. Een leerling kon ook een item plaatsen zonder een specifieke strategie te hanteren. Hij maakte dan een schatting zonder denkbeeldige of fysieke hulplijnen te gebruiken. In dit geval werd de aanpak gecodeerd als 'geen strategie'.

Bij de strategie 'eenmaal segmenteren', ook wel 'segmenteren' genoemd door Hofmans (2022), verdeelde de leerling de getallenlijn in gelijke delen of segmenten op basis van de noemer van de breuk. Ter illustratie, de leerling splitste de getallenlijn bij het item $\frac{2}{11}$ in elf delen op. Daarna werd de breuk gepositioneerd op de positie die overeenkwam met de waarde van de teller. Dat was in dit geval bij de tweede markering vanaf het nulpunt. Binnen deze strategie bepaalde de noemer dus de verdeling van de getallenlijn, terwijl de teller aangaf bij welk segment de breuk wordt geplaatst.

Indien de leerling in meerdere stappen na elkaar de getallenlijn segmenteerde, werd dit gecodeerd als 'getrapt segmenteren'. Bij deze strategie verdeelde de leerling de getallenlijn in een bepaald aantal segmenten, waarna hij elk segment opnieuw in gelijke delen opsplijste. Bijvoorbeeld, bij het item $\frac{5}{12}$ werd de getallenlijn eerst in drie segmenten verdeeld om vervolgens elk segment nogmaals op te delen in vier stukken.

Bij 'benchmarken' maakte de leerling gebruik van referentiepunten op de getallenlijn. Hierbij werd de getallenlijn één of meerdere keren gehalveerd, bijvoorbeeld in helften, kwarten of achtsten of werd het begin- of eindpunt gebruikt als referentiepunt. Dit is anders dan in het onderzoek van Hofmans (2022), waarin het gebruik van het begin- of eindpunt als benchmark werd gecodeerd als 'geen strategie'. De leerling werkte bij deze strategie met gekende breuken, waaraan hij wellicht ook de decimale waarden kan koppelen. Een andere mogelijkheid bij 'benchmarken' was het opdelen van de getallenlijn aan de hand van natuurlijke

getallen. Hierbij werd een natuurlijk getal gekoppeld aan een referentiepunt op de getallenlijn. Bijvoorbeeld, bij de breuk $\frac{5}{12}$ halveerde de leerling eerst de getallenlijn en markeerde dit midden als referentiepunt met de waarde zes. Vervolgens kon hij de twee gecreëerde segmenten opnieuw halveren en op deze referentiepunten '3' noteren. Er werd hierbij nog steeds gebruikgemaakt van benchmarks maar de natuurlijke getallen fungeerden als ankerpunten voor de verdere positionering van de breuk.

'Benchmarks' viel te onderscheiden van 'eenmaal segmenteren' in de manier waarop de getallenlijn werd verdeeld. Bij 'benchmarks' zijn de benchmarks hetzelfde over alle items heen, namelijk 0; 0,25; 0,5; 0,75 en 1, terwijl bij 'eenmaal segmenteren' de indeling van de getallenlijn afhangt van de breuk. Bijvoorbeeld, bij het item $\frac{4}{7}$, kon de leerling gebruikmaken van 0,5 als benchmark omdat hij de waarde van de breuk iets meer dan de helft schatte. De leerling vergeleek hier de breuk met een gekend referentiepunt op de getallenlijn. Bij 'eenmaal segmenteren' daarentegen zou hij de getallenlijn opdelen in zeven gelijke delen op basis van de noemer. Daarna zou hij vier segmenten tellen vanaf het begin van de getallenlijn om de breuk te positioneren. Leerlingen zijn ook eerder bekend met de decimale waarden van de gehanteerde referentiepunten bij 'benchmarks' terwijl bij 'eenmaal segmenteren' voornamelijk gebruik wordt gemaakt van de breukwaarden, zonder hierbij rekening te houden met de decimale equivalenten.

Overigens werd bij 'eenmaal segmenteren' steeds van links naar rechts gewerkt, terwijl bij benchmarks de getallenlijn eerst gehalveerd werd en elk segment vervolgens verder kon worden gehalveerd.

De leerling kon ook meerdere strategieën combineren bij de positionering van één item. Ter illustratie, hij kon eerst de getallenlijn halveren met behulp van benchmarks om daarna elk deel in segmenten op te delen. Dit kon ook in omgekeerde volgorde voorkomen. Wanneer deze combinatie van 'benchmarks' en 'eenmaal segmenteren' voorkwam, werd dit gecodeerd als 'getrapt segmenteren'.

Bij de derde en laatste stap 'finaliseren' kon de plaatsing van het item verder verfijnd worden. Binnen deze stap kon de leerling drie mogelijke acties ondernemen: 'niets', 'compenseren' of 'corrigeren'.

'Niets' betekende dat de breuk zonder verdere aanpassingen op de getallenlijn werd geplaatst.

'Compenseren' hield in dat de positie van het item werd aangepast om een gemaakte schattingsfout die eigen is aan de gehanteerde strategie te compenseren. Het kan gecombineerd worden met de strategieën 'benchmarks' en 'segmenteren'. Ter illustratie, de leerling gebruikte 0,25 als benchmark voor het plaatsen van de breuk $\frac{6}{25}$. De decimale waarde van $\frac{6}{25}$ (0,24) ligt echter lager dan 0,25, waardoor hij de breuk iets onder het referentiepunt schatte. Hij compenseerde dus voor het verschil in waarde.

Een andere mogelijkheid was 'corrigeren', eveneens te combineren met zowel 'benchmarks' als 'segmenteren'. Hierbij paste de leerling de positie van het item aan na een

onnauwkeurige verdeling van de getallenlijn. Bijvoorbeeld, als de getallenlijn in ongelijke stukken was verdeeld of het aantal gecreëerde segmenten niet correct was, werd er een correctie gemaakt door het item te positioneren boven of onder het referentiepunt van een segment.

3.6.3 Interbeoordelaarsbetrouwbaarheid

Door middel van de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid (IBB) werd de betrouwbaarheid van het gehanteerde codeersysteem nagegaan. Na het verzamelen van de data werd tien procent van het totaal aantal participanten per onderwijsniveau, die eerder gecodeerd werden door één van de onderzoekers, opnieuw gecodeerd door de medeonderzoeker. Hieruit volgde dat zowel voor het vierde leerjaar als voor het vijfde middelbaar zeven participanten opnieuw werden gecodeerd, waarvan drie door de ene onderzoeker en vier door de andere. Voor het zesde leerjaar ging het om zes participanten, waarvan drie door elke onderzoeker opnieuw werden gecodeerd. Dit werd gedaan aan de hand van de verzamelde audiobestanden en notities. Voor dit te berekenen werd er gebruikgemaakt van de Cohen's kappa, een maat die corrigeert voor toevallige overeenkomsten. Er werd vooraf vastgelegd, volgens de classificatie van Landis en Koch (1977), dat de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid minstens 0,81 moest bedragen om het uitgewerkte codeersysteem als betrouwbaar te beschouwen. Deze analyse werd uitgevoerd voor de algemene beoordeling van de trials en voor de drie afzonderlijke stappen 'encoderen', 'positioneren' en 'finaliseren'. Voor de algemene beoordeling werd er een kappa van 0,94 gevonden, $\kappa = 0,941$; $p < 0,001$. Voor de stap 'encoderen' werd een waarde van 0,99 gevonden, $\kappa = 0,992$; $p < 0,001$, net zoals voor 'positioneren', $\kappa = 0,990$; $p < 0,001$. Voor de stap 'finaliseren' werd een kappa van 0,94 vastgesteld, $\kappa = 0,936$; $p < 0,001$. Na het interpreteren van de resultaten aan de hand van de vooropgestelde voorwaarde, werd er besloten dat het gehanteerde codeerschema op een betrouwbare manier werd toegepast. Er was namelijk sprake van een zeer hoge mate van overeenstemming tussen de beoordelaars.

3.7 Statistische analyse

In dit onderzoek werden verschillende variabelen met elkaar vergeleken. Afhankelijk van de aard van de data, zoals de verdeling en de onderlinge afhankelijkheid, werden analyses in SPSS uitgevoerd zoals beschrijvende statistiek, Generalized Estimating Equations (GEE) en niet-parametrische toetsen. Hieronder worden deze methoden verder toegelicht.

3.7.1 Centrummaat

De mediaan van de Percentage of Absolute Error (PAE) werd berekend op verschillende niveaus, waaronder per breuk, per leerling of per onderwijsniveau. Deze waarde wordt gedefinieerd als een "maat voor de centrale tendentie van een verdeling, vertegenwoordigd door de score die het bovenste deel van de scores in een verdeling scheidt

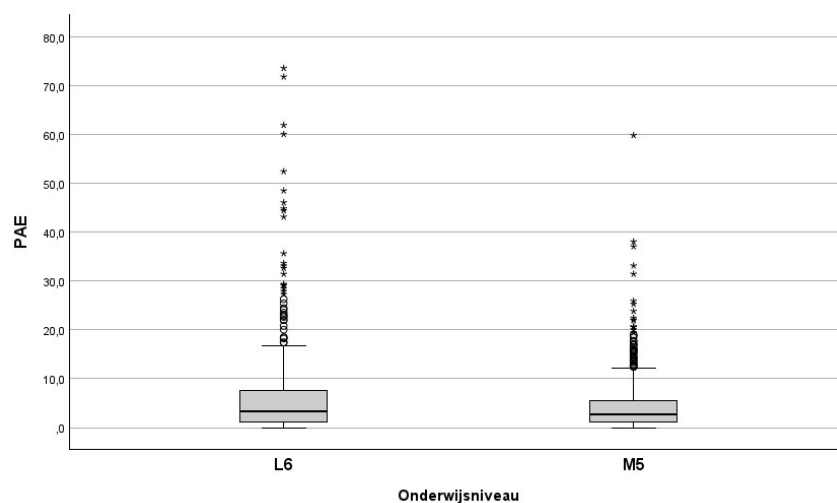
van het onderste” (Zimbardo et al., 2005, p.558). Met andere woorden, ze vormt het midden van de verdeling.

Vanwege de aanwezigheid van meerdere uitschieters in de dataset werd er gekozen voor deze centrummaat. In vergelijking met de modus of het gemiddelde is de mediaan namelijk minder gevoelig voor extreme waarden (Zimbardo et al., 2005). De uitschieters worden geïllustreerd in Figuur 3, waarin een boxplot de spreiding van de PAE-waarden per onderwijsniveau weergeeft. Het gebruik van de mediaan voorkwam dat dergelijke extreme waarden een disproportionele impact hebben op de verdere analyses. Hierdoor konden de schattingsfouten betrouwbaar vergeleken worden tussen breuken, leerlingen en onderwijsniveaus. De dikkere zwarte lijn in de boxplot geeft bovendien de mediaan weer van de PAE-waarden binnen elk onderwijsniveau. In deze visuele weergave is er echter nog geen rekening gehouden met de afhankelijkheid tussen de trials afkomstig van eenzelfde leerling

Naast de mediaan werd ook de standaarddeviatie (SD) bepaald, die de spreiding weergeeft van de schattingsfouten.

Figuur 3

Boxplot van de PAE-waarden per onderwijsniveau met uitschieters



De PAE werd bij de analyses niet rechtstreeks per onderwijsniveau berekend op basis van alle individuele trials. Er werd eerst per leerling de mediaan PAE gecalculeerd. Daarna werd er per onderwijsniveau de mediaan van al deze individuele medianen bepaald. Hierdoor werd er tegemoetgekomen aan de afhankelijkheid van de metingen binnen één leerling.

Deze berekening werd consequent toegepast in alle analyses waarin een bepaalde aanpak of strategie werd vergeleken tussen onderwijsniveaus, zoals binnen de stappen 'encoderen', 'positioneren' en 'finaliseren'. Er werd op deze manier ook vermeden dat leerlingen met meer trials een grotere invloed zouden uitoefenen op de resultaten.

3.7.2 Generalized Estimating Equations

Om de verschillen in algemene beoordelingen ('correct', 'inaccuraat' en 'rest') tussen leerlingen uit het zesde leerjaar en vijfde middelbaar te analyseren, werd in SPSS een Generalized Estimating Equations (GEE) model uitgevoerd (zie sectie 4.1.2). Aangezien elke leerling tot veertien breuken oploste en de trials binnen eenzelfde leerling onderling afhankelijk van elkaar waren, was dit model geschikt. Het corrigeerde namelijk de clustering van trials binnen leerlingen.

Binnen het model diende de algemene beoordeling als de afhankelijke variabele, met het onderwijsniveau als predictor. De GEE-analyse is geschikt voor categorische uitkomstvariabelen, wat aansloot bij de verschillende categorieën van de algemene beoordeling ('correct', 'inaccuraat' en 'rest') (Nahhas, 2025). Omdat GEE uitsluitend werkt met binaire uitkomsten in SPSS (Nahhas, 2025), werd er voor elke analyse een binaire variabele gecreëerd. Bijvoorbeeld, 'correct' versus 'niet correct', waarbij de algemene beoordelingen 'inaccuraat' en 'rest' werden samengenomen. Hierdoor konden er binnen één enkel model geen rechtstreekse vergelijkingen gemaakt worden tussen alle drie categorieën. Daarom werd het model drie keer afzonderlijk uitgevoerd, telkens met een andere binaire indeling van de uitkomstvariabele.

Daarnaast doet dit model uitspraken op groepsniveau, wat aansloot bij het doel van deze analyse. Daarbij werd het zesde leerjaar gehanteerd als referentiegroep en het vijfde middelbaar als vergelijkingsgroep.

De resultaten werden gerapporteerd aan de hand van *odds* en *odds-ratio's*. De *odds* geven de verhouding weer tussen de kans dat een bepaalde algemene beoordeling optreedt (bv. 'correct') en de kans dat deze niet optreedt (bv. 'inaccuraat' of 'rest'). De *odds-ratio* geeft vervolgens aan hoeveel groter of kleiner de kans op een bepaalde uitkomst is voor de leerlingen uit het ene onderwijsniveau in vergelijking met leerlingen uit het andere (Nahhas, 2025).

3.7.3 Niet-parametrische toetsen

Het verschil in mediaan PAE tussen de leerlingen uit het zesde en vijfde middelbaar werd in SPSS geanalyseerd aan de hand van een Mann-Whitney U-test (zie sectie 4.2.2). Deze niet-parametrische test is geschikt voor het vergelijken van twee onafhankelijke groepen waarvan de data niet normaal zijn verdeeld. De Shapiro-Wilk-test toonde aan dat de verdeling van de schattingsfouten van beide onderwijsniveaus significant afweek van normaliteit, waardoor een onafhankelijke t-toets geen geschikte methode was (DATAtab Team, 2025c). Voor elke leerling werd daarnaast de mediaan PAE berekend, waardoor de afhankelijkheid tussen de trials van eenzelfde leerling werd geëlimineerd.

Binnen dit model werd er gebruik gemaakt van de rangorde van alle schattingsfouten samen. Hierdoor is de test minder gevoelig voor uitschieters (DATAtab Team, 2025b).

De mediaan PAE per leerling vormde de afhankelijke variabele. Het onderwijsniveau was de onafhankelijke variabele, binair gecodeerd ('1' = zesde leerjaar, '2' = vijfde middelbaar). De toets werd tweezijdig uitgevoerd met een significantieniveau van $\alpha = 0,05$.

Het verschil in mediaan PAE tussen de verschillende strategieën binnen elk onderwijsniveau werd in SPSS geanalyseerd aan de hand van een Kruskal-Wallis H-toets. Deze niet-parametrische toets is geschikt voor het vergelijken van drie of meer onafhankelijke groepen waarvan de normaliteitsassumptie is geschonden (DATAtab Team, 2025a). Uit de Shapiro-Wilk-test bleek dat de verdeling van de mediaan PAE per leerling binnen elke strategie significant afweek van de normaalverdeling.

De Kruskal-Wallis H-toets maakte eveneens gebruik van de rangorde van alle schattingsfouten en is hierdoor minder gevoelig voor uitschieters (DATAtab Team, 2025a). De mediaan PAE per leerling per strategie diende als afhankelijke variabele terwijl de strategie fungeerde als onafhankelijke variabele, gecategoriseerd in vier condities. De toets werd tweezijdig uitgevoerd met een significantieniveau van $\alpha = 0,05$.

De resultaten toonde significante verschillen aan, waardoor er post-hocanalyses werden uitgevoerd met een Mann-Whitney U-toets (DATAtab Team, 2025b). Hierbij werd onderzocht of de mediaan PAE bij een specifieke strategie significant verschilde van de mediaan PAE van 'geen strategie'. 'Geen strategie' vormde één van de vier strategieën binnen de initiële Kruskal-Wallis-toets, waardoor deze vergelijkingen het gevonden verschil verder verduidelijkten. Er werd een Bonferroni-correctie toegepast, om het risico op type I-fouten te verkleinen. Er werd dus een aangepast significantieniveau van $\alpha = 0,0167$ gehanteerd.

Eveneens werd nagegaan of de schattingsfout per strategie significant verschilde tussen beide onderwijsniveaus. Er werd voor elke strategie een Mann-Whitney U-toets uitgevoerd. Hiermee werd de mediaan PAE tussen beide onderwijsniveaus vergeleken. Zoals bevestigd door de Shapiro-Wilk-test was de data niet normaal verdeeld waardoor deze niet-parametrische test geschikt was voor deze vergelijking (DATAtab Team, 2025c).

De afhankelijke variabele in deze analyse was de mediaan PAE. De onafhankelijke variabele was het onderwijsniveau, binair gecodeerd ('1' = zesde leerjaar, '2' = vijfde middelbaar). De toets werd tweezijdig uitgevoerd per strategie met een significantieniveau van $\alpha = 0,05$.

Het verband tussen zowel het onderwijsniveau en de diversiteit in strategiegebruik als de diversiteit en de schattingsfout van de leerlingen werd onderzocht aan de hand van een Spearman's rho-correlatie. Deze niet-parametrische correlatiecoëfficiënt werd gekozen omdat de variabelen ordinaal geordend waren of niet voldeden aan de assumptie van normaliteit. Hierdoor waren andere toetsen niet van toepassing, zoals de Pearson's correlatiecoëfficiënt of parametrische toetsen (DATAtab Team, 2025d). De diversiteit vormde hier de ordinale variabele, met waarden van 1 tot 4, die bepaalden hoeveel strategieën de leerlingen gebruikte bij het oplossen van de itemset.

4 RESULTATEN

4.1 Databestand

De leerlingen uit het zesde leerjaar en het vijfde middelbaar kregen dezelfde itemset van veertien breuken aangeboden. De verzamelde gegevens werden vervolgens ingevoerd in Excel voor verdere analyses. In deze dataset vertegenwoordigde elke rij één trial. Een trial is een door de leerling opgeloste opgave, met andere woorden hun schatting van een breuk op de getallenlijn.

Voor elke trial werden meerdere variabelen geregistreerd per kolom, waaronder het subjectnummer, de school en het onderwijsniveau (zesde leerjaar of vijfde middelbaar). Voor de leerlingen uit het vijfde middelbaar werd bovendien ook hun studierichtingen genoteerd. In de tabellen van dit hoofdstuk worden de leerlingen uit het zesde leerjaar met de afkorting 'L6' aangeduid en die uit het vijfde middelbaar met 'M5'.

Daarnaast werden de betreffende breuk, het correcte antwoord (in mm), het antwoord van de leerling (in mm) en de schattingsfout, uitgedrukt als Percentage of Absolute Error (PAE), bepaald. De strategie die de leerling hanteerde bij het schatten van de breuk in kwestie werden genoteerd volgens het gehanteerde codeerschema. Dit betreft de algemene beoordeling ('correct', 'inaccuraat', 'rest'), het encoderen ('niets', 'transformatie bij benadering naar decimaal getal' of '-naar breuk'), het positioneren ('geen strategie', 'eenmaal segmenteren', 'getrapt segmenteren' of 'benchmarken') en het finaliseren ('niets', 'compenseren' of 'corrigeren').

4.1.1 Filtering van trials en algemene beoordeling

De dataset van het zesde leerjaar bevatte in totaal 840 trials, waarvan 465 trials (55,4%) vielen onder de algemene beoordeling 'correct', 159 trials (18,9%) onder 'inaccuraat' en 216 trials (25,7%) onder de beoordeling 'rest' (zie Tabel 2). De dataset van het vijfde middelbaar bevatte in totaal 994 trials, waarvan 861 trials (86,6%) werden gecategoriseerd onder de algemene beoordeling 'correct', 83 trials (8,4%) onder 'inaccuraat' en 50 trials (5,0%) onder 'rest' (zie Tabel 2).

Tabel 2*Aantal items per algemene beoordeling per onderwijsniveau*

Algemene beoordeling	Aantal trials L6 (%)	Aantal trials M5 (%)
<i>Correct</i>	465 (55,4%)	861 (86,6%)
<i>Inaccuraat</i>	159 (18,9%)	83 (8,4%)
<i>Rest</i>	216 (25,7%)	50 (5,0%)
<i>Totaal</i>	840 (100%)	994 (100%)
<i>Totaal zonder 'rest'</i>	612 (72,9%)	940 (94,6%)

Zoals eerder aangegeven, werden er enkel analyses uitgevoerd op de trials die zijn gecategoriseerd onder de algemene beoordeling 'correct' en 'inaccuraat', in lijn met het onderzoek van Hofmans (2022). Dit omvat de trials waarin de leerling kennelijk over een correct begrip van het concept breuken beschikte, ongeacht eventuele fouten in de verdere uitvoering. De algemene beoordeling 'rest' werd uitgesloten, aangezien deze trials wezen op een beperkt begrip van breuken bij de leerling of handelingen bevatten die te onduidelijk waren om betrouwbaar te kunnen coderen. Het includeren van deze trials zou de data kunnen vertekenen, aangezien ze geen accurate informatie geven over de gehanteerde strategieën en mogelijks leiden tot een grotere schattingsfout (PAE).

Bovendien werd er voorafgaand aan de dataverzameling besloten dat indien een leerling in zeven of meer trials de algemene beoordeling 'rest' kreeg, alle trials van deze leerling zouden worden weggelaten uit verdere analyses. Wanneer een groot deel van de trials, in dit geval 50% of meer, onder deze categorie viel, suggereerde dit namelijk dat de leerling de taak niet volledig had benaderd of uitgevoerd zoals bedoeld. Dit kon te wijten zijn aan verschillende factoren. Het is mogelijk dat de leerling moeite had met het begrijpen van het onderliggende concept van breuken of de taakinhoud. Daarnaast zou ook een gebrek aan motivatie of een beperkte betrokkenheid bij het uitvoeren van de taak een rol kunnen hebben gespeeld. Dit uitsluitingscriterium werd ingevoerd om de validiteit van de analyses te beschermen. Bijgevolg werden in totaal veertien leerlingen van het zesde leerjaar volledig uitgesloten van verdere analyses, namelijk 6.014; 6.015; 6.016; 6.017; 6.023; 6.026; 6.034; 6.037; 6.041; 6.044; 6.045; 6.049; 6.052; 6.055. Voor het vijfde middelbaar werd er slechts één leerling weggelaten uit de dataset, namelijk 5.066.

In totaal werden er 228 trials verwijderd van de dataset van het zesde leerjaar en 54 trials van de dataset van het vijfde middelbaar. Na deze correctie, bleven er nog 612 trials over van het zesde leerjaar, verspreid over 46 leerlingen, en 940 trials van het vijfde middelbaar, verspreid over 70 leerlingen (zie Tabel 2).

4.1.2 Verschillen in algemene beoordeling per onderwijsniveau

De verdeling van de algemene beoordelingen ('correct', 'inaccuraat' en 'rest') bleek opmerkelijk te verschillen tussen de leerlingen uit het zesde leerjaar en vijfde middelbaar (zie Tabel 2). Om deze discrepantie te onderzoeken, werden drie afzonderlijke Generalized Estimating Equations (GEE) uitgevoerd met het onderwijsniveau als voorspellende variabele.

Het grootste deel van alle trials, namelijk 72,3%, werd gecodeerd als 'correct'. Wanneer er per onderwijsniveau wordt gekeken, werden 55,4% van de trials uit het zesde leerjaar als 'correct' beoordeeld, tegenover 86,6% uit het vijfde middelbaar (zie Tabel 2).

De resultaten toonden een significant verschil aan tussen de twee onderwijsniveaus, *Wald* $\chi^2(1) = 38,84$; $p < 0,001$. Concreet hadden de leerlingen uit het vijfde middelbaar ruim vijf keer hogere *odds* op de algemene beoordeling 'correct' dan leerlingen uit het zesde leerjaar, $B = 1,65$; $SE = 0,27$; $Exp(B) = 5,22$; 95%-BI [3,11; 8,78].

De beoordeling 'inaccuraat' werd toegekend aan 13,2% van alle trials. In het zesde leerjaar ging het om 18,9% van alle trials, terwijl dit in het vijfde middelbaar slechts 8,4% betrof (zie Tabel 2). Ook hier werd een significant effect van onderwijsniveau vastgesteld, *Wald* $\chi^2(1) = 11,10$; $p < 0,001$. De leerlingen uit het vijfde middelbaar kregen aanzienlijk minder vaak de algemene beoordeling 'inaccuraat' dan de leerlingen uit het zesde leerjaar, $B = -0,94$; $SE = 0,28$; $Exp(B) = 0,39$; 95%-BI [0,22; 0,68]. De *odds* op de beoordeling 'inaccuraat' waren bij deze groep leerlingen 2,6 keer zo klein als bij de leerlingen uit het zesde leerjaar.

Een vergelijkbaar patroon werd vastgesteld voor de algemene beoordeling 'rest'. In totaal werden 14,5% van alle trials onder deze categorie gecodeerd. In het zesde leerjaar betrof dit 25,7% van de trials, terwijl slechts 5,0% van de trials van het vijfde middelbaar deze beoordeling kreeg (zie Tabel 2). Deze kloof was eveneens statistisch significant, *Wald* $\chi^2(1) = 21,25$; $p < 0,001$. De leerlingen uit het vijfde middelbaar hadden opmerkelijk lagere *odds* op de beoordeling 'rest', $B = -1,88$; $SE = 0,40$; $Exp(B) = 0,15$; 95%-BI [0,07; 0,34]. Concreet waren hun *odds* ruim zes keer zo klein als die van de leerlingen uit het zesde leerjaar.

Deze resultaten tonen aan dat de leerlingen uit het vijfde middelbaar significant vaker beschikten over een correct begrip van breuken, minder vaak conceptuele fouten maakten en minder rekenfouten vertoonden bij het plaatsen van de breuken op de getallenlijn.

4.2 Algemene schattingsfout

In deze paragraaf wordt de algemene schattingsfout (Percentage of Absolute Error; PAE) van de leerlingen uit het zesde leerjaar en het vijfde middelbaar onderzocht, zonder een onderscheid te maken tussen de strategieën die ze mogelijk gebruikten bij het plaatsen van de breuken op de getallenlijn.

De analyses worden op twee niveaus uitgevoerd. Eerst wordt de verdeling en spreiding van algemene schattingsfout per leerling binnen elk onderwijsniveau beschreven (zie sectie 4.2.1), waarna de variatie tussen leerlingen geïllustreerd wordt aan de hand van specifieke voorbeelden (zie sectie 4.2.1.1). Daarna wordt het verschil in schattingsfout tussen de twee onderwijsniveaus met elkaar vergeleken over items en leerlingen heen (zie sectie 4.2.2).

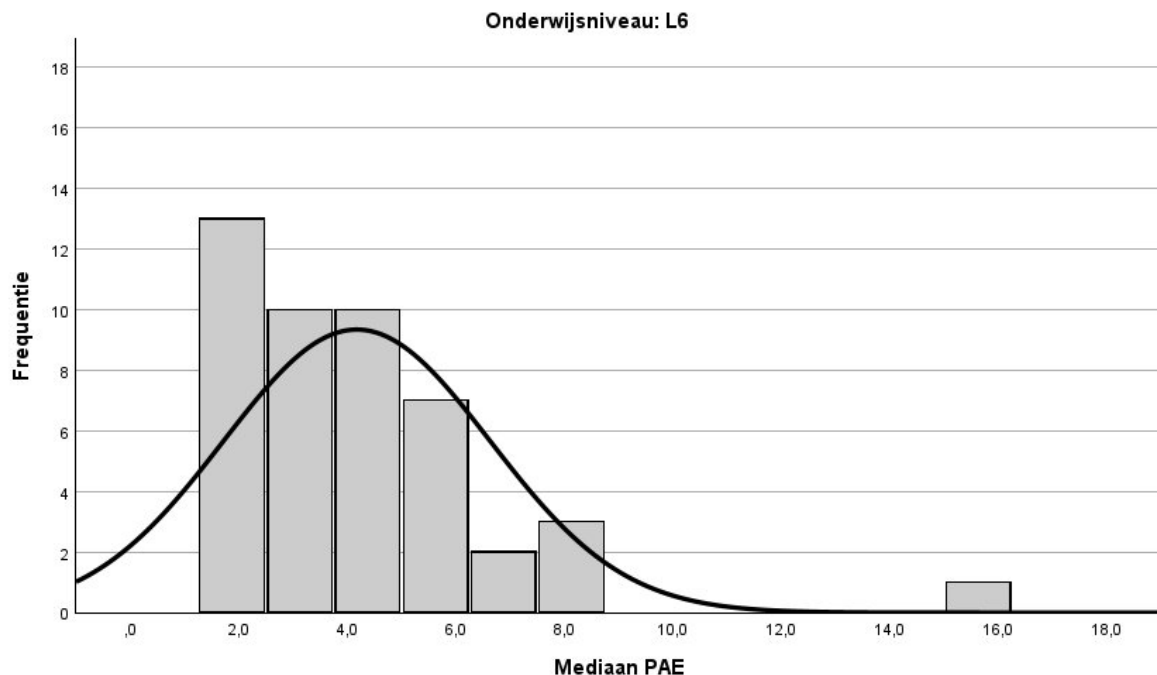
4.2.1 Algemene schattingsfout binnen onderwijsniveaus

De mediaan PAE werd voor elke leerling berekend op basis van zijn gemaakte trials. De verdeling van deze mediaanwaarden wordt weergegeven in Figuur 4 en Figuur 5, respectievelijk voor het zesde leerjaar (L6) en vijfde middelbaar (M5). Beide histogrammen gebruiken dezelfde schaalverdeling, zodat ze gemakkelijk visueel vergeleken kunnen worden.

Binnen het zesde leerjaar varieerde de mediaan PAE van de 46 leerlingen tussen 1,4% tot 15,4%. De spreiding binnen deze groep is groot, met een verschil van 14,0% tussen de laagste en hoogste waarde. Zoals weergegeven in Figuur 4 bevindt de grootste groep leerlingen zich in het bereik van 1,4% tot 2,5%. In totaal gaat het om 13 leerlingen, wat neerkomt op 28,3% van het totaal aantal leerlingen in dit onderwijsniveau. De verdeling vertoont overigens een positieve scheefheid, mede verklaard door de aanwezigheid van enkele uitschieters. De meest extreme waarde is leerling 6.020, met een mediaan PAE van 15,4%. Dit percentage is meer dan tweemaal zo hoog als de op één na hoogste score, die werd behaald door leerling 6.060 (7,89%). Andere leerlingen met relatief hoge schattingsfouten zijn onder andere leerling 6.043 (7,83%) en leerling 6.056 (7,53%). De aanwezigheid van deze extreme waarden leidde tot een asymmetrische verdeling, waardoor deze ook afwijkt van de normaalverdeling. Dit wordt getoond door de toevoeging van de normaalverdelingscurve aan Figuur 4.

Figuur 4

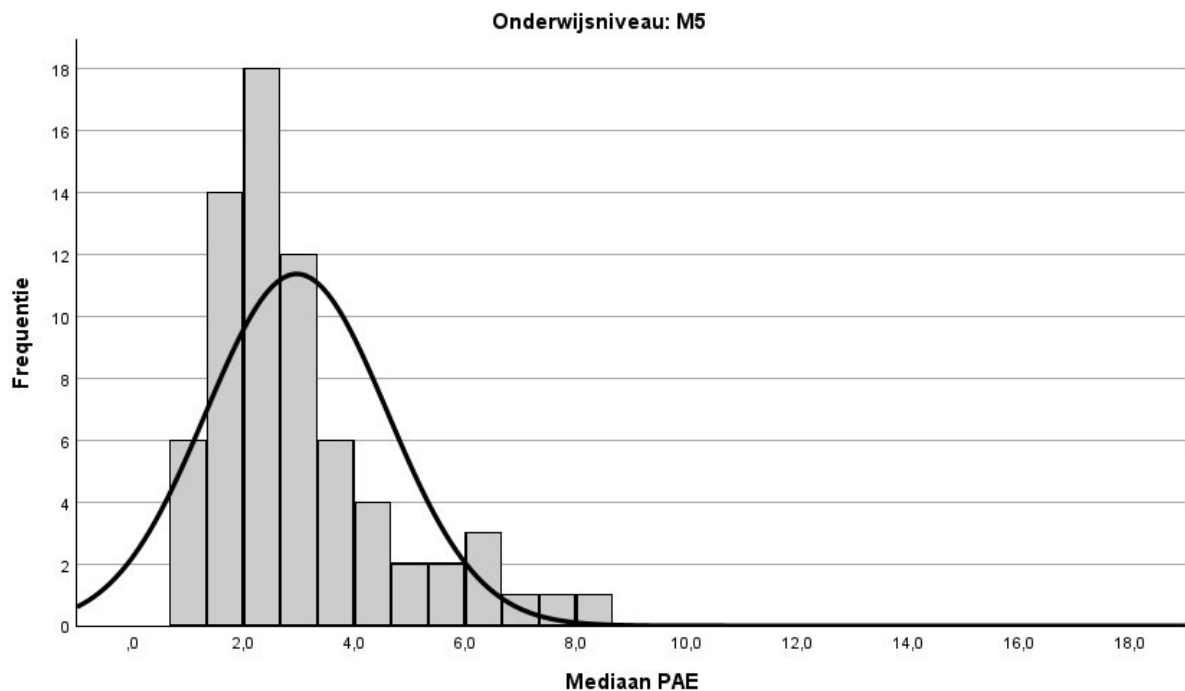
Histogram van de mediaan Percentage of Absolute Error (PAE) van leerlingen uit het zesde leerjaar (L6)



Binnen het vijfde middelbaar varieerde de mediaan PAE van de zeventig leerlingen tussen 0,9% en 8,0%. De spreiding binnen deze groep is kleiner dan die in het zesde leerjaar, met een verschil van 7,1% tussen de laagste en hoogste mediaanwaarde. Zoals weergegeven in Figuur 5 bevinden de meeste leerlingen zich in het bereik van 2,0% en 2,6%. In dit interval vallen 18 leerlingen, wat overeenkomt met 25,7% van het totaal aantal leerlingen in dit onderwijsniveau. Hier is eveneens sprake van een positief scheve verdeling, maar deze is minder uitgesproken dan bij de leerlingen van het zesde leerjaar. Dit is te verklaren doordat de uitschieters in het vijfde middelbaar minder extreem zijn en de meeste leerlingen een mediaan PAE hebben die zich binnen een beperkt bereik concentreert. Slechts enkele leerlingen vertonen hogere schattingsfouten, waaronder leerling 5.062 (8,0%), leerling 5.060 (7,9%) en leerling 5.041 (7,1%). Deze waarden liggen echter veel dichterbij het centrum van de verdeling dan de hoogste schattingsfouten in het zesde leerjaar. Hierdoor blijft de verdeling in het vijfde middelbaar relatief symmetrisch, met kenmerken die aansluiten bij een normaalverdeling. De toegevoegde normaalverdelingscurve in Figuur 5 ondersteunt deze bevinding. Het toont een centrale tendens rond een mediaan PAE van 2% tot 3% met een geleidelijk afname van frequenties aan weerszijden.

Figuur 5

Histogram van de mediaan Percentage of Absolute Error (PAE) van leerlingen uit het vijfde leerjaar (M5)



4.2.1.1 *Individuele verschillen in schattingsfout*

In dit onderdeel ligt de focus op de leerlingen die zich aan de uitersten van de verdeling bevinden. Voor het zesde leerjaar worden zowel de leerling met de hoogste als die met de laagste mediaan PAE besproken. Deze keuze maakt het mogelijk om de aanpak van de duidelijke uitschieter te vergelijken met die van een leerling die bijzonder nauwkeurig schatte binnen hetzelfde onderwijsniveau. Voor het vijfde middelbaar wordt enkel de leerling besproken met de laagste schattingsfout, aangezien er in deze groep geen uitgesproken uitschieters voorkwamen. Deze selectie maakt het mogelijk om te verkennen welke factoren leiden tot de nauwkeurigste schatting en laat een vergelijking toe tussen beide onderwijsniveaus.

Leerling 6.020 vormt een extreme uitschieter binnen het zesde leerjaar, met een mediaan PAE van 15,4%. Deze leerling loste in totaal veertien trials op, waarvan zeven trials als 'correct' en zeven trials als 'inaccuraat' werden gecodeerd. Bij de 'correct' beoordeelde trials was de schattingsfout aanzienlijk lager dan bij de 'inaccuraat' beoordeelde items, met respectievelijk een mediaan PAE van 2,5% en 43,1%. Dit verschil ligt in lijn met de verwachtingen, aangezien rekenfouten die tot de beoordeling 'inaccuraat' leiden doorgaans ook gepaard gaan met een onnauwkeurigere plaatsing van de breuk op de getallenlijn.

Indien er gekeken wordt naar de schattingsfout van elke individuele trial, bedroeg de PAE in vijf van de veertien gevallen meer dan 40%, met een extreme waarde van 71,8% bij de breuk $1/13$. De breuk $10/11$, met een PAE van 61,9%, was de enige van deze vijf gevallen met een algemene beoordeling 'correct'. De laagste schattingsfouten werden behaald bij de breuken $2/81$, $93/94$ en $2/11$.

De variatie in schattingsfouten kan mogelijk verklaard worden door de stappen die de leerling onderneemt bij het plaatsen van de breuken op de getallenlijn.

Binnen de stap 'encoderen', herleidde deze leerling dertien van de veertien breuken bij benadering naar een andere breuk. In vijf van deze gevallen werd er bij deze omzetting een rekenfout gemaakt. Dit leidde tot de algemene beoordeling 'inaccuraat'. Hierbij werkte ze in twee stappen, waarbij ze eerst de breuk bij benadering afrondde naar een vereenvoudigbare vorm om deze daarna te herleiden. Ter illustratie, de breuk $15/19$ werd eerst afgerond naar $15/20$, waarna ze dit foutief herleidde naar $5/4$ in plaats van $3/4$. Hoewel het afronden naar een vereenvoudigbare breuk een mogelijk zinvolle schattingsstrategie is, verliep de vereenvoudiging nadien niet correct. Dit resulteerde dan ook in een hoge PAE van 52,4%. Bij de overige acht breuken werd de omzetting wel correct uitgevoerd, maar koos de leerling een benaderende breuk die in waarde ver aflag van het oorspronkelijke item. Een voorbeeld is de breuk $10/11$, met een bijhorende PAE van 61,9%. Dit item werd eerst bij benadering omgezet naar $10/15$ en vervolgens vereenvoudigd naar $2/3$. Hoewel hier een correcte omzetting werd uitgevoerd, leidde dit niet tot een kleine schattingsfout. Dit wijst erop dat niet alleen een correct uitgevoerde vereenvoudiging volstaat, maar ook de keuze van de benaderende breuk belangrijk is voor een nauwkeurige schatting. Enkel bij de breuk $1/13$ werd er geen omzetting uitgevoerd. De teller is reeds 1, waardoor een verdere vereenvoudiging wiskundig gezien niet mogelijk is. De leerling kon echter wel voor een benaderende breuk kiezen als referentiepunt. Op dit item met een kleine teller en een relatief grote noemer behaalde ze de hoogste schattingsfout, namelijk 71,8%. Dit suggereert dat deze leerling sterk steunde op de omzetting van een breuk om tot een nauwkeurigere schatting te komen. Breuken met een kleine noemer zijn mogelijks makkelijker intuïtief te schatten zonder strategie. Deze hypothese wordt verder onderzocht in sectie 4.4.3. Het is ook mogelijk dat het niet omzetten van deze breuk geen bewuste keuze was, maar dat de leerling veronderstelde dat er geen verdere bewerkingen mogelijk waren.

Binnen de stap 'positioneren' werd in twaalf van de veertien trials geen strategie gehanteerd bij het positioneren. Enkel bij de breuken $93/94$ en $4/7$ gebruikte de leerling 'benchmarken'. Deze twee trials bevatten relatief lagere schattingsfouten in vergelijking met de andere trials, respectievelijk 1,1% en 10,1%. Bij de breuk $93/94$ werd er correct gebruikgemaakt van het eindpunt 1 als benchmark. Bij de breuk $4/7$ herleidde ze deze eerst naar $4/8$, om dan deze te plaatsen bij de benchmark 0,5. Bij beide trials werd er geen compenserend strategie toegepast. Dit zou het verschil in PAE-waarden kunnen verklaren; $93/94$ ligt immers in verhouding veel dicht bij de benchmark 1 dan $4/7$ bij de benchmark 0,5.

Doordat de breuk $\frac{4}{7}$ een kleinere noemer heeft, leidde de omzetting naar de benaderende breuk $\frac{4}{8}$ sneller tot grotere afwijkingen. Dit effect wordt versterkt in combinatie met niet te compenseren en draagt bij tot een hogere schattingsfout.

Binnen de stap 'finaliseren' werden er geen handelingen ondernomen. De plaatsing van de breuken werd niet bijgestuurd of gecorrigeerd na het positioneren.

Bovendien is het opmerkelijk dat de leerling extreem hoge schattingsfouten haalde bij de laatste drie afgenomen items, namelijk $\frac{10}{11}$, $\frac{1}{13}$ en $\frac{15}{19}$. Volgens de audio-opname heeft de volledige afname meer dan 20 minuten geduurd. Een verminderde aandacht of concentratie kan mogelijks een rol hebben gespeeld bij schatten van deze items op de getallenlijn. Dit zou verklaren waarom de schattingsfout bij deze breuken hoger was.

Leerling 6.020 van het zesde leerjaar zette consequent de breuk om binnen de stap 'encoderen', maar maakt amper gebruik van strategieën binnen de stap 'positioneren' en 'finaliseren'. Dit kan mogelijks een negatieve invloed hebben op de nauwkeurigheid van de plaatsing op de getallenlijn. Het effect van de verschillende stappen op de schattingsfout worden in paragraaf 4.3 en paragraaf 4.4 besproken.

Het andere uiterste binnen het zesde leerjaar is leerling 6.032, die met een mediaan PAE van 1,4% de laagste schattingsfout behaalde. Net als leerling 6.020 loste zij veertien trials op, waarvan de helft als 'correct' en de andere helft als 'inaccuraat' werden gecodeerd. De mediaan PAE van de 'correct' beoordeelde items bedroeg slechts 0,4%, terwijl de 'inaccuraat' beoordeelde trials een mediaan PAE bekomen van 4,22%. Hoewel er een verschil is, is deze discrepantie minder uitgesproken dan bij leerling 6.020. Dit wijst op meer consistente prestaties, zelfs bij trials die als 'inaccuraat' werden gecodeerd.

Wanneer er specifiek wordt gekeken naar de stappen die leerling 6.032 ondernam, valt het op ze binnen de stap 'encoderen' geen enkele omzetting toepaste en besloot te werken met de breuken in hun oorspronkelijke vorm. Dit staat scherp in contrast met leerling 6.020, die vrijwel alle breuken besloot te herleiden of te vereenvoudigen. Dit suggereert dat het toepassen van 'encoderen' niet noodzakelijk is om een nauwkeurige schatting te bekomen. Deze hypothese wordt onderzocht in paragraaf 4.3. Bovendien kan een incorrecte of ondoordachte omzetting binnen de stap 'encoderen' zelfs een negatieve impact te hebben op de schattingsnauwkeurigheid, zoals aangetoond bij leerling 6.020.

Binnen de stap 'positioneren' gebruikte leerling 6.030 twee strategieën. De strategie 'benchmarken' werd drie keer gebruikt, terwijl 'eenmaal segmenteren' elf keer werd toegepast. Hoewel 'eenmaal segmenteren' vaker werd ingezet, leidde deze aanpak zeven keer tot de algemene beoordeling 'inaccuraat'. De leerling maakte daarbij herhaaldelijk een fout bij de verdeling van de getallenlijn door evenveel streepjes te trekken als het getal in de noemer. Zo trok ze bijvoorbeeld bij de breuk $\frac{2}{9}$ negen streepjes, waardoor de getallenlijn werd opgedeeld in negen segmenten in plaats van acht. Het valt echter ook op dat de delen doorgaans een vergelijkbare grootte hadden en dus met enige precisie waren gemaakt.

Bij 'benchmarken' hanteerde ze bij de breuk $\frac{2}{81}$ als referentiepunt het beginpunt (0), bij $\frac{40}{79}$ het midden (0,5) en bij $\frac{93}{94}$ het eindpunt (1).

Bij twee gevallen, namelijk $\frac{40}{79}$ en $\frac{93}{94}$, werd binnen de stap 'finaliseren' ook gecompenseerd. In de overige trials werd de positie van het item niet verder verfijnd. Dit is eveneens verschillend met leerling 6.020, die na 'benchmarken' besloot niet te compenseren. Deze combinatie van 'benchmarken' en 'compenseren' lijkt bij leerling 6.032 bij te dragen aan een lagere schattingsfout. Ter vergelijking, de breuk $\frac{93}{94}$ heeft bij leerling 6.020 een PAE van 1,1% terwijl deze leerling een PAE van 0,4% bekommt.

Deze bevindingen benadrukken het belang van het strategiegebruik binnen de stap 'positioneren'. Waar leerling 6.020 vrijwel elke breuk omzette maar nauwelijks strategieën toepaste bij het positioneren ervan, koos leerling 6.032 ervoor om niet te encoderen, maar wel systematisch twee verschillende strategieën toe te passen tijdens het positioneren. Beide leerlingen verfijnden de schatting nauwelijks binnen de stap 'finaliseren'. Leerling 6.032 behaalde uiteindelijk aanzienlijk lagere schattingsfouten dan leerling 6.020. Dit suggereert dat het verschil in nauwkeurigheid voornamelijk te wijten is aan het strategiegebruik. Deze resultaten zijn in lijn met het onderzoek van Hofmans (2022), waarin er werd aangetoond dat het gebruik van strategieën leidt tot lagere schattingsfouten dan het ontbreken ervan.

Zoals eerder vermeld werden er binnen het vijfde middelbaar lagere schattingsfouten per leerling waargenomen. Binnen dit onderwijsniveau waren er echter nog steeds individuele verschillen. Leerling 5.037 behaalde een uitzonderlijk lage mediaan PAE van 0,9%. Van de veertien trials werden elf als 'correct' beoordeeld en slechts drie als 'inaccuraat', met bijhorende mediaan PAE's van 0,9% en 0,2%. Daarmee schat deze leerling nog nauwkeuriger dan leerling 6.032 uit het zesde leerjaar, die een mediaan PAE van 1,4% bekwam. Leerling 5.037 heeft ook een veel kleiner aantal 'inaccuraat' beoordeelde items, namelijk drie in vergelijking met zeven. Hij maakte opmerkelijk minder rekenfouten of fouten bij de verdeling van de getallenlijn. Dit verschil kan mogelijk verklaard worden door meer oefening en een grotere blootstelling aan breuken. Hierdoor heeft hij meer de kans gekregen om bepaalde rekenvaardigheden te automatiseren, waaronder het uitvoeren van basisbewerkingen, en inzicht te ontwikkelen in wiskundige concepten, zoals proporties en verhoudingen.

Binnen de stap 'encoderen' herleidde leerling 5.037 bij zeven trials het item naar een andere breuk, in tegenstelling tot leerling 6.032, die geen enkele omzetting toepaste. Leerling 5.037 herleidde zijn breuken voornamelijk naar breuken met kleinere noemers. Hierdoor waren deze makkelijker te segmenteren. Deze aanpak is efficiënter en minder tijdsintensief. Bijvoorbeeld, hij zette de breuk $\frac{15}{59}$ om naar $\frac{2,5}{10}$, waarna hij aan de hand van 'getrapt segmenteren' de getallenlijn in 10 delen opdeelde. Dit deed hij door eerst de getallenlijn in twee te splitsen, om daarna elk segment in 5 stukken te delen. Tot slot verfijnde hij de positie door te compenseren binnen de stap 'finaliseren'. Daartegenover staat de aanpak van leerling 6.032, die bij dezelfde breuk 59 streepjes trok en hiervoor de beoordeling 'inaccuraat' kreeg.

Ondanks het verschil in aanpak behaalden beide leerlingen een hoge nauwkeurigheid, wat suggereert dat de stap 'encoderen' op zich weinig invloed had op de uiteindelijke nauwkeurigheid, zolang de gekozen strategie correct werd uitgevoerd en werd ondersteund door een passende stap van finaliseren.

Binnen de stap 'positioneren' gebruikte leerling 5.037 een grotere variatie aan strategieën. Hij gebruikte vijf keer 'eenmaal segmenteren', vijf keer 'benchmarken' en vier keer 'getrapt segmenteren'. Dit ondersteunt de bevinding van Hofmans (2022), die stelt dat hoe meer strategieën een leerling gebruikt, hoe lager de mediaan PAE is van deze leerling. Deze diversiteit in strategiegebruik wordt verder onderzocht in sectie 4.4.2. Bij de breuken met een kleine teller en noemer, zoals $\frac{4}{7}$ en $\frac{2}{11}$, werd er voornamelijk 'eenmaal' of 'getrapt gesegmenteerd'. Bij breuken met een grote noemer werden deze strategieën enkel gebruikt indien het item eerst werd herleid naar een eenvoudiger vorm. In andere gevallen gebruikte deze leerling voornamelijk de strategie 'benchmarken', waarbij hij telkens het dichtstbijzijnde referentiepunt gebruikte.

In de laatste stap 'finaliseren' werd in tien gevallen gecompenseerd, in één geval gecorrigeerd en in slechts drie gevallen geen verdere verfijning uitgevoerd. Leerling 5.037 past dus bijna systematisch een bijsturing toe na het positioneren, in contrast met leerling 6.032 die dit slechts twee keer deed. In combinatie met een strategie droeg deze actie ook direct bij aan de nauwkeurigheid van de schatting.

Deze leerling van het vijfde middelbaar maakte intensiever gebruik van de verschillende stappen binnen het schatten van een breuk. Deze stappen lijken niet los van elkaar te functioneren, maar eerder elkaar te versterken. Om deze reden is het moeilijker om elke stap volledig losstaan te bespreken, wat wel mogelijk was bij de leerlingen van het zesde leerjaar. Bovendien besteedde leerling 5.037 ook meer aandacht aan breukeigenschappen, zoals de grootte van de noemer. Dit leek zijn keuze voor een bepaalde strategie ook te sturen. In sectie 4.4.3 wordt er onderzocht of er een verband bestaat tussen de grootte van de noemer en de mediaan PAE.

4.2.2 Algemene schattingsfout tussen onderwijsniveaus

Na de beschrijving van de spreiding en verdeling van de mediaan PAE binnen elk onderwijsniveau, wordt in dit deel het globaal verschil tussen beide groepen besproken. De schattingsfouten op onderwijsniveau zijn geanalyseerd aan de hand van de mediaan PAE, berekend over trials en leerlingen heen. De variabiliteit in deze fouten wordt weergegeven met de standaarddeviatie (SD). De leerlingen uit het zesde leerjaar bekomen een mediaan PAE van 3,8% (SD = 2,5%) terwijl de leerlingen uit het vijfde middelbaar een mediaan PAE van 2,5% (SD = 1,6%) bekomen.

De assumptie van normaliteit werd gecontroleerd met de Shapiro-Wilk-test. Voor het zesde leerjaar bleek deze geschonden, $W(46) = 0,804$; $p < 0,001$. Voor het vijfde leerjaar werd er eveneens een significante afwijking van normaliteit vastgesteld, $W(70) = 0,871$; $p < 0,001$. Aangezien de verdeling van beide onderwijsniveaus niet normaal is, werd een Mann-Whitney U-test uitgevoerd. Deze toonde een significant verschil aan in mediaan PAE, $U = 1036,5$; $Z = -3,24$; $p = 0,001$. De leerlingen uit het zesde leerjaar bekomen een significant hogere schattingsfout dan de leerlingen uit het vijfde middelbaar.

4.3 Encoderen en finaliseren

Binnen de eerste stap 'encoderen' kunnen de leerlingen ervoor kiezen om de aangeboden breuk eerst bij benadering te transformeren naar een andere breuk of een decimaal getal. Een alternatieve optie is om geen omzetting toe te passen en de breuk in zijn oorspronkelijke vorm te behouden. Afhankelijk van de gekozen aanpak wordt vervolgens onderzocht hoe de schattingsfouten, over items en leerlingen heen, verschillen tussen de onderwijsniveaus.

Uit de data-analyse (zie Tabel 3) blijkt dat er in totaal 366 trials werden gecodeerd als een transformatie bij benadering naar een andere breuk. In het zesde leerjaar waren dit 182 trials, wat overeenkomt met 29,7% van de trials binnen dit onderwijsniveau. In het vijfde middelbaar werd dit 184 keer gehanteerd, wat neerkomt op 19,6% van de trials binnen deze groep. De bijbehorende mediaan PAE bedroeg 4,2% (SD = 3,2%) en 4,3% (SD = 4,3%) (zie Tabel 4). Deze resultaten suggereren dat leerlingen uit beide onderwijsniveaus een vergelijkbare schattingsfout behalen wanneer zij bij benadering transformeren naar een andere breuk. De leerlingen uit het zesde leerjaar passen deze werkwijze wel vaker toe dan de leerlingen uit het vijfde middelbaar.

Een andere mogelijkheid was het omzetten van de breuk naar een decimaal getal (zie Tabel 3). Deze aanpak werd slechts toegepast in 20 trials, met 5 trials in het zesde leerjaar (0,8%) en 15 trials in het vijfde middelbaar (1,6%). Hierbij werd een overkoepelende mediaan PAE van 1,1% (SD = 0,4%) voor het zesde leerjaar en 2,8% (SD = 3,0%) voor het vijfde middelbaar gerapporteerd (zie Tabel 4). Er kunnen echter door het beperkte aantal trials geen verdere uitspraken gedaan worden over de schattingsnauwkeurigheid van deze aanpak.

De meest voorkomende aanpak bij beide groepen was het niet omzetten van de gegeven breuk (zie Tabel 3). Dit was het geval voor in totaal 1166 trials, waarvan 425 trials in het zesde leerjaar en 741 trials in het vijfde middelbaar. Dit correspondeerde respectievelijk met 69,4% en 78,8% van de totale trials per groep. Voor het zesde leerjaar ging dit gepaard met een mediaan PAE van 3,4% (SD = 10,4%) terwijl voor het vijfde middelbaar een mediaan PAE van 2,4% (SD = 1,9%) werd gerapporteerd (zie Tabel 4). De meerderheid van de leerlingen, in het bijzonder het vijfde middelbaar, hanteerde dus geen specifieke strategie bij het encoderen van de breuk. De lagere mediaan PAE in het vijfde middelbaar suggereert dat deze oudere leerlingen minder afhankelijk zijn van transformaties om tot een accurate

schatting te komen. Daarnaast wijst de hogere standaardafwijking in het zesde leerjaar op een grotere variabiliteit in hun schattingsnauwkeurigheid.

Tabel 3

Encoderen: frequentieverdeling per onderwijsniveau

Encoderen	Aantal trials L6 (%)	Aantal trials M5 (%)	Totaal
<i>Naar breuk</i>	182 (29,7%)	184 (19,6%)	366 (23,6%)
<i>Naar decimaal getal</i>	5 (0,8%)	15 (1,6%)	20 (1,3%)
<i>Niets</i>	425 (69,4%)	741 (78,8%)	1166 (75,1%)
<i>Totaal</i>	612 (100%)	940 (100%)	1552 (100%)

Tabel 4

Encoderen: mediaan PAE en standaarddeviatie per aanpak per onderwijsniveau

Encoderen	Mediaan PAE L6 (SD)	Mediaan PAE M5 (SD)
<i>Naar breuk</i>	4,2 (3,2)	4,3 (4,3)
<i>Naar decimaal getal</i>	1,1 (0,4)	2,8 (3,0)
<i>Niets</i>	3,4 (10,4)	2,4 (1,9)

Binnen de laatste stap ‘finaliseren’ konden de leerlingen ervoor kiezen om de gemaakte schattingsfout te compenseren, de positie van het item te corrigeren of om geen actie uit te voeren.

De data-analyse (zie Tabel 5) toont aan dat er in 803 trials werd gekozen om een schattingsfout te compenseren. Van deze trials behoorden er 209 trials tot het zesde leerjaar en 594 trials tot het vijfde middelbaar, wat respectievelijk overeenkwam met 34,2% en 63,2% van de trials binnen de betreffende onderwijsniveaus. De bijhorende mediaan PAE bedroeg 3,3% (SD = 2,9%) voor het zesde leerjaar en 2,9% (SD = 2,3%) voor het vijfde middelbaar (zie Tabel 4). Deze resultaten suggereren dat leerlingen uit vijfde middelbaar aanzienlijker vaker hun schattingsfout compenseerden dan leerlingen uit het zesde leerjaar. Daarbij behaalden ze een iets lagere schattingsfout. Mogelijk zetten deze leerlingen deze aanpak gericht in, wanneer zij inschatten dat een verfijning nodig was. Een andere mogelijkheid is dat het compenseren leidde tot een nauwkeurigere schatting, omdat ze het beter uitvoerden.

‘Corrigeren’ werd in 31 trials toegepast, waarvan 14 keer door leerlingen uit het zesde leerjaar en 17 keer door leerlingen uit het vijfde middelbaar (zie Tabel 5). Dit kwam overeen met respectievelijk 2,3% en 1,8% binnen het betreffende onderwijsniveau. Voor het zesde leerjaar ging dit gepaard met een mediaan PAE van 5,2% (SD = 14,2%) terwijl voor het vijfde middelbaar een mediaan PAE van 4,0% (SD = 4,4%) werd gerapporteerd (zie Tabel 6). Gezien de lage frequentie van trials moeten deze resultaten met enige voorzichtigheid worden geïnterpreteerd en kunnen er geen uitspraken worden gedaan over het verschil in

schattingsfout. Deze bevinding wijst er wel op dat ‘corrigeren’ in beide groepen slechts in beperkte mate gebruikt werd.

Daarnaast werd er in 389 trials binnen het zesde leerjaar (63,6%) en 329 trials binnen het vijfde middelbaar (35,0%) geen actie ondernomen (zie Tabel 5). Dit komt neer op een totaal van 718 trials. Hierbij behoorde respectievelijk een mediaan PAE van 3,7% (SD = 2,8%) voor het zesde leerjaar en 2,9% (SD = 3,1%) voor het vijfde middelbaar (zie Tabel 6). Dit verschil in percentages suggereert dat leerlingen uit het zesde leerjaar vaker geneigd waren om geen verdere verfijning of correctie uit te voeren op de positie van hun breuk. Dit ging ook gepaard met een hogere schattingsfout.

Tabel 5

Finaliseren: frequentieverdeling per onderwijsniveau

Finaliseren	Aantal trials L6 (%)	Aantal trials M5 (%)	Totaal
<i>Compenseren</i>	209 (34,2%)	594 (63,2%)	803 (51,7%)
<i>Corrigeren</i>	14 (2,3%)	17 (1,8%)	31 (2,0%)
<i>Niets</i>	389 (63,5%)	329 (35,0%)	718 (46,3%)
<i>Totaal</i>	612 (100%)	940 (100%)	1552 (100%)

Tabel 6

Finaliseren: mediaan PAE en standaarddeviatie per aanpak per onderwijsniveau

Finaliseren	Mediaan PAE L6 (SD)	Mediaan PAE M5 (SD)
<i>Compenseren</i>	3,3 (2,9)	2,9 (2,3)
<i>Corrigeren</i>	5,2 (14,2)	4,0 (4,4)
<i>Niets</i>	3,7 (2,8)	2,9 (3,1)

Er werd ook beschrijvend de aanpak en onderwijsniveau met elkaar vergeleken op basis van de mediaan PAE over items en leerlingen heen (zie Tabel 6).

Hieruit bleek dat de hoogste schattingsfouten werden gevonden bij de trials waarin leerlingen corrigeerden. Dit kan erop wijzen dat deze strategie voornamelijk werd gebruikt bij breuken waar de leerlingen gemaakte fouten wilden herstellen, wat op zich al met een hogere foutmarge gepaard gaat. Het is eveneens opvallend dat de leerlingen uit het zesde leerjaar die niets deden, minder accuraat waren dan de leerlingen die compenseerden. Dit patroon was afwezig bij het vijfde middelbaar, waar de nauwkeurigheid vergelijkbaar was tussen de leerlingen die geen actie ondernamen en diegene die compenseerden. Dit verschil suggereert dat leerlingen in het vijfde middelbaar nauwkeuriger konden schatten zonder een compenserende strategie toe te passen, terwijl de leerlingen uit het zesde leerjaar mogelijk meer baat hebben met te compenseren in tegenstelling tot niets doen.

Conform het onderzoek van Mathise Hofmans (2022), zal deze huidige masterproef zich in het verdere verloop van het resultatenstuk voornamelijk richten op de stap 'positioneren'. Het algemene verschil in schattingsfout tussen de onderwijsniveaus kwam immers voornamelijk tot uiting wanneer de breuken niet benaderend werden getransformeerd (binnen 'encoderen') of wanneer de plaatsing niet werden gecompenseerd of gecorrigeerd (binnen 'finaliseren'). De verschillen in mediaan PAE waren te klein of het aantal trials was te beperkt om duidelijke conclusies te trekken bij benaderend transformeren en bij compenseren of corrigeren. Dit wijst erop dat het verschil in schattingsfout (zie sectie 4.2.2) vermoedelijk niet voortkomt uit de stappen 'encoderen' en 'finaliseren' maar samenhangt met het strategiegebruik tijdens de stap 'positioneren'. Om deze reden wordt er niet dieper ingegaan op de eerste en laatste stap, tenzij deze mogelijk relevante informatie bevatten voor de analyses van de specifieke strategieën binnen de positioneringsfase.

4.4 Positioneren

Na de eerste stap 'encoderen' en voorafgaand de laatste stap 'finaliseren' komt de stap 'positioneren'. Hierin werd nagegaan welke strategie de leerlingen gebruikten om de breuk te plaatsen op de getallen. Er wordt een onderscheid gemaakt tussen vier strategieën: 'eenmaal segmenteren', 'getrapt segmenteren', 'benchmarken' of 'geen strategie'. Binnen dit hoofdstuk wordt het gebruik van deze strategieën beschreven en wordt de schattingsfouten geanalyseerd op verschillende niveaus. Er wordt telkens een vergelijking gemaakt tussen de twee onderwijsniveaus om mogelijke verschillen in kaart te brengen.

4.4.1 Strategiegebruik en accuraatheid

De frequentieverdeling van het strategiegebruik wordt weergegeven in Tabel 7. De bijhorende schattingsfout werd berekend per strategie (zie Tabel 8).

In totaal werd in 308 trials geen strategie gebruikt, waarvan 118 keer in het zesde leerjaar (19,3%) en 190 keer in het vijfde middelbaar (20,2%). De percentages zijn vergelijkbaar in beide onderwijsniveaus. Hier werd ook de hoogste schattingsfout waargenomen met een mediaan PAE van 5,3% (SD = 12,7%) in het zesde leerjaar en 3,8% (SD= 7,3%) in het vijfde middelbaar.

'Eenmaal segmenteren' werd in 382 trials gebruikt, namelijk 244 keer door leerlingen uit het zesde leerjaar (39,9%) en 138 keer door leerlingen uit het vijfde middelbaar (14,7%). Dit vormde de meest gebruikte strategie binnen het zesde leerjaar. De bijhorende mediaan PAE was 3,2% (SD = 7,6%) in het zesde leerjaar en 2,7% (SD = 3,8%) in het vijfde middelbaar.

De strategie 'getrapt segmenteren' werd slechts 49 keer toegepast, namelijk 19 keer (3,10%) in het zesde leerjaar en 30 keer (3,19%) in het vijfde middelbaar. Het was de minst gebruikte strategie bij beide onderwijsniveaus. Ondanks de lage frequentie leverde deze

strategie de laagste schattingsfout op in zowel het zesde leerjaar en in het vijfde middelbaar, met respectievelijk een mediaan PAE van 2,2% (SD = 5,6%) en 1,7% (SD = 3,1%).

Over de onderwijsniveaus heen werd 'benchmarken' het vaakst toegepast, met 813 trials in totaal. In het zesde leerjaar werd dit in 231 trials (37,8%) toegepast tegenover 582 trials (61,9%) in het vijfde middelbaar. 'Benchmarken' in het vijfde middelbaar was de meest voorkomende strategie binnen de volledige steekproef. Het vertegenwoordigde het hoogste percentage van alle strategieën over beide onderwijsniveaus heen. De mediaan PAE bij deze strategie was 3,1% (SD = 7,0%) voor het zesde leerjaar en 2,4% (SD = 4,0%) in het vijfde middelbaar. Deze strategie is naast populair ook relatief accuraat, voornamelijk bij de leerlingen uit het vijfde middelbaar.

Tabel 7

Positioneren: frequentieverdeling strategiegebruik per onderwijsniveau

Strategie	Aantal trials L6 (%)	Aantal trials M5 (%)	Totaal
<i>Geen strategie</i>	118 (19,3%)	190 (20,2%)	308 (19,8%)
<i>Eenmaal segmenteren</i>	244 (39,9%)	138 (14,7%)	382 (24,6%)
<i>Getrapt segmenteren</i>	19 (3,1%)	30 (3,2%)	49 (3,2%)
<i>Benchmarken</i>	231 (37,8%)	582 (61,9%)	813 (52,4%)
<i>Totaal</i>	612 (100%)	940 (100%)	1552 (100%)

Tabel 8

Positioneren: mediaan PAE en standaarddeviatie per strategie per onderwijsniveau

Strategie	Mediaan PAE L6 (SD)	Mediaan PAE M5 (SD)
<i>Geen strategie</i>	5,3 (12,7)	3,8 (7,3)
<i>Eenmaal segmenteren</i>	3,2 (7,6)	2,7 (3,8)
<i>Getrapt segmenteren</i>	2,2 (5,6)	1,7 (3,1)
<i>Benchmarken</i>	3,1 (7,0)	2,4 (4,0)

Er werd nagegaan over de mediaan PAE significant verschilde tussen de strategieën binnen elk onderwijsniveau. Eerst werd de assumptie van normaliteit gecontroleerd met de Shapiro-Wilk-test. Voor alle strategieën binnen elk onderwijsniveau bleek deze geschonden (zie Tabel 9).

Tabel 9

Resultaten van de Shapiro-Wilk-test voor normaliteit per strategie binnen elk onderwijsniveau

Strategie	L6			M5		
	N	W	p*	N	W	p*
<i>Geen strategie</i>	118	0,690	<0,001	190	0,671	<0,001
<i>Eenmaal segmenteren</i>	244	0,878	<0,001	138	0,916	<0,001
<i>Getrapt segmenteren</i>	19	0,540	<0,001	30	0,822	<0,001
<i>Benchmarken</i>	231	0,947	<0,001	852	0,784	<0,001

* Een significante p-waarde ($< .05$) wijst op een afwijking van de normaalverdeling.

Aangezien de verdeling van de schattingsfouten niet normaal was, werd binnen elk onderwijsniveau een Kruskal-Wallis H-toets. In het zesde leerjaar was er een significant verschil in mediaan PAE tussen de strategieën, $H(3) = 53,23$; $p < 0,001$. In het vijfde middelbaar werd eveneens een significant verschil vastgesteld, $H(3) = 85,39$; $p < 0,001$.

Er werden post-hocanalyses uitgevoerd met behulp van Mann-Whitney U-toetsen om na te gaan welke strategieën verantwoordelijk zijn voor dit vastgestelde verschil. Hierbij werd specifiek onderzocht of de toepassing van een strategie, zoals 'benchmarken' of 'segmenteren', leidde tot significant lagere schattingsfouten in vergelijking met het gebruik van 'geen strategie'. Er werd een Bonferroni-correctie uitgevoerd voor meervoudige vergelijkingen (gecorrigeerde $\alpha = .05/3 = .0167$).

In het zesde leerjaar leidde 'benchmarken' tot een significant lagere schattingsfout dan 'geen strategie', $U = 7991,00$; $Z = -6,33$; $p < 0,001$. 'Eenmaal segmenteren', $U = 9494,00$; $Z = -5,26$; $p < 0,001$, en 'getrapt segmenteren', $U = 406,00$; $Z = -4,46$; $p < 0,001$, bekwamen eveneens significant lagere fouten in vergelijking met 'geen strategie'. Dit patroon kon ook vastgesteld worden bij het vijfde middelbaar. In dit onderwijsniveau was de schattingsfout significant lager bij het toepassen van 'benchmarken', $U = 30962,00$; $Z = -9,12$; $p < 0,001$, 'eenmaal segmenteren', $U = 8820,00$; $Z = -5,06$; $p < 0,001$, en 'getrapt segmenteren', $U = 1342,00$; $Z = -4,66$; $p < 0,001$, ten opzichte van 'geen strategie'. Deze resultaten tonen aan dat het toepassen van strategieën in beide onderwijsniveaus gepaard ging met significant lagere schattingsfouten, in tegenstelling tot het toepassen van 'geen strategie'.

Er werd eveneens nagegaan door middel van een Mann-Whitney U-toets of de schattingsfouten binnen eenzelfde strategie significant verschilden tussen het zesde leerjaar en vijfde middelbaar. De mediaan PAE bleek significant lager voor 'benchmarken' bij leerlingen uit het vijfde middelbaar dan bij leerlingen uit het zesde leerjaar, $U = 49819,00$; $Z = -5,76$; $p < 0,001$. De schattingsfout van het vijfde middelbaar was eveneens significant lager voor 'eenmaal segmenteren', $U = 12245,50$; $Z = -4,43$; $p < 0,001$. Ook bij 'geen strategie' behaalde het vijfde leerjaar een significant lagere schattingsfout, $U = 8517,00$; $Z = -3,55$; $p < 0,001$.

Er werd geen significant verschil gevonden tussen beide onderwijsniveaus voor 'getrapt segmenteren', $U = 257,00$; $Z = -0,58$; $p = 0,565$. De resultaten tonen aan dat voor de meeste strategieën, met uitzondering van 'getrapt segmenteren', leerlingen uit het vijfde middelbaar lagere schattingsfouten behaalden dan leerlingen uit het zesde leerjaar.

4.4.2 Diversiteit in strategiegebruik

De diversiteit van een leerling bij het strategiegebruik slaat op het flexibel toepassen van de verschillende strategieën bij het oplossen van de itemset. Het minimum aantal strategieën dat een leerling kon toepassen is één en het maximum is vier. Een belangrijke kanttekening bij de interpretatie van de diversiteit is dat 'geen strategie' ook werd meegeteld in deze analyses. Dit betekent dat een leerling die bijvoorbeeld een diversiteit van één bekommt, mogelijk geen bewuste werkwijze heeft toegepast maar net 'geen strategie' heeft gebruikt.

Tabel 10 toont aan dat de meeste leerlingen twee (44,0%) of drie strategieën (40,5%) hanteerden. In het zesde leerjaar gebruikte 76,1% van de leerlingen twee (37,0%) of drie strategieën (39,1%), terwijl 19,6% zich limiteerde tot één strategie. Slechts 4,4% paste vier strategieën toe. In het vijfde middelbaar gebruikte eveneens de meerderheid van de leerlingen twee (48,6%) of drie strategieën (41,4%). Het aandeel leerlingen dat slechts één strategie gebruikte is echter lager (2,9%) dan het zesde leerjaar, terwijl het gebruik van vier strategieën juist hoger ligt (7,1%). Het vijfde middelbaar vertoonde dus een toename in diversiteit van het strategiegebruik in vergelijking met het zesde leerjaar.

Een Spearman's rho-correlatie werd berekend om het verband tussen het onderwijsniveau en de diversiteit van de leerling na te gaan. Het onderwijsniveau werd gecodeerd als $L6 = 1$ en $M5 = 2$. De resultaten tonen een niet-significante positieve samenhang tussen de twee variabelen aan, $\rho(116) = 0,13$; $p = 0,152$. Leerlingen uit het vijfde middelbaar pasten dus niet significant meer verschillende strategieën toe dan leerlingen uit het zesde leerjaar.

Wanneer het verband tussen de diversiteit en de schattingsfout van een leerling, ongeacht het onderwijsniveau, werd onderzocht met een Spearman's rho-correlatie, bleek er een niet-significante negatieve samenhang te bestaan tussen de mediaan PAE en de diversiteit van de leerling, $\rho(116) = -0,11$; $p = 0,257$. Het aantal gebruikte strategieën droeg dus niet significant bij aan het verklaren van de verschillen in de schattingsfout.

Tabel 10*Diversiteit in strategiegebruik per onderwijsniveau*

Onderwijsniveau	Diversiteit				Totaal
	1	2	3	4	
Zesde leerjaar	9 (19,6%)	17 (37,0%)	18 (39,1%)	2 (4,4%)	46 (100%)
Vijfde middelbaar	2 (2,9%)	34 (48,6%)	29 (41,4%)	5 (7,1%)	70 (100%)
Totaal	11 (9,5%)	51 (44,0%)	47 (40,5%)	7 (6,0%)	116 (100%)

4.4.3 Schattingsfout per item per onderwijsniveau

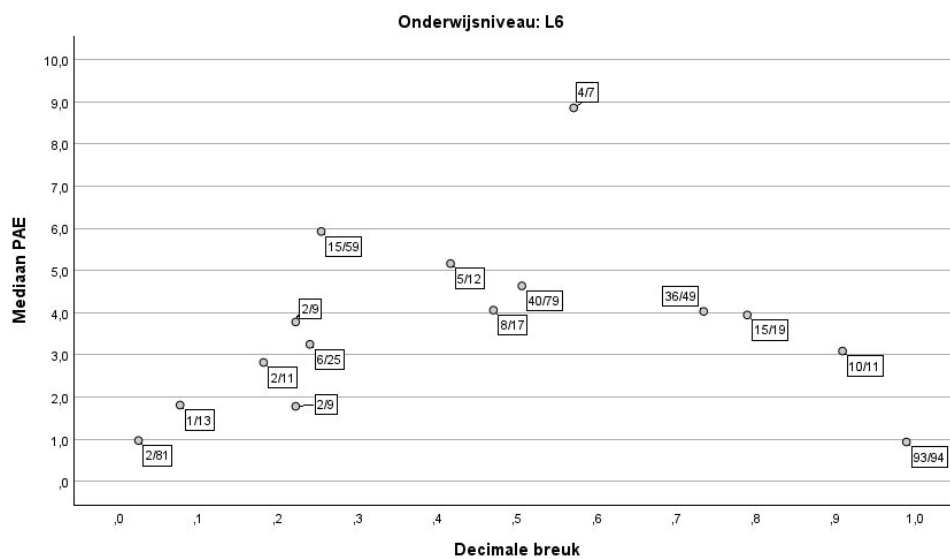
Binnen deze sectie wordt de schattingsfouten op itemniveau per onderwijsniveau vergeleken. Elke leerling loste elk item maar één keer op, waardoor er geen herhaalde metingen waren binnen dezelfde breuk. De trials binnen eenzelfde leerling blijven echter afhankelijk van elkaar.

In Figuur 6 wordt de mediaan PAE per item weergegeven voor het zesde leerjaar. Deze varieerde sterk per breuk, met de breuk 4/7 als opvallende uitschieter met een mediaan PAE van 8,9%. In tegenstelling tot de bevindingen van Hofmans (2022) is het M-patroon minder duidelijk zichtbaar. De mediaan PAE wordt wel kleiner nabij 0 en 1 maar er is geen consistent patroon zichtbaar tussen de waarden 0,25 en 0,75.

Breuken met relatief grote noemers, zoals 15/59, 40/79 en 36/49, gingen gepaard met een grotere schattingsfout. Het is mogelijk dat een grotere noemer de complexiteit van een breuk verhoogt, waardoor dit kan leiden tot grotere schattingsfouten. Bijvoorbeeld, bij het eenmaal segmenteren van de breuk 36/49 kon de leerling proberen om de lijn in 49 gelijk delen te verdelen. De kans op het overschatten of onderschatten van de grootte van het segment is echter hier groter dan bij breuken met een kleinere noemer. Het valt wel op dat de extreme waarden, met name 2/81 en 93/94, die eveneens een grote noemer hebben, juist de laagste schattingsfouten hebben. Dit kan mogelijks verklaard worden doordat deze breuken dichtbij het begin- of eindpunt van de getallenlijn liggen, waardoor de leerlingen deze punten als referentiepunten konden gebruiken om te 'benchmarken'. Hierdoor kon hun positionering mogelijk eenvoudiger bepaald worden, ondanks de hoge noemer.

Figuur 6

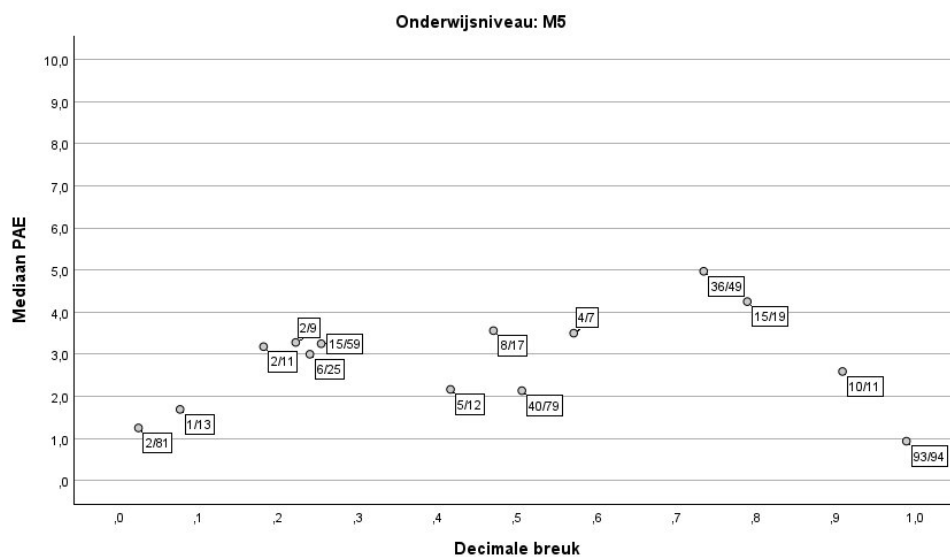
Mediaan PAE per item voor de leerlingen uit het zesde leerjaar



Figuur 7 geeft de mediaan PAE per item weer voor het vijfde middelbaar. Over het algemeen lagen hier de schattingsfouten per breuk lager dan in het zesde leerjaar, met minder spreiding tussen de items en geen opvallende uitschieters. Breuken met relatieve grote noemers, zoals 15/59 en 40/79, werden binnen dit onderwijsniveau accurater geschat. Een uitzondering is de breuk 36/49, die een grotere schattingsfout heeft dan in het zesde leerjaar. Net zoals in het zesde leerjaar hebben de breuken 2/81 en 93/94 hier eveneens de kleinste mediaan PAE. De invloed van de grootte van de noemer lijkt minder bepalend voor de schattingsfout dan bij de leerlingen uit het zesde leerjaar.

Figuur 7

Mediaan PAE per item voor de leerlingen uit het vijfde middelbaar



4.4.4 Frequentie en schattingsfout per item per strategie

Zoals eerder besproken in sectie 4.4.3, varieert de mediaan PAE sterk per breuk per onderwijsniveau. In deze sectie wordt per strategie de frequentie en de bijhorende schattingsfout van elke breuk onderzocht.

Bepaalde breuken werden ook specifiek in de itemset opgenomen om strategieën bij de leerlingen uit te lokken (zie paragraaf 3.3). Daarbij werd verondersteld dat deze specifieke strategieën leiden tot een nauwkeurige schatting bij de desbetreffende breuken. In deze sectie wordt nagegaan of deze breuken effectief vaker met de beoogde strategie werden opgelost en of dit gepaard ging met een lagere schattingsfout.

Voor elke breuk werd de mediaan PAE berekend op basis van de trials waarbij de desbetreffende strategie gehanteerd werd. Elke leerling loste elke breuk slechts één keer op. Er zijn dus geen herhaalde metingen binnen een item. Een leerling kan echter dezelfde strategie gebruiken op meerdere breuken, waardoor deze items wel afhankelijk van elkaar zijn.

4.4.4.1 Frequentie en schattingsfout per item voor de strategie 'eenmaal segmenteren'

Tabel 11 toont de frequentie en schattingsfout, uitgedrukt in mediaan Percentage of Absolute Error (PAE) en bijhorende standaardafwijking (SD), voor 'eenmaal segmenteren', opgesplitst naar breuk en onderwijsniveau. De breuken zijn gerangschikt op basis van hun decimale waarde.

'Eenmaal segmenteren' werd het vaakst gebruikt binnen het zesde leerjaar met 244 trials, zoals vermeld in sectie 4.4.1. De frequenties varieerden tussen 2,9% en 9,8%. Bij de breuken $2/9$ (9,8%) en $2/11$ (9,4%) kwam deze strategie het meeste voor. Dit kan mogelijk verklaard worden door de relatief kleine noemer van deze breuken, waardoor de getallenlijn eenvoudiger en overzichtelijker visueel ingedeeld kan worden. Anderzijds was het gebruik van 'eenmaal segmenteren' het minst frequent bij de breuken $2/81$ (2,9%), $93/94$ (3,7%) en $40/79$ (4,5%). Hier vormt de grootte van de noemer eveneens een mogelijke verklaring. Breuken met een grotere noemer vragen meer tijd en een hogere nauwkeurigheid bij het verdelen van de getallenlijn, omdat die in veel kleine, gelijkmatige segmenten moet worden opgesplitst. Leerlingen zullen daardoor mogelijk minder snel deze strategie gaan toepassen. De breuk $36/49$ is echter een uitzondering op deze bevinding, met een frequentie van 8,6% ondanks haar grote noemer. Het zou kunnen dat de leerlingen deze breuk eerst bij benadering gaan transformeren naar een kleinere breuk, wat het verdelen van de getallenlijn vergemakkelijkt. De positie van de breuk op de getallenlijn lijkt, naast de noemer, ook een invloed te hebben op de frequentie van 'eenmaal segmenteren'. De breuken die het dichtst bij 0 of 1 liggen, namelijk $2/81$ en $93/94$, lokten het minst vaak deze strategie uit. Het is aannemelijk dat leerlingen bij zulke breuken voor een andere strategie gaan kiezen, zoals 'benchmarken', omdat ze het begin- en eindpunt als referentiepunt kunnen gebruiken.

De schattingsfout vertoonde aanzienlijke verschillen tussen de breuken. De laagste mediaan PAE's kwamen voor bij de breuken 93/94 (0,4%) en 2/81 (0,5%), die ook het minst vaak met deze strategie werden opgelost. Wanneer de leerlingen toch kozen voor 'eenmaal segmenteren' in deze gevallen, deden ze dit relatief accuraat, ongeacht de grootte van de noemers.

De breuk 4/7 vormde, aan de andere kant, een duidelijke uitschieter met een mediaan PAE van 10,1% (SD = 7,7). Hoewel deze breuk door twintig leerlingen (8,2%) met 'eenmaal' segmenteren werd opgelost, leidde dit tot de grootste schattingsfout. Dit is opvallend, omdat 4/7 een relatief kleine noemer heeft. Bovendien werd deze breuk geselecteerd om het gebruik van 'eenmaal segmenteren' te stimuleren (zie paragraaf 3.3). Dit item wordt daarom verderop diepgaander bestudeerd bij de bespreking van de specifiek opgesteld items bij deze strategie.

Andere breuken met hoge mediaan PAE's waren 40/79 (7,6%), 5/12 (6,7%) en 36/49 (5,5%). Dit betreft allemaal breuken met een relatief grote noemer of met een decimale waarde rond het midden van de getallenlijn. De getallenlijn correct opdelen vraagt hier meer precisie, wat leidt tot grotere fouten. Er zijn echter ook tegenvoorbeelden. De breuk 15/59 heeft ook een grote noemer maar wel een relatief lage mediaan PAE (2,6%). 'Eenmaal segmenteren' werd bij deze breuk door een kleine groep leerlingen gebruikt, maar leidde binnen deze groep wel tot een relatief grote nauwkeurigheid (2,6%). Het is hier mogelijk dat de breuk eerst werd omgezet naar een kleinere breuk, zoals 1/4.

In het vijfde middelbaar werd 'eenmaal segmenteren' in 138 trials gebruikt. Deze strategie werd voornamelijk ingezet bij de breuken 2/9 (16,7%), 2/11 (16,7%), 6/25 (13,0%) en 1/13 (12,3%). Deze breuken laten zich voornamelijk kenmerken door een decimale waarde rond 0,25 of een relatief kleine noemer. De strategie werd het minst gebruikt bij dezelfde breuken als in het zesde leerjaar, namelijk 2/81 (0,7%), 40/79 (0,7%) en 93/94 (1,4%). Deze breuken liggen allemaal dicht bij de extreme waarden van de getallenlijn of hebben een grote noemer. Net zoals in het zesde leerjaar, kwam 36/49 hier ook uitzonderlijk vaak voor (8,7%), ondanks haar grote noemer. Daarnaast valt op dat de frequentie van deze strategie afneemt bij breuken met een waarde rond het midden van de getallenlijn, zoals 8/17 (2,9%), 5/12 (1,4%) en 40/79 (0,7%). Dit kan mogelijks te maken hebben met de grootte van de noemer, zoals bij 40/79, maar ook met het feit dat leerlingen een andere strategie, zoals 'benchmarken', meer passend vinden omdat deze breuken zich rond het midden van de getallenlijn bevinden. Deze bevindingen liggen allemaal in lijn met de vaststellingen binnen het zesde leerjaar. De positie van de breuk op de getallenlijn en de grootte van noemer lijken een rol te spelen bij het gebruik van 'eenmaal segmenteren'.

De schattingsfouten waren over het algemeen lager dan in het zesde leerjaar. De breuken met de laagste mediaan PAE's waren 93/94 (0,5%), 1/13 (1,3%) en 10/11 (1,8%). Dit komt overeen met de resultaten uit het zesde leerjaar, waar breuken dichtbij 0 of 1 ook kleinere fouten bekwamen. De breuk 4/7 had bij het zesde leerjaar de grootste schattingsfout (10,1%),

maar vertoonde in het vijfde middelbaar een veel lagere mediaan PAE van 2,5%. Bij beide onderwijsniveaus heeft deze breuk een grote frequentie, van respectievelijk 8,2% en 10,1%.

De hoogste schattingsfouten blijken ook binnen het vijfde middelbaar voornamelijk voor te komen bij breuken met grote noemers, zoals 36/49 (7,5%) en 15/19 (7,2%). Deze breuken zijn eveneens gesitueerd rond de decimale waarde 0,75. Hieruit volgt dat de positie van de breuk op de getallenlijn en de grootte van noemer mogelijk niet enkel een rol lijken te spelen bij de keuze voor 'eenmaal segmenteren' binnen beide onderwijsniveau maar ook een invloed heeft op de schattingsfout.

Tabel 11

Frequentie en schattingsfout van 'eenmaal segmenteren' per breuk en leerjaar, met mediaan PAE en bijhorende standaardafwijking

Breuk	L6		M5	
	Aantal trials (%)	Mediaan PAE (SD)	Aantal trials (%)	Mediaan PAE (SD)
2/81	7 (2,9%)	0,5 (0,6)	1 (0,7%)	1,5 (–)
1/13	19 (7,8%)	1,2 (1,4)	17 (12,3%)	1,3 (1,9)
2/11	23 (9,4%)	3,2 (4,7)	23 (16,7%)	2,7 (3,4)
2/9	24 (9,8%)	4,0 (3,2)	23 (16,7%)	2,8 (2,6)
6/25	21 (8,6%)	3,0 (3,5)	18 (13,0%)	5 (2,1)
15/59	16 (6,6%)	2,6 (17,9)	7 (5,1%)	2,9 (5)
5/12	19 (7,8%)	6,7 (9,9)	2 (1,4%)	9,9 (7,4)
8/17	17 (7,0%)	4,1 (9,2)	4 (2,9%)	5,5 (6,1)
40/79	11 (4,5%)	7,6 (5,5)	1 (0,7%)	2,1 (–)
4/7	20 (8,2%)	10,1 (7,7)	14 (10,1%)	2,5 (2,6)
36/49	21 (8,6%)	5,5 (5,5)	12 (8,7%)	7,5 (6,3)
15/19	16 (6,6%)	2,9 (5,9)	4 (2,9%)	7,2 (3,6)
10/11	21 (8,6%)	2,9 (6,3)	10 (7,2%)	1,8 (1,6)
93/94	9 (3,7%)	0,4 (2,5)	2 (1,4%)	0,5 (0,6)
Totaal	244 (100%)	3,2 (12,7)*	138 (100%)	3,8 (7,3)*

* De totale waarden voor de mediaan PAE en standaardafwijking (SD) houden rekening met frequentieverschillen per breuk en zijn dus niet rechtstreeks afgeleid van de mediaanwaarden per breuk.

De breuken 4/7 en 2/11 werden opgesteld om het gebruik van de strategie 'eenmaal segmenteren' te stimuleren bij de leerlingen (zie paragraaf 3.3). Uit Tabel 11 blijkt dat deze strategie het vaakst werd toegepast, naast de breuk 2/9, bij de breuk 2/11 in beide onderwijsniveaus. In het zesde leerjaar werd deze strategie toegepast in 9,4% van de gevallen en in het vijfde middelbaar in 16,7% van de gevallen. De bijhorende schattingsfouten waren relatief laag met een mediaan PAE 3,2% (SD = 4,7) voor het zesde leerjaar en 2,7% (SD = 3,4) voor het vijfde middelbaar. De mediaan PAE van deze breuk voor het zesde leerjaar

komt exact overeen moet de algemene mediaan PAE voor dit onderwijsniveau. Hoewel 'eenmaal segmenteren' frequent werd toegepast, resulteerde het niet tot de laagste schattingsfouten. Dit kan te wijden zijn aan andere factoren, zoals een inaccurate indeling van de getallenlijn of de handelingen ondernomen binnen de stap 'encoderen' en 'finaliseren'. Om dit verschil te verklaren, werd er gekeken naar de algemene beoordeling en de gehanteerde handelingen binnen de stappen 'encoderen' en 'finaliseren' van de desbetreffende items.

Deze breuk werd in negen trials van het zesde leerjaar en acht trials van het vijfde middelbaar als 'inaccuraat' beoordeeld. Hierbij zien we voornamelijk een terugkerende fout, waarbij de leerlingen de getallenlijn onjuist gaan indeelden. Deze leerlingen trokken elf strepen, waardoor de getallenlijn in twaalf delen werd ingedeeld. Als gevolg werd $2/11$ vaak gepositioneerd op het tweede streepje, wat neerkomt op $2/12$. Deze trials bekomen dan ook een hogere schattingsfout. Binnen de stap 'encoderen', transformeerden vier leerlingen van het zesde leerjaar en negen leerlingen van het vijfde middelbaar deze breuk bij benadering naar een andere breuk. Dit lijkt niet een invloed te hebben op de schattingsfout. Binnen de stap 'finaliseren', compenseerde één leerling uit het zesde leerjaar en acht leerlingen uit het vijfde middelbaar. Daarnaast corrigeerden ook drie leerlingen uit het vijfde middelbaar hun plaatsing. Er kon echter geen patroon worden vastgesteld in verband met de schattingsfout.

Daartegenover staat de breuk $4/7$, die minder vaak aanleiding gaf tot 'eenmaal segmenteren' in beide onderwijsniveaus. In het zesde leerjaar gebruikten 20 leerlingen (8,2%) deze strategie bij het schatten van $4/7$ terwijl in het vijfde middelbaar slechts 14 leerlingen (1,6%) dit deden. Dit is eerder opmerkelijk, zeker aangezien het sterke verschil in nauwkeurigheid. Zoals hierboven vermeld, had deze breuk de hoogste mediaan PAE binnen het zesde leerjaar (10,1%), terwijl deze schattingsfout beduidend lager lag in het vijfde middelbaar (2,5%). Indien er wordt gekeken naar de algemene beoordeling, valt op dat elf leerlingen uit het zesde leerjaar de beoordeling 'inaccuraat' kregen, tegenover slechts drie leerlingen uit het vijfde middelbaar. De leerlingen met deze beoordeling behaalden allemaal duidelijk hogere mediaan PAE-waarden dan hun klasgenoten die de beoordeling 'accuraat' hadden gekregen. De mediaan PAE's varieerden binnen het zesde leerjaar van de negen leerlingen die $4/7$ schatten met 'eenmaal segmenteren' en de beoordeling 'correct' krijgen van 0,1% tot 12,6%. De schattingsfouten van de elf leerlingen met een beoordeling 'inaccuraat' lagen daarentegen tussen 7,9% en 32,6%. In het vijfde middelbaar waren er minder uitgesproken verschillen, waarbij de elf 'correct' beoordeelde leerlingen mediaan PAE-waarden behaalden tussen 0,4% en 7,9% terwijl de drie leerlingen met een 'inaccuraat' beoordeling een schattingsfout scoorden tussen 2,1% en 8,1%.

Hierbij zien we dezelfde terugkerende fout, waarbij de leerlingen met een hoge mediaan PAE de getallenlijn onjuist indeelden. Deze leerlingen trokken zeven strepen, waardoor de getallenlijn in acht delen werd ingedeeld in plaats van zeven. Als gevolg werd $4/7$ vaak gepositioneerd op het vierde streepje, wat neerkomt op $4/8$. Aangezien de getallenlijn in relatief grote stukken werd gesplitst, zal zo'n foute positionering leiden tot een grote afwijking.

Bij een getallenlijn die is opgedeeld in kleinere stukken, zou de impact van zo'n verdelingsfout kleiner zijn, omdat elk segment dan een kleinere decimale waarde vertegenwoordigt.

Deze fout was blijkaar minder doorwegend in het vijfde middelbaar, aangezien er een kleinere discrepantie was tussen de schattingsfouten van de 'correct' en 'inaccuraat' beoordeelde leerlingen. De leerlingen konden er dan ook voor kiezen om hun fouten te compenseren binnen de stap 'finaliseren'. Wat betreft de aanpak binnen de stappen 'encoderen' en 'finaliseren' was het gebruik zeer beperkt. Binnen de stap 'encoderen' paste enkel leerling 6.007 van het zesde leerjaar een codering naar een andere breuk toe. Zij trachtte de breuk $\frac{4}{7}$ bij benadering te transformeren naar een breuk met noemer 105, maar maakte daarbij een rekenfout. Ze kwam uit op $\frac{20}{105}$ in plaats van $\frac{60}{105}$. Daarna transformeerde ze deze foutieve breuk naar $\frac{20}{100}$. Door deze rekenfout behaalde ze een hoge schattingsfout van 32,6%. De andere leerlingen besloten de breuk niet bij benadering te transformeren. Binnen de stap 'finaliseren', besloot slechts één leerling per onderwijsniveau te compenseren, namelijk opnieuw leerling 6.007 van het zesde leerjaar en leerling 5.053 van het vijfde middelbaar. Hoewel 'compenseren' mogelijk een zinvolle aanpak kon zijn, was de invloed van haar eerdere rekenfout te groot. Haar uiteindelijke plaatsing bleef daardoor foutief. Leerling 5.053 behaalde eveneens een relatief hoge schattingsfout van 8,1%.

4.4.4.2 Frequentie en schattingsfout per item voor de strategie 'getrapt segmenteren'

Tabel 12 toont de frequentie en schattingsfout, uitgedrukt in mediaan Percentage of Absolute Error (PAE) en bijhorende standaardafwijking (SD), voor 'getrapt segmenteren', opgesplitst naar breuk en onderwijsniveau. De breuken zijn gerangschikt op basis van hun decimale waarde. Zowel in het zesde leerjaar als in het vijfde middelbaar is het aantal trials per breuk beperkt. De strategie werd bij meerdere breuken slechts één keer toegepast, waardoor algemene uitspraken over mogelijke verbanden met enige voorzichtigheid moeten worden geïnterpreteerd.

De strategie 'getrapt segmenteren' werd in het zesde leerjaar toegepast in slechts 19 trials. Daarnaast was de frequentie sterk geconcentreerd bij een klein aantal breuken, namelijk $\frac{2}{81}$ (31,6%), $\frac{1}{13}$ (21,1%), en $\frac{2}{11}$ (15,8%). Deze drie breuken, die niet specifiek werden ontworpen voor deze strategie, bevinden zich dicht bij het begin van de getallenlijn. De leerling kon eerst de getallenlijn in een bepaald aantal grotere stukken indelen om vervolgens enkel het eerste segment verder op te splitsen. Aangezien leerlingen het gebruikelijk vinden om van links naar rechts te werken, kon 'getrapt segmenteren' hier intuïtief aannemelijker lijken. Het is wel opmerkelijk dat de noemers 11 en 13 allebei priemgetallen zijn. Bij 'getrapt segmenteren' verdeelt de leerling de getallenlijn namelijk eerst in grotere segmenten om deze delen dan verder te splitsen. Dit vereist echter wel deelbaarheid, waarbij een noemer gemakkelijk meerdere keren in gelijke segmenten kan worden verdeeld. Priemgetallen hebben enkel zichzelf en 1 als deler, waardoor ze zich dus niet eenvoudig kunnen splitsen in gelijke delen

zonder rest. Op basis van hun deelbaarheid zou het echter vanzelfsprekender zijn dat breuken met samengestelde noemers, zoals $6/25$ of $5/12$, eerder deze strategie zouden uitlokken. De frequentie van dit soort breuken binnen in het zesde leerjaar was echter zeer laag.

De laagste mediaan PAE's werden bekomen bij $5/12$ (0,7%), $2/81$ (0,8%) en $10/11$ (0,9%). De breuken met de hoogste frequenties, namelijk $2/81$ (31,6%), $1/13$ (21,1%), en $2/11$ (15,8%), behaalden daarnaast ook relatieve lage schattingsfouten, respectievelijk 0,8%; 1,8% en 2,3%. Ondanks het gebruik van priemgetallen als noemer, schatten de leerlingen toch relatief nauwkeurig met 'getrapt segmenteren'. Het is mogelijk dat ze bepaalde stappen hebben ondernomen binnen 'encoderen' of 'finaliseren' om deze strategie accuraat toe te passen. De hoogste fouten werden daarentegen waargenomen bij $15/59$ (14,1%), $36/49$ (12,2%) en $2/9$ (8,7%). Door de lage frequentie van 'getrapt segmenteren' is het echter moeilijk om hier uitspraken over te doen.

In het vijfde middelbaar werd 'getrapt segmenteren' frequenter gebruikt, namelijk in 30 trials. De strategie werd voornamelijk gebruikt bij de breuken die zich bevinden in de eerste helft van de getallenlijn, zoals $5/12$ (16,7%), $2/11$ (13,3%), $6/25$ (13,3%) en $2/9$ (10,0%). Dit volgt dezelfde redenering als bij het zesde leerjaar, waarbij leerlingen eerst de getallenlijn globaal indelen om daarna verder te werken met de eerste segmenten. In tegenstelling tot het zesde leerjaar, kwamen hier wel meer noemers met meerdere delers terug bij de breuken waarbij deze strategie werd gekozen. Daarnaast zijn dit ook de items die specifiek voor deze strategie werden geselecteerd.

De schattingsfout in het vijfde middelbaar lag in het algemeen iets lager dan in het zesde leerjaar. De breuken $2/81$ (0,5%), $1/13$ (0,8%) en $36/49$ (0,5%) werden het meest nauwkeurig geschat. De breuk $36/49$ had thans in het zesde leerjaar een van de hoogste schattingsfouten. Aan de andere kant, de breuken $2/9$ (6,7%) en $15/59$ (7,9%) behaalden net zoals in het zesde leerjaar eveneens een hoge schattingsfout. Dit suggereert dat deze breuken moeilijker nauwkeurig te plaatsen zijn met 'getrapt segmenteren', ongeacht het onderwijsniveau.

Tabel 12

Frequentie en schattingsfout van 'getrapt segmenteren' per breuk en leerjaar, met mediaan PAE en bijhorende standaardafwijking

Breuk	L6		M5	
	Aantal trials (%)	Mediaan PAE (SD)	Aantal trials (%)	Mediaan PAE (SD)
2/81	6 (31,6%)	0,8 (1,0)	2 (6,7%)	0,5 (0,7)
1/13	4 (21,1%)	1,8 (2,0)	3 (10,0%)	0,8 (0,8)
2/11	3 (15,8%)	2,3 (0,3)	4 (13,3%)	1,7 (3,1)
2/9	1 (5,3%)	8,7 (–)	3 (10,0%)	6,7 (3,8)
6/25	0 (0,0%)	– (–)	4 (13,3%)	2,0 (1,7)
15/59	1 (5,3%)	14,1 (–)	2 (6,7%)	7,9 (9,2)
5/12	1 (5,3%)	0,7 (–)	5 (16,7%)	3,2 (1,6)
8/17	0 (0,0%)	– (–)	1 (3,3%)	3,1 (–)
40/79	0 (0,0%)	– (–)	1 (3,3%)	1,1 (–)
4/7	0 (0,0%)	– (–)	0 (0,0%)	– (–)
36/49	2 (10,5%)	12,2 (13,8)	2 (6,7%)	0,5 (0,7)
15/19	0 (0,0%)	– (–)	1 (3,3%)	3,4 (–)
10/11	1 (5,3%)	0,9 (–)	1 (3,3%)	2,9 (–)
93/94	0 (0,0%)	– (–)	1 (3,3%)	0,9 (–)
Totaal	19 (100%)	2,2 (5,6)*	30 (100%)	1,7 (3,1)*

* De totale waarden voor de mediaan PAE en standaardafwijking (SD) houden rekening met frequentieverschillen per breuk en zijn dus niet rechtstreeks afgeleid van de mediaanwaarden per breuk.

De breuken 2/9 en 5/12 werden opgesteld om het gebruik van de strategie 'getrapt segmenteren' te stimuleren bij de leerlingen (zie sectie 3.3). Uit Tabel 12 blijkt echter dat deze strategie beperkt werd toegepast bij deze breuken in het zesde leerjaar. Bij de breuk 2/9 (5,3%) en 5/12 (5,3%) werd 'getrapt segmenteren' daar slechts één keer gebruikt. In het vijfde middelbaar kwam deze strategie vaker voor. De breuk 2/9 (10,0%) werd in drie trials via deze aanpak opgelost en de breuk 5/12 (16,7%) in vijf trials. Het verschil tussen de twee breuken in frequentie kan vermoedelijk te wijten zijn aan de noemer. De noemer 12 van de breuk 5/12 heeft meerdere delers, zoals 2, 3, 4 en 6, waardoor het eenvoudiger is om de getallenlijn meerdere keren op te delen. De breuk 2/9 heeft een oneven noemer, met minder delers, waardoor dit het opdelen kan bemoeilijken.

Er is een duidelijk verschil in schattingsfout tussen beide breuken. De breuk 2/9 had een hoge mediaan PAE van 8,7% in het zesde leerjaar en 6,7% in het vijfde middelbaar. De breuk 5/12 daarentegen had een kleinere fout, namelijk 0,7% in het zesde leerjaar en 3,2% in het vijfde middelbaar. Dit suggereert dat de breuk 2/9 moeilijker nauwkeurig te plaatsen is met 'getrapt segmenteren' dan de breuk 5/12. Hoewel 2/9 geselecteerd was om deze strategie uit

te lokken, werd het weinig toegepast en leidde het tot relatief hoge fouten. De breuk $5/12$ kwam ook in accuraatheid niet veel lager uit met deze strategie in vergelijking met de andere breuken. Hieruit kan dus gesuggereerd worden dat deze breuken niet accurater werden geschat door deze strategie.

Indien er gekeken wordt naar de individuele leerlinggegevens is het opvallend dat de algemene beoordeling 'correct' niet overeen kwam met de laagste schattingsfout. Leerling 5.053 uit het vijfde leerjaar, met als enige de beoordeling 'inaccuraat', behaalde een veel lagere schattingsfout (1,8%) dan de overige drie leerlingen uit beide onderwijsniveaus. Binnen de stap 'encoderen' ondernam geen enkele leerling een actie. Leerling 5.002 voerde wel een correctie binnen 'finaliseren' uit maar behaalde geen opvallend lagere schattingsfout (6,7%).

Bij de breuk $5/12$ verliep de aanpak van de schatting hetzelfde. Alle zes leerlingen kregen de beoordeling 'correct' en ondernamen geen acties binnen de stappen 'encoderen' of 'finaliseren'. De schattingsfouten waren verdeeld. De leerling uit het zesde leerjaar behaalde een mediaan PAE van 0,7%. De mediaan PAE's van de leerlingen van het vijfde middelbaar gingen van 0,3% tot 4,2%.

Door het beperkt aantal beschikbare trials is het moeilijk om hier betrouwbare uitspraken over te doen.

4.4.4.3 *Frequentie en schattingsfout per item voor de strategie 'benchmarken'*

Tabel 13 toont de frequentie en schattingsfout, uitgedrukt in mediaan Percentage of Absolute Error (PAE) en bijhorende standaardafwijking (SD), voor 'benchmarken' opgesplitst naar breuk en onderwijsniveau. De breuken zijn gerangschikt op basis van hun decimale waarde.

'Benchmarken' werd gebruikt in 231 trials binnen het zesde leerjaar. De frequenties varieerden van 1,7% tot 13,4%. Bij de breuken $93/94$ (13,4%), $40/79$ (11,7%), $8/17$ (10,0%) en $5/12$ (9,1%) kwam deze strategie het vaakste voor. Deze breuken zijn allen gelegen dichtbij referentiepunten op de getallenlijn, zoals het midden (0,5) of het eindpunt (1). Dit verklaart waarom leerlingen eerder geneigd zijn om bij deze breuken 'benchmarken' toe te passen. Deze breuken werden dan ook specifiek opgenomen in de itemset om deze strategieën uit te lokken. Anderzijds was het gebruik van 'benchmarken' het minst frequent bij de breuken $2/11$ (1,7%) en $2/9$ (3,0%). Deze breuken lenen zich ook minder goed tot deze strategie omdat hun locatie op de getallenlijn niet dicht bij een benchmark ligt, waardoor een andere strategie mogelijk eerder voor de hand liggend was.

De schattingsfout varieerde tussen de breuken. De breuken met de laagste mediaan PAE's waren $93/94$ (0,9%) en $2/81$ (1,0%). Beide breuken kwamen dus frequent voor en leidden bovendien ook tot een kleine schattingsfout. Ze werden opgesteld om 'benchmarken' uit te lokken en dit bleek dus succesvol. De breuken $15/59$ (8,0%), $2/9$ (4,7%) en $15/19$ (4,7%) hadden daarentegen de hoogste mediaan PAE. Twee van deze breuken, namelijk $15/59$ en $15/19$ werden eveneens ontworpen om 'benchmarken' uit te lokken, maar deze breuken

leidden tot grotere fouten. Op deze items wordt verderop dieper ingegaan bij de bespreking van de specifiek opgestelde items bij deze strategie. De breuk $2/9$ had een lage nauwkeurigheid, maar werd, zoals eerder vermeld, ook het minst vaak met deze strategie opgelost. Dit lijkt door de schattingsfout ook een logische keuze. Wanneer dit item wel met 'benchmarken' werd opgelost, werd voornamelijk gebruikgemaakt van 0,25 als referentiepunt op de getallenlijn. Dit is inderdaad het dichtstbijzijnde referentiepunt. De leerlingen moeten hierbij echter voldoende compenseren voor de schattingsfout die deze strategie inherent met zich meebrengt. Indien dit niet gebeurt, kan dit mogelijk de grote schattingsfout verklaren.

'Benchmarken' is de meest gehanteerde strategie binnen het vijfde middelbaar met 582 trials, zoals beschreven in sectie 4.4.1. In vergelijking met het zesde leerjaar is hier een duidelijke toename in gebruik waar te nemen. Deze strategie werd, net zoals bij het zesde leerjaar, het vaakst ingezet bij de breuken $40/79$ (11,0%), $93/94$ (10,5%), $8/17$ (10,1%) en $5/12$ (95%). In beide onderwijsniveaus werd dus deze strategie voornamelijk gebruikt bij breuken die dicht bij het midden (0,5) of einde van de getallenlijn liggen (1). 'Benchmarken' werd daarentegen het minst gebruikt bij de breuken $2/11$ (1,5%) en $2/9$ (2,2%), wat overeenkomt met de bevindingen in het zesde leerjaar.

De patronen in schattingsfouten waren eveneens sterk gelijkend met die van het zesde leerjaar, waarbij $93/94$ (0,9%) de laagste schattingsfout bekam. Ook de breuk $2/81$ (1,0%) had hier een zeer lage schattingsfout. Zoals besproken in sectie 4.4.4.1 lokten de breuken dichtbij 0 of 1 de strategie 'eenmaal segmenteren' relatief weinig uit. Voor 'benchmarken' geldt het omgekeerde, waarbij breuken nabij deze referentiepunten het gebruik van deze strategie stimuleerden. Deze items waren dan ook bewust geselecteerd om het gebruik van benchmarken uit te lokken. Breuken met hoge mediaan PAE's waren $36/49$ (4,8%), $2/9$ (4,8%) en $15/19$ (4,4%), wat overeenkomt met de bevindingen bij het zesde leerjaar.

Tabel 13

Frequentie en schattingsfout van 'benchmarken' per breuk en leerjaar, met mediaan PAE en bijhorende standaardafwijking

Breuk	L6		M5	
	Aantal items (%)	Mediaan PAE (SD)	Aantal items (%)	Mediaan PAE (SD)
2/81	18 (7,8%)	1,0 (5,5)	56 (9,6%)	1,0 (2,3)
1/13	12 (5,2%)	2,2 (1,8)	23 (4,0%)	1,7 (1,6)
2/11	4 (1,7%)	3,8 (2,7)	9 (1,5%)	3,8 (2,3)
2/9	7 (3,0%)	4,7 (2,4)	13 (2,2%)	4,8 (3,1)
6/25	13 (5,6%)	2,5 (5)	31 (5,3%)	1,5 (3)
15/59	14 (6,1%)	8,0 (17,6)	43 (7,4%)	2,4 (2,6)
5/12	21 (9,1%)	2,3 (3,1)	55 (9,5%)	2,2 (4,3)
8/17	23 (10,0%)	4,1 (4,1)	59 (10,1%)	3,6 (3,6)
40/79	27 (11,7%)	3,4 (6,7)	64 (11,0%)	2 (2,7)
4/7	18 (7,8%)	4,5 (4,6)	51 (8,8%)	3,6 (4,6)
36/49	10 (4,3%)	4,5 (2,7)	22 (3,8%)	4,8 (5,3)
15/19	16 (6,9%)	4,7 (6,7)	50 (8,6%)	4,4 (5,7)
10/11	17 (7,4%)	3,1 (1,7)	45 (7,7%)	3,1 (4,2)
93/94	31 (13,4%)	0,9 (8,1)	61 (10,5%)	0,9 (3,6)
Totaal	231 (100%)	3,1 (7,0)*	582 (100%)	2,4 (4,0)*

* De totale waarden voor de mediaan PAE en standaardafwijking (SD) houden rekening met frequentieverschillen per breuk en zijn dus niet rechtstreeks afgeleid van de mediaanwaarden per breuk.

De breuken 2/81 en 1/13 werden opgenomen in de itemset om het gebruik van de strategie 'benchmarken' naar 0 uit te lokken. In het zesde leerjaar werd deze strategie toegepast in 18 trials (7,8%) voor de breuk 2/81 en in 12 trials (5,2%) voor de breuk 1/13. In het vijfde middelbaar gebeurde dit in respectievelijk 56 trials (9,6%) en in 23 trials (4,0%). Over het algemeen leverden beide breuken een relatief lage mediaan PAE op. Voor beide onderwijsniveau behoort 2/81 tot de items met de laagste schattingsfouten met een mediaan PAE van 1,0%.

Wat betreft de algemene beoordeling halen alle leerlingen bij beide breuken een beoordeling 'correct'.

Binnen de stap 'encoderen' had uit het zesde leerjaar één leerling de breuk 1/13 en zeven leerlingen de breuk 2/81 bij benadering getransformeerd naar een andere breuk. In het vijfde middelbaar kwam dit minder vaak voor. Daar voerde telkens één leerling per breuk een dergelijke transformatie uit. Deze transformaties bleken zowel in het zesde leerjaar als in het vijfde middelbaar bij de breuk 1/13 te leiden naar grotere schattingsfouten, zelfs indien de leerlingen trachtten te compenseren. Leerling 6.039 uit het zesde leerjaar zette de breuk 1/13

bijvoorbeeld om naar $1/10$, wat een aanzienlijke compensatie vereiste. Dit resulteerde in een grotere schattingsfout. Dit patroon was minder duidelijk voor de breuk $2/81$ in beide onderwijsniveaus. Bij het benaderend transformeren naar een andere breuk, zoals $1/40$, leidde dit niet systematisch tot hogere schattingsfouten.

Binnen de stap 'finaliseren' zijn er duidelijke verschillen tussen de onderwijsniveaus. In het zesde leerjaar compenseerden 12 leerlingen bij de breuk $1/13$ en 14 leerlingen bij de breuk $2/81$. In het vijfde middelbaar gebeurde dit in verhouding vaker, waar 23 leerlingen compenseerden bij $1/13$ en 54 leerlingen bij $2/81$. De transformatie bij benadering naar een breuk ging niet altijd gepaard met een compenserende strategie. In het zesde leerjaar voerden drie leerlingen bij de breuk $2/81$ een transformatie uit naar een andere breuk zonder achteraf te compenseren. Hun schattingsfouten varieerden sterk, namelijk 0,5%; 0,5% en een uitschieter van 23,5%. Hoewel één leerling een opvallende hoge fout bekommt, bekomen de overige twee kleine PAE-waarden. Dit kan mogelijk verklaard worden doordat de breuk $2/81$ een zeer kleine decimale waarde heeft. Bij benadering afronden naar bijvoorbeeld $1/40$ en deze waarde vervolgens plaatsen op benchmark 0 resulteert in een schatting die toevallig nog redelijk dicht bij het juiste antwoord ligt.

De breuken $6/25$ en $15/59$ werden specifiek ontworpen om benchmarken naar 0,25 uit te lokken. In het zesde leerjaar gebruikten dertien leerlingen (5,6%) deze strategie bij de breuk $6/25$ en veertien leerlingen (6,1%) bij de breuk $15/59$. In het vijfde middelbaar gebeurde dit respectievelijk in 31 trials (5,3%) en in 43 trials (7,4%). In verhouding werd er dus vaker gebenchmarkt bij deze breuken in het vijfde middelbaar dan in het zesde leerjaar.

Er zijn duidelijke verschillen in schattingsfout tussen beide breuken. De breuk $6/25$ vertoonde in beide onderwijsniveaus relatief lage schattingsfouten, namelijk 2,5% voor het zesde leerjaar en 1,5% voor het vijfde middelbaar. De breuk $15/59$ daarentegen leverde in het zesde leerjaar de hoogste mediaan PAE op, namelijk 8,0%. De individuele schattingsfouten per trial varieerden sterk voor deze breuk, gaande van 0,4% tot 46,1%. De stijging van deze fouten verliep geleidelijk, zonder uitgesproken uitschieters. Ook in het vijfde middelbaar lag de schattingsfout voor $15/59$ hoger dan bij $6/25$, namelijk 2,4%. Deze bleef echter in de gemiddelde marge, met een spreiding tussen 0,1% en 11,6%.

De hoge mediaan PAE van de breuk $15/59$ in het zesde leerjaar kan niet verklaard worden door de algemene beoordeling van de trials. Slechts één trial binnen deze strategie werd gecodeerd met de beoordeling 'inaccuraat'. Hierbij hoorde een schattingsfout van 4,93%, wat onder de mediaan PAE van dit onderwijsniveau ligt. In het vijfde middelbaar werden vier trials van de breuk $15/59$ gecodeerd als 'inaccuraat'. Dit droeg wel bij aan de grotere schattingsfouten binnen die groep. Deze leerlingen maakten voornamelijk fouten tegen het 'compenseren' van de breuk, binnen de stap 'finaliseren'. Ze plaatsten de breuk onder de benchmark 0,25, terwijl die er net boven lag. Ze interpreteerden de grootte van de breuk verkeerd ten opzichte van de benchmark. Voor de breuk $6/25$ kreeg geen enkele leerling die 'benchmarken' gebruikte de beoordeling 'inaccuraat', noch in het zesde leerjaar als in het

vijfde middelbaar. Dit kan mogelijk verklaard worden door de noemer 25, die het benchmark vereenvoudigde. Wanneer de getallenlijn gehalveerd werd, kon het midden gemakkelijk gekoppeld worden aan het natuurlijk getal 12,5. Indien elk segment verder werd gehalveerd kreeg het eerste kwart een waarde van 6,25. Dit maakt het positioneren van de breuk eenvoudiger. Deze redenering is moeilijker uit te voeren bij een grotere noemer, zoals 59 in de breuk 15/59.

Binnen de stap 'encoderen' werd in het zesde leerjaar in acht van de veertien trials van 15/59 en zes van de dertien trials van 6/25 getransformeerd bij benadering naar een andere breuk. In het vijfde middelbaar werd 20 keer getransformeerd bij 15/59 en elf keer bij 6/25 naar een andere breuk. Deze transformaties leidden in beide onderwijsniveaus niet specifiek naar kleinere schattingsfouten.

Binnen de stap 'finaliseren' compenseerden in het zesde leerjaar elf van de veertien leerling bij de breuk 15/59 en acht van de dertien leerlingen bij 6/25. In het vijfde middelbaar gebeurde dit in 32 van de 43 trials bij 15/59 en 20 van de 31 trials bij 6/25. Eén leerling besloot bij 6/25 zijn schattingsfout te 'corrigeren'. Er werd dus in beide onderwijsniveaus relatief vaak gecompenseerd bij deze breuken. Toch leidde dit in het zesde leerjaar niet specifiek tot een lagere schattingsfout. In het vijfde middelbaar viel zelfs op dat 'compenseren' bij de breuk 15/59 frequent leidde tot grotere fouten. Het zou kunnen dat een leerling te sterk gaat compenseren, waarbij hij dus onvoldoende rekening houdt met de grootte van de noemer. Hierdoor gaat hij zijn schatting te ver verplaatsen van de benchmark, wat resulteert in een overschatting.

De breuken 8/17 en 40/79 werden geselecteerd om het gebruik van de strategie 'benchmarken' uit te lokken rond het referentiepunt 0,5. In het zesde leerjaar werd deze strategie toegepast in 23 trials (10,0%) bij de breuk 8/17 en in 27 trials (11,7%) bij de breuk 40/79. Deze breuken behalen de hoogste frequenties in vergelijking met andere breuken in de dataset. In het vijfde middelbaar werden gelijkaardige frequenties waargenomen, namelijk 10,1% bij 8/17 en 11,0% bij 40/79. Beide breuken behoren dus tot de items die het meest frequent werden geschat met 'benchmarken'. Dit suggereert dat leerlingen sneller gebruik maakten van deze strategie als de breukwaarde zich dichtbij 0,5 bevond. Ondanks het veelvuldig gebruik, leidden deze breuken niet tot opvallend lage schattingsfouten. Voor de breuk 8/17 lag de mediaan PAE op 4,1% voor het zesde leerjaar en 3,6% voor het vijfde middelbaar. Voor de breuk 40/79 waren de fouten iets lager, met 3,4% voor het zesde leerjaar en 2,0% voor het vijfde middelbaar. De leerlingen van het vijfde middelbaar schatten over het algemeen nauwkeuriger, in het bijzonder bij de breuk 40/79.

De hogere schattingsfout van de breuk 8/17 in het zesde leerjaar is niet te wijten aan de algemene beoordeling. In het zesde leerjaar kreeg namelijk enkel één leerling de beoordeling 'inaccuraat'. In het vijfde middelbaar kregen vijf leerlingen deze beoordeling. Zoals verwacht, behaalde deze leerlingen ook veel hogere schattingsfouten zoals 11,44% en

10,44%. Dit patroon herhaalde zich bij de breuk $40/79$, waarbij één leerling uit het zesde leerjaar en acht leerlingen uit het vijfde middelbaar de beoordeling 'inaccuraat' krijgen bij het 'benchmarken'. Deze bekwamen ook de grootste schattingsfouten.

Binnen de stap 'encoderen' werd in 23 trials van de breuk $40/79$ uit het zesde leerjaar getransformeerd bij benadering naar een andere breuk. Dit gebeurde eveneens in elf trials van de breuk $8/17$. In het vijfde middelbaar werd deze benaderende transformatie in verhouding minder gebruikt, slechts in acht trials van $40/79$ en vijf trials van $8/17$. Ondanks deze lagere frequentie, behaalden de leerlingen in het vijfde middelbaar lagere schattingsfouten. Dit suggereert dat transformatie bij benadering naar een andere breuk weinig bijdroeg aan de schattingsfout bij het schatten van deze breuken op de getallenlijn via 'benchmarken'. Er is binnen beide onderwijsniveaus bovendien ook weinig verschil in schattingsfout tussen de leerlingen die deze transformatie toepasten en zij die dat niet deden.

Binnen de stap 'finaliseren', werd in het zesde leerjaar twintig keer gecompenseerd bij de breuk $8/17$ en achttien keer bij $40/79$. Er werd in verhouding in het vijfde middelbaar frequenter gecompenseerd, namelijk 58 keer bij $8/17$ en 56 keer bij $40/79$. Deze hogere frequentie van 'compenseren' in combinatie met benchmarken zou mogelijk kunnen verklaren waarom de mediaan PAE bij beide breuken binnen dit onderwijsniveau lager ligt in vergelijking met het zesde leerjaar. Benchmarken impliceert namelijk een bepaalde afronding, aangezien de breuk op een referentiepunt wordt geplaatst. Hierdoor ontstaat een onvermijdelijke schattingsfout. De stap 'compenseren' is dan ook nodig om de schatting te verfijnen. Een mogelijke verklaring voor het verschil in schattingsfout tussen de breuken $8/17$ en $40/79$ kan eveneens bij het 'compenseren' liggen. Bij $8/17$ is een grotere compensatie nodig door de kleinere noemer dan bij $40/79$. Door de grote noemer van $40/79$ volstaat een kleinere verschuiving op te getallenlijn al om dichterbij de juiste waarde te komen. Als leerlingen bij $8/17$ onvoldoende compenseren, blijft er dus een grotere fout bestaan. Dit zou een mogelijke verklaring kunnen vormen waarom de mediaan PAE bij $8/17$ in beide onderwijsniveaus systematisch hoger ligt dan bij $40/79$, zelfs indien ze op een gelijkaardige manier werden opgelost.

De breuken $36/49$ en $15/19$ werden ontworpen om het gebruik van 'benchmarken' naar 0,75 uit te lokken. In het zesde leerjaar gebruikten tien leerlingen (4,3%) deze strategie bij de breuk $36/49$ en zestien leerlingen (6,9%) bij de breuk $15/19$. In het vijfde middelbaar werd 'benchmarken' toegepast door 22 leerlingen (3,8%) bij de breuk $36/49$ en door 50 leerlingen (8,6%) bij de breuk $15/19$. In beide onderwijsniveaus werd de breuk $15/19$ dus vaak opgelost via 'benchmarken'. De frequentie van $36/49$ blijft echter relatief laag in vergelijking met de andere breuken in de itemset.

De twee breuken vertoonden in beide onderwijsniveaus hoge schattingsfouten. De mediaan PAE bij 36/49 bedroeg 4,5% in het zesde leerjaar en 4,8% in het vijfde middelbaar. De mediaan PAE bij 15/19 bedroeg 4,7% in het zesde leerjaar en 4,4% in het vijfde middelbaar. Deze schattingsfouten tonen aan dat 'benchmarken' bij deze breuken minder nauwkeurig is.

Wat betreft algemene beoordeling, werd één trial uit het zesde leerjaar gecodeerd als 'inaccuraat', namelijk bij de breuk 15/19. In het vijfde middelbaar werd bij twaalf trials de beoordeling 'inaccuraat' gegeven, namelijk zes bij 15/19 en zes bij 36/49. Deze 'inaccuraat' beoordelingen hangen samen met de gemaakte keuzes binnen de stap 'encoderen'. Zes leerlingen uit het vijfde middelbaar kozen er namelijk voor om de breuk 36/49 bij benadering te transformeren naar $\frac{6}{7}$ door de vierkantswortel van de teller en de noemer te nemen. Deze transformatie is mathematisch fout en leidde naar de beoordeling 'inaccuraat'. Dit resulteerde eveneens in hogere schattingsfouten, omdat deze leerlingen het eindpunt van de getallenlijn als benchmark gebruikten en dan compenseerden.

Binnen het zesde leerjaar, werd bij acht trials van 15/19 en bij twee trials van 36/49 naar een andere breuk herleid. Binnen het vijfde middelbaar ging het om elf trials bij 15/19 en acht trials bij 36/49. De breuk 36/49 werd in twee trials van het vijfde middelbaar herleid naar een decimaal getal. Het herleiden van 15/19 naar een andere breuk leidt in beide onderwijsniveaus tot een hogere schattingsfout. Deze aanpak was dus minder succesvol bij deze breuk. Bij de breuk 36/49 was dit patroon niet specifiek waarneembaar.

Binnen de stap 'finaliseren' werd enkel 'compenseren' toegepast bij de breuken 36/49 en 15/19. In het zesde leerjaar werd bij negen van de zestien trials van 15/19 en bij negen van de tien trials van 36/49 gecompenseerd. In het vijfde middelbaar gebeurde dit bij 38 van de 50 trials van 15/19 en bij 13 van de 22 trials van 36/49. De schattingsfouten bij 36/49 zijn opvallend kleiner dan bij 15/19, wanneer er niet wordt gecompenseerd. Dit verschil kan mogelijk verklaard worden door de positie van de breuk ten opzichte van het referentiepunt 0,75. De breuk 36/49 ligt dicht bij 0,75, waardoor de initiële schattingsfout, die ontstaat bij 'benchmarken', kleiner is. De breuk 15/19 ligt verder van 0,75, waardoor er een grotere fout is indien er wordt gebenchmarkt zonder te compenseren. Indien er wel wordt gecompenseerd bij beide breuken, leidde dit voornamelijk in het vijfde middelbaar tot een accuratere schatting dan niets doen. Dit verschil is minder uitgesproken in het zesde leerjaar.

De breuken 93/94 en 10/11 werden geselecteerd om het gebruik van de strategie 'benchmarken' uit te lokken naar het eindpunt van de getallenlijn (1). Binnen het zesde leerjaar werd deze strategie het vaakst toegepast bij 93/94 (13,4%). Ook in het vijfde middelbaar werd 'benchmarken' het meeste gehanteerd bij deze breuk (10,5%). De breuk 10/11 werd iets minder opgelost met benchmarken in vergelijking met de andere breuken, namelijk 7,4% in het zesde leerjaar en 7,7% in het vijfde middelbaar.

Er was ook een duidelijk verschil in schattingsfouten tussen beide breuken. De breuk $93/94$ werd in beide onderwijsniveaus zeer accuraat geschat, namelijk met een schattingsfout van 0,9%. Deze breuk lokte dus niet alleen het vaakst deze strategie uit maar werd ook het nauwkeurigst ingeschat. De breuk $10/11$ daarentegen had een hogere schattingsfout van 3,1%.

Het verschil in schattingsfout kan niet worden verklaard door de algemene beoordeling van de trials. Bij beide onderwijsniveaus werden namelijk alle trials als 'correct' gecodeerd.

Binnen de stap 'encoderen' werd zelden een benaderende transformatie naar een andere breuk of een decimaal getal uitgevoerd. Bij de breuk $10/11$ werd in het zesde leerjaar in één trial naar een andere breuk getransformeerd. Bij de breuk $93/94$ werd getransformeerd bij twee trials naar een andere breuk en bij één trial naar een decimaal getal, eveneens bij het zesde leerjaar. Er werd geen acties uitgevoerd binnen deze stap bij het vijfde middelbaar. Het toepassen van een transformatie leidde ook niet tot significant lagere schattingsfouten.

Binnen de stap 'finaliseren' werd opmerkelijk vaak gecompenseerd. In het zesde leerjaar gebeurde dit bij 16 van de 17 trials van $10/11$ en bij 27 van de 31 trials van $93/94$. In het vijfde middelbaar werd 'compenseren' toegepast bij alle 45 trials van $10/11$ en bij 60 van de 61 trials van $93/94$. Er werd in één geval uit het zesde leerjaar bij $93/94$ gecorrigeerd. Deze hoge aantallen waarin 'compenseren' werd toegepast, suggereren dat leerlingen zich bij deze breuken meer bewust waren van het verschil in decimale waarde tussen deze breuken en het referentiepunt 1, in vergelijking met de eerdere benchmarks zoals 0,75 of 0,25. Het begrip van één geheel (1) is dan ook concreter, waardoor het voor de leerlingen makkelijker wordt om in te schatten dat een breuk net geen geheel vormt en hoe dicht ze dan bij dat geheel ligt. Dit vergemakkelijkt de beslissing om te compenseren. Het verschil in schattingsfout kan mogelijk verklaard worden door hoe dicht de breuken bij het eindpunt liggen. De breuk $10/11$ ligt verder van 1 dan $93/94$. Hierdoor is er een grotere compensatie nodig om tot een nauwkeurigere schatting te komen.

4.4.4.4 *Frequentie en schattingsfout per item voor 'geen strategie'*

Tabel 14 toont de frequentie en schattingsfout, uitgedrukt in mediaan Percentage of Absolute Error (PAE) en bijhorende standaardafwijking (SD), voor 'geen strategie', opgesplitst naar breuk en onderwijsniveau. De breuken zijn gerangschikt op basis van hun decimale waarde. Er werden voor deze strategie geen specifieke breuken uitgekozen.

Zoals eerder vermeld (zie sectie 4.4.1), gebruikten de leerlingen uit het zesde leerjaar bij 118 trials geen strategie bij het positioneren van de breuk op de getallenlijn. De breuken waar dit het vaakst bij voorkwam, waren $15/59$ (11,9%), $2/11$ (11,0%), $2/9$ (10,2%) en $2/81$ (10,2%). Het gebruik van geen strategie was anderzijds het minst frequent bij de breuken $8/17$ (2,5%), $5/12$ (3,4%) en $40/79$ (3,4%).

De laagste mediaan PAE's kwamen voor bij de breuken $2/81$ (2,3%), $2/9$ (2,5%) en $2/11$ (2,8%). De hoogste werden daarentegen waargenomen bij de breuken $40/79$ (26,8%), $8/17$ (22,1%) en $4/7$ (15,6%), waarvan de decimale waarde zich dichtbij 0,5 bevinden.

Opmerkelijk is dat de breuken die het vaakst zonder een strategie werden geschat, zoals $2/81$, $2/9$ en $2/11$, ook de laagste mediaan PAE's hadden. Deze breuken hebben allen ook een relatief kleine decimale waarde. Dit suggereert dat de leerlingen bij dergelijke breuken vlugger geneigd waren om te schatten zonder een specifieke strategie toe te passen en dit leidde tot een relatief hoge nauwkeurigheid. Daartegenover staan de breuken die zich bevinden rond het midden van de getallenlijn, zoals $40/79$ en $8/17$, waarbij 'geen strategie' zelden werd toegepast en waarbij de mediaan PAE's de hoogste zijn. Dit impliceert dat leerlingen bij dergelijke breuken meer geneigd waren om wel een strategie toe te passen en indien ze dit niet deden, ging dit gepaard met grotere schattingsfouten.

In het vijfde middelbaar werd er in totaal bij 190 trials geen strategie gebruikt. De breuken met de hoogste frequentie waren $36/49$ (16,3%), $2/11$ (15,8%), $2/9$ (14,7%) en $1/13$ (13,7%). De breuken $40/79$ (0,5%), $93/94$ (1,1%), $8/17$ (1,6%) en $4/7$ (1,6%) hadden daarentegen de laagste frequentie. De laagste mediaan PAE's kwamen voor bij de breuken $93/94$ (1,4%), $1/13$ (2,5%) en $10/11$ (2,7%), terwijl de hoogste voorkwamen bij de breuken $8/17$ (37,1%), $4/7$ (20,6%) en $40/79$ (13,9%). Dit patroon weerspiegelde de bevinding uit het zesde leerjaar, waarbij de breuken met een decimale waarde rond 0,5 minder vaak zonder strategie werden geschat en ook een hogere schattingsfout vertoonden. Hoewel de breuken met een kleinere decimale waarde hier eveneens een hogere frequentie vertoonden, vergelijkbaar met het zesde leerjaar, leidde dit in het vijfde middelbaar niet specifiek tot een kleinere schattingsfout ten opzichte van de andere breuken.

Voor 'geen strategie' werden bovendien voorafgaand geen specifieke breuken opgesteld om deze aanpak uit te lokken, in tegenstelling tot de andere strategieën. De resultaten werden hier dus niet gestuurd door het ontwerp van de taak.

Tabel 14

Frequentie en schattingsfout van 'geen strategie' per breuk en leerjaar, met mediaan PAE en bijhorende standaardafwijking

Breuk	L6		M5	
	Aantal trials (%)	Mediaan PAE (SD)	Aantal trials (%)	Mediaan PAE (SD)
2/81	12 (10,2%)	2,3 (5,9)	9 (4,7%)	8,0 (7,4)
1/13	10 (8,5%)	5,4 (22,2)	26 (13,7%)	2,5 (3,2)
2/11	13 (11,0%)	2,8 (4,1)	30 (15,8%)	4,0 (10,6)
2/9	12 (10,2%)	2,5 (5,2)	28 (14,7%)	3,5 (5,6)
6/25	10 (8,5%)	6,0 (14,1)	13 (6,8%)	4,5 (5,0)
15/59	14 (11,9%)	7,9 (6,7)	12 (6,3%)	6,0 (5,2)
5/12	4 (3,4%)	14,7 (7,9)	5 (2,6%)	7,7 (5,0)
8/17	3 (2,5%)	22,1 (12,1)	3 (1,6%)	37,1 (20,9)
40/79	4 (3,4%)	26,8 (12,0)	1 (0,5%)	13,9 (—)
4/7	7 (5,9%)	15,6 (11,9)	3 (1,6%)	20,6 (8,5)
36/49	10 (8,5%)	3,2 (3,7)	31 (16,3%)	5,0 (4,1)
15/19	8 (6,8%)	4,4 (17,5)	15 (7,9%)	3,9 (5,1)
10/11	6 (5,1%)	6,0 (23,7)	12 (6,3%)	2,7 (3,4)
93/94	5 (4,2%)	3,9 (5,0)	2 (1,1%)	1,4 (1,4)
Totaal	118 (100%)	5,3 (12,7)*	190 (100%)	3,8 (7,3)*

De totale waarden voor de mediaan PAE en standaardafwijking (SD) houden rekening met frequentieverschillen per breuk en zijn dus niet rechtstreeks afgeleid van de mediaanwaarden per breuk.

5 CONCLUSIE

Mensen komen dagelijks in aanraking met getallen en hun representaties. Het Vlaamse onderwijssysteem laat leerlingen daarom stapsgewijs kennismaken met natuurlijke en rationale getallen, zoals breuken en decimale getallen. Toch ervaren veel leerlingen en volwassenen moeilijkheden bij het begrijpen en toepassen van breuken (bijv. Bonato et al., 2007; Obersteiner et al., 2013; Van Hoof et al., 2015). Dit is zorgwekkend, aangezien een goed begrip van rationale getallen sterk samenhangt met algemene wiskundeprestaties (bijv. Siegler et al., 2012; Van Hoof et al., 2017).

Een mogelijke verklaring voor deze moeilijkheden ligt in de afwijkende structuur van breuken. In tegenstelling tot natuurlijke en decimale getallen, die worden voorgesteld in een decimaal systeem, drukken breuken een verhouding uit tussen een teller en een noemer. Dit maakt het conceptueel uitdagender om hun waarde intuïtief te begrijpen en correct in te schatten (Seunarine-MacKay, 2021).

Om zicht te krijgen op hoe leerlingen breuken begrijpen en schatten, werd in onderzoek vaak gebruikgemaakt van de Number Line Estimation (NLE)-taak. Op basis van deze taak werd onderzocht welke strategieën leerlingen gebruikten bij het plaatsen van breuken op een getallenlijn en hoe die samenhangen met de nauwkeurigheid van de schatting. De bevindingen toonden aan dat het toepassen van correcte strategieën leidde tot een accuratere schatting van breuken (bijv. Siegler et al., 2011; Zhang et al., 2011).

In dit kader voerde Hofmans (2022) een exploratieve studie uit naar het strategiegebruik van zesdeklassers met verschillende wiskundige competenties bij het schatten van breuken op een getallenlijn. Zij maakte daarbij gebruik van de NLE-taak. Daarnaast ontwikkelde ze een codeerschema waarmee ze het strategiegebruik systematisch kon classificeren, coderen en analyseren in relatie tot item- en leerlingkenmerken. In dit driedelig codeerschema werd elke trial eerst globaal beoordeeld als 'correct', 'inaccuraat' of 'rest'. Het schatten van de breuk werd vervolgens opgesplitst in drie stappen, namelijk 'encoderen', 'positioneren' en 'finaliseren'.

Hoewel Hofmans (2022) aantoonde dat de strategiekeuze en adaptief strategiegebruik samenhangen met de schattingsnauwkeurigheid, beperkte haar studie zich enkel tot leerlingen uit het zesde leerjaar. Hierdoor werd niet duidelijk in hoeverre onderwijsniveau of expertise een invloed uitoefende op het strategiegebruik en de schattingsfouten.

Het huidig onderzoek vergeleek daarom leerlingen uit het zesde leerjaar en vijfde middelbaar. Er werd via een gelijkaardig onderzoeksopzet nagegaan hoe deze onderwijsniveaus verschilden in hun strategiegebruik en adaptiviteit en welk effect dit had op hun schattingsfouten. De bevindingen van dit onderzoek sloten grotendeels aan bij eerder onderzoek, maar brachten ook verschillen naar voren. Hieronder worden de belangrijkste resultaten besproken.

De verdeling van de algemene beoordelingen ('correct', 'inaccuraat' en 'rest') verschilden opmerkelijk tussen de leerlingen uit het zesde leerjaar en het vijfde middelbaar. Leerlingen uit het vijfde middelbaar toonden significant vaker een correct begrip van breuken, maakten minder conceptuele fouten en vertoonden minder rekenfouten bij het positioneren op de getallenlijn. Een aannemelijke verklaring hiervoor is dat ze een dieper inzicht in breuken hebben ontwikkeld dankzij meer blootstelling en door herhaalde oefening. Deze ervaring draagt bij tot het begrijpen van wiskundige concepten, zoals verhoudingen en proporties, en bevordert de automatisering van rekenvaardigheden, zoals het correct uitvoeren van verschillende basisbewerkingen.

Leerlingen uit het vijfde middelbaar schatten daarnaast breuken nauwkeuriger dan leerlingen uit het zesde leerjaar. Deze bevinding sluit aan bij eerdere studies van Siegler et al. (2011) en Zhang et al. (2017). Zij toonden eveneens aan dat het onderwijsniveau van leerlingen meebepalend was voor de nauwkeurigheid van hun schattingen. Daarmee worden ook de resultaten van Hofmans (2022) verder uitgebreid, die eerder aantoonde dat binnen het zesde leerjaar een hogere wiskundige competentie samenging met nauwkeurigere schattingen.

In de stap 'encoderen' kozen leerlingen van beide onderwijsniveaus er voornamelijk voor om de breuk niet te transformeren. Dit patroon kwam ook naar voren in het onderzoek van Hofmans (2022). Het vijfde middelbaar behaalde de laagste schattingsfout wanneer ze binnen deze stap geen actie ondernamen. Dit suggereert dat deze leerlingen minder afhankelijk zijn van transformaties om tot een accurate schatting te komen.

In de stap 'positioneren' gebruikte het zesde leerjaar het vaakst 'eenmaal segmenteren'. In het vijfde middelbaar was 'benchmarken' de meest toegepaste strategie. 'Getrapt segmenteren' werd in beide groepen zelden gebruikt, maar leidde wel tot de laagste schattingsfouten. Dit moet wel met enige voorzichtigheid geïnterpreteerd worden, gezien het lage aantal trials. Post-hoc paarsgewijze contrasten toonden aan dat het gebruik van strategieën binnen 'positioneren' in beide onderwijsniveaus leidde tot significant lagere schattingsfouten, in vergelijking met wanneer er geen strategie werd toegepast. Deze bevindingen sluiten aan bij eerder onderzoek (Siegler et al., 2011; Zhang et al., 2017; Hofmans, 2022). Dit toonde eveneens aan dat strategiegebruik bijdraagt aan nauwkeurigere schattingen. Verder bleek dat het vijfde middelbaar, met uitzondering van 'getrapt segmenteren', significant lagere schattingsfouten behaalde binnen elke strategie dan het zesde leerjaar.

In de laatste stap 'finaliseren' compenseerden leerlingen uit het vijfde middelbaar vaker dan leerlingen uit het zesde leerjaar. Ze behaalden daarbij ook lagere schattingsfouten. Mogelijk zetten deze leerlingen deze aanpak gericht in, wanneer zij inschatten dat een verfijning nodig was. Een andere mogelijkheid is dat het compenseren leidde tot een nauwkeurigere schatting, omdat ze het beter uitvoerden. De hoogste schattingsfouten werden gevonden bij de trials waarin leerlingen corrigeerden. Dit kan erop wijzen dat deze strategie voornamelijk werd gebruikt bij breuken waar de leerlingen gemaakte fouten wilden herstellen,

wat op zich al met een hogere foutmarge gepaard gaat. Het is eveneens opvallend dat de leerlingen uit het zesde leerjaar die niets deden, minder accuraat waren dan de leerlingen die compenseerden. Dit patroon was afwezig bij het vijfde middelbaar, waar de nauwkeurigheid vergelijkbaar was tussen de leerlingen die geen actie ondernamen en diegene die compenseerden. Dit verschil suggereert dat leerlingen in het vijfde middelbaar nauwkeuriger konden schatten zonder een compenserende strategie toe te passen, terwijl de leerlingen uit het zesde leerjaar mogelijk meer baat hebben met te compenseren in tegenstelling tot niets doen.

Het algemene verschil in schattingsfout tussen de onderwijsniveaus kwam vooral tot uiting wanneer leerlingen de breuk niet benaderend transformeerden ('encoderen') of geen aanpassing uitvoerden ('finaliseren'). Dit suggereert dat de grootste verschillen in nauwkeurigheid vermoedelijk niet voortkwamen uit de stappen 'encoderen' en 'finaliseren' maar samenhangen met het strategiegebruik tijdens de stap 'positioneren'.

Hofmans (2022) vond een significante samenhang tussen de diversiteit in strategiegebruik en de accuraatheid van de schatting. In dit onderzoek werd dit verband opnieuw onderzocht, maar werd er geen significante correlatie gevonden tussen de mediaan PAE en de diversiteit. Het verband tussen onderwijsniveau en diversiteit was eveneens niet significant. Deze bevindingen kunnen geïnterpreteerd worden binnen het theoretisch kader van Verschaffel et al. (2009), die een onderscheid maakte tussen strategie-flexibiliteit en strategie-adaptiviteit. Mogelijk is dus niet de hoeveelheid gebruikte strategieën doorslaggevend voor een accurate schatting, maar eerder het vermogen om per item de meest geschikte strategie te kiezen. Het zou dus kunnen dat adaptiviteit, eerder dan diversiteit, een grotere invloed heeft op het bekomen van een grote schattingsnauwkeurigheid.

Om dit verder te onderzoeken, werd er gekeken naar de schattingsfout per item per onderwijsniveau. In het zesde leerjaar varieerden de schattingsfouten sterk per breuk. Breuken met grote noemers behaalden hoge schattingsfouten, terwijl breuken dicht bij 0 of 1 gepaard gingen met de laagste fouten. Het M-patroon, dat Hofmans (2022) rapporteerde, werd in deze studie niet teruggevonden. In het vijfde middelbaar waren de fouten kleiner, gelijkmatiger verdeeld en minder afhankelijk van de noemergrootte.

Ten slotte werd de frequentie en de bijhorende schattingsfout per breuk per strategie onderzocht. De positie van de breuk op de getallenlijn en de grootte van noemer lijken een invloed te hebben op het gebruik van 'eenmaal segmenteren'. Deze strategie werd voornamelijk toegepast bij breuken met kleine noemers in beide onderwijsniveaus, waarschijnlijk omdat de getallenlijn dan eenvoudiger en overzichtelijker te verdelen is. Breuken met grote noemers of dichtbij 0 of 1 lokten deze strategie minder vaak uit. Dit vraagt ook meer tijd en een hogere nauwkeurigheid bij het verdelen van de getallenlijn, omdat die in veel kleine, gelijkmatige segmenten moet worden opgesplitst. De schattingsfouten varieerden sterk in het zesde leerjaar. In het vijfde middelbaar waren de fouten kleiner.

‘Getrapt segmenteren’ werd amper gebruikt. In beide groepen werd deze strategie vooral toegepast bij breuken waarvan de decimale waarde zich aan het begin van de getallenlijn bevindt, ongeacht de grootte van de noemer. Het is opvallend dat leerlingen uit het zesde leerjaar deze strategie ook vaak toepasten bij breuken met priemgetallen als noemer, ondanks dat deze getallen een beperkte deelbaarheid hebben. Desondanks gingen deze breuken in dit onderwijsniveau gepaard met een lage schattingsfout. In het vijfde middelbaar werd ‘getrapt segmenteren’ wel vaker toegepast bij breuken met samengestelde noemers. De nauwkeurigheid lag hier over het algemeen iets hoger.

‘Benchmarks’ werd in beide groepen vooral toegepast bij breuken dicht bij 0,5 en 1. Deze breuken leidden ook tot lage schattingsfouten, wat duidt op een doeltreffend gebruik van de strategie. Breuken die verder verwijderd waren van benchmarks werden zelden met deze strategie opgelost. Dit is niet verrassend, aangezien dit ook leidde tot grotere fouten. Een mogelijke verklaring hiervoor is dat er onvoldoende gecompenseerd werd ten opzichte van het referentiepunt.

In beide onderwijsniveaus werd bij breuken met een kleine decimale waarde vaker ‘geen strategie’ gebruikt. In het zesde leerjaar leidde dit tot lagere schattingsfouten. Dit effect was minder uitgesproken in het vijfde middelbaar. Breuken, die zich rond het middelpunt van de getallenlijn bevonden, gingen in beide groepen gepaard met hogere fouten en lage frequenties. Dit suggereert dat deze breuken meer nood hebben aan de toepassing van een strategie om tot een accurate schatting te komen.

Samenvattend toonden de resultaten aan dat zowel het onderwijsniveau als het strategiegebruik een rol spelen bij het accuraat schatten van breuken op een getallenlijn. Leerlingen uit het vijfde middelbaar schatten over het algemeen nauwkeuriger dan leerlingen uit het zesde leerjaar. Dit verschil leek eerder samen te hangen met het strategiegebruik binnen de stap ‘positioneren’ dan met ‘encoderen’ of ‘finaliseren’. Daarnaast bleek dat itemkenmerken, zoals de noemergrootte en de ligging ten opzichte van referentiepunten, het strategiegebruik en de schattingsnauwkeurigheid sterk beïnvloedden.

6 DISCUSSIE

In dit hoofdstuk worden de belangrijkste sterktes en beperkingen van het huidige onderzoek besproken. De bevindingen worden kritisch geëvalueerd en geïnterpreteerd binnen een breder kader. Daarnaast worden aanbevelingen geformuleerd voor toekomstig onderzoek en mogelijke implicaties voor het onderwijs toegelicht.

Een eerste belangrijke overweging heeft betrekking op de grootte en samenstelling van de steekproef. De huidige steekproef is ruimer van opzet dan die van Hofmans (2022). In haar onderzoek namen 69 leerlingen uit het zesde leerjaar deel. Deze leerlingen werden onderverdeeld op basis van hun wiskundecompetentie, waarvan 22 leerlingen de letterscore A hadden, 18 leerlingen de letterscore B, 15 leerlingen de letterscore C en 14 leerlingen de letterscore D+E. Hofmans (2022) voerde eveneens een vergelijkende studie uit, maar dan binnen één onderwijsniveau. In het huidige onderzoek werden twee verschillende onderwijsniveaus met elkaar vergeleken, namelijk het zesde leerjaar ($n = 60$) en het vijfde middelbaar ($n = 71$). Hierdoor konden zowel binnen als tussen beide onderwijsniveaus vergelijkingen worden gemaakt. De totale steekproef bleef echter relatief beperkt ten opzichte van de volledige Vlaamse leerlingenpopulatie, waardoor de resultaten niet met zekerheid generaliseerbaar zijn. De deelnemers werden bovendien gerekruteerd uit slechts drie basisscholen en drie middelbare scholen, gelegen in Limburg en Vlaams-Brabant. De verdeling van leerlingen over de scholen was ook ongelijk, waardoor er een overschatting kan ontstaan van school- of klasgebonden effecten. Dergelijke beperkingen zijn onvermijdelijk in kleinschalig onderzoek, maar moeten wel in het achterhoofd gehouden worden. Contextuele factoren, zoals regio of gebruikte leermaterialen, kunnen immers invloed hebben op het strategiegebruik van de leerlingen. Daarnaast spelen ook kindgebonden factoren een belangrijke rol, zoals de socio-economische achtergrond van de leerling. Deze factoren beïnvloeden mee hoe leerlingen wiskunde instructies verwerken en welke strategieën ze inzetten. Uit het PISA-onderzoek van 2022 (Programme for International Student Assessment) bleek namelijk dat 18,8% van de variatie in wiskundeprestaties van Vlaamse leerlingen verklaard kan worden door hun socio-economische status (De Meyer et al., 2023). De socio-economische achtergrond kan dus een invloed hebben bij de prestaties van de leerlingen. Dit werd echter niet in kaart gebracht binnen dit onderzoek.

Dit brengt ons tot de tweede beperking van het onderzoek, namelijk de instructiestijl van de leerkracht. De leerlingen zijn per klasgroep geselecteerd en kregen vermoedelijk ook een gelijkaardige didactische aanpak rond breuken. De instructiestijl van de leerkracht, zoals het al dan niet expliciet aanleren van strategieën, kan een grote invloed hebben op hoe leerlingen met breuken omgaan. Dit werd binnen dit onderzoek niet onderzocht. Toekomstig onderzoek zou deze onderwijscontext eveneens kunnen analyseren door bijvoorbeeld de lespraktijken, instructievormen of leermiddelen te bestuderen.

Er werd binnen het vijfde middelbaar geen onderscheid gemaakt tussen de verschillende studierichtingen. Dit vormt een beperking, aangezien deze leerlingen mogelijk uiteenlopende wiskundige profielen hebben. In tegenstelling tot het zesde leerjaar, waar de leerlingen een homogene voorkennis hebben, varieert de voorkennis van de leerlingen uit het vijfde middelbaar per studierichting. Het is aannemelijk dat leerlingen uit richtingen met een grotere focus op wiskunde, zoals 'wetenschappen-wiskunde' of 'Latijn-wiskunde', breuken anders benaderen dan leerlingen uit bijvoorbeeld 'humane wetenschappen'. Het opnemen van deze studierichtingen zou in toekomstig onderzoek meer inzicht kunnen bieden in de mate waarin wiskundige voorkennis en oefening invloed hebben op strategiegebruik en adaptiviteit.

Dit onderzoek bood inzicht in de verschillen tussen twee onderwijsniveaus, namelijk het zesde leerjaar en het vijfde middelbaar. Om de evolutie van het strategiegebruik, adaptiviteit en accuraatheid in kaart te brengen doorheen de schoolloopbaan, zou een longitudinaal ontwerp geschikt zijn. Hierbij zouden leerlingen over meerdere leerjaren kunnen worden opgevolgd. Op deze manier kan ook geobserveerd worden of de strategieën veranderen, verfijnd of vervangen worden.

Trials die in de 'rest'categorie vielen, werden in dit onderzoek uitgesloten van verdere analyses. Deze foutieve of onduidelijke aanpakken kunnen echter waardevolle informatie bevatten over misconcepties die er bij de leerlingen leven. Zoals eerder onderzocht door Zhang et al. (2017), kunnen er verschillende soorten verkeerde strategieën voorkomen, zoals het gebruiken van de getallenlijn als meetlat. Een analyse van deze fouten kan ook een beter begrip opleveren van de hardnekkige denkfouten die leerlingen maken bij breuken en zo richting geven aan remediëring binnen het onderwijs.

De strategie 'eenmaal segmenteren' leidde in dit onderzoek bij bepaalde breuken met een grote noemer, zoals $93/94$, tot lage schattingsfouten. De vraag blijft echter of dit ook de meest efficiënte strategie is. Leerlingen die deze strategie toepassen bij breuken met grote noemers en deze tijdens het 'encoderen' niet transformeren, zijn vaak veel langer bezig met het tekenen van streepjes en intensief tellen. Deze strategie vergt meer tijd en energie in vergelijking met andere strategieën zoals 'benchmarken'. Dit verschil werd ook waargenomen tijdens de afname van de schattingstaken. Leerlingen uit het zesde leerjaar maakten het vaakst gebruik van de strategie 'eenmaal segmenteren' bij het schatten van breuken, terwijl in het vijfde middelbaar 'benchmarken' het populairst was. Daardoor namen de afnames in het zesde leerjaar beduidend meer tijd in beslag. Toekomstig onderzoek zou, naast de accuraatheid, ook het tijdsaspect van de strategieën kunnen meenemen. Er kan op deze manier onderzocht worden welke strategieën het meest kosteneffectief zijn in functie van de onderwijspraktijk.

Er werd voor de strategie 'getrapt segmenteren' een lage frequentie waargenomen. Hoewel deze strategie in beide onderwijsniveaus tot relatief nauwkeurige schattingen leidde, werd ze zelden spontaan toegepast. Dit sluit aan bij de bevindingen van Hofmans (2022), die eveneens een beperkt gebruik van deze strategie rapporteerde. Wij sluiten ons aan bij haar

suggestie om in vervolgonderzoek gebruik te maken van het choice/no-choice paradigma, waarbij leerlingen verplicht worden om een strategie bij een item toe te passen. In dit paradigma wisselen condities, waarin leerlingen zelf een strategie mogen kiezen ('choice'), zich af met condities, waarin een specifieke strategie wordt opgelegd ('no-choice') (Luwel et al., 2009). Dit paradigma maakt het mogelijk om de nauwkeurigheid van een strategie te beoordelen, los van de voorkeuren van de leerlingen. Op deze manier kan er betrouwbaarder worden geconcludeerd of strategieën, zoals 'getrapt segmenteren' inderdaad accurater zijn en of dat zo is voor alle leerlingen.

Een opvallende fout die in dit onderzoek werd waargenomen was dat sommige leerlingen de breuk $\frac{36}{49}$ herleidden naar $\frac{6}{7}$ door de vierkantswortel te nemen van de teller en de noemer. Deze redenering is echter wiskundig incorrect. Leerlingen uit het vijfde middelbaar maakten mogelijk accuratere schattingen door hun grotere ervaring met breuken, maar in dit geval werkte die ervaring net in hun nadeel. Ze pasten bepaalde wiskundige eigenschappen te veralgemenend toe. Leerlingen uit het zesde leerjaar maakten deze fout niet, vermoedelijk omdat zij nog niet vertrouwd zijn met het concept van vierkantswortels. Dit illustreert dat fouten niet altijd voortkomen uit een gebrek aan ervaring, maar ook het gevolg kunnen zijn van het onjuist toepassen van kennis. Dit onderstreept het belang van expliciete instructie over de beperkingen van wiskundige regels. Leerlingen moeten weten hoe een regel werkt, maar ook wanneer die wel of niet toepasbaar is.

Ten slotte kunnen op basis van de resultaten enkele mogelijke belangrijke implicaties voor de onderwijspraktijk worden geformuleerd. In de eerste plaats bleek dat het gebruik van strategieën sterk samenhangt met de nauwkeurigheid van de schattingen. Dit benadrukt het belang van het expliciet aanleren en actief inoefenen van verschillende strategieën. Daarbij is het essentieel dat leerlingen niet alleen leren hoe ze een strategie toepassen, maar ook wanneer en waarom dit zinvol is.

De leerlingen van het vijfde middelbaar bekwamen accuratere schattingen dan de leerlingen van het zesde leerjaar. Dit ligt in lijn met het gezegde 'oefening baart kunst'. Het is namelijk aannemelijk dat deze leerlingen door hun toegenomen ervaring een beter inzicht hebben verworven in breuken en hun structuur. Hoe meer kansen de leerlingen krijgen om te oefenen met breuken, hoe groter de kans dat ze hierin vaardiger worden.

De resultaten lieten eveneens zien dat het aantal gebruikte strategieën niet het verschil maakte, maar wel het vermogen om per breuk de meest geschikte strategie te selecteren. Het onderwijs moet daarom sterker inzetten op het ontwikkelen van vaardigheden die leerlingen helpen om strategieën doelgericht in te zetten, bijvoorbeeld door hen te leren specifieke itemkenmerken te identificeren. Dergelijke kenmerken spelen namelijk een belangrijke rol. Breuken met grote noemers of breuken die dicht bij het midden van de getallenlijn lagen, bleken moeilijker voor de leerlingen en vereisten vaker een strategie om tot een nauwkeurigere schatting te komen. Leerkrachten moeten dus ook voldoende variatie aanbieden in het soort

breuken, zodat leerlingen ook met complexere breuken vertrouwd geraken. Daarnaast kunnen de leerkrachten ook de strategieën expliciet koppelen aan specifieke itemkenmerken om leerlingen te helpen bij het accuraat schatten van een breuk.

LITERATUURLIJST

- Ashcraft, M.H., & Moore, A.M. (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111(2), 246-267. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.08.005>
- Baxter, K., Courage, C. & Caine, K. (2015) Chapter 7: During Your User Research Activity. In Baxter, K., Courage, C., Caine, K. (2nd ed.), *Understanding your Users: A Practical Guide to User Research Methods* (pp. 158 - 189). Massachusetts, MA: Elsevier.
- Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 33, 1410-1419.
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Society for Research in Child Development*, 79(4), 1016–1031. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2008.01173.x>
- Carreyn, B., Geeurickx, F., & Van Nieuwenhuyze, R. (2022a). *Module 1: Inzicht in getallen*. Die Keure.
- Carreyn, B., Geeurickx, F., & Van Nieuwenhuyze, R. (2022b). *Module 2: Hoofdbewerkingen met gehele getallen*. Die Keure.
- Carreyn, B., Geeurickx, F., & Van Nieuwenhuyze, R. (2024). *Module 12: Rationale getallen*. Die Keure.
- DATAtab Team. (2025a). *Kruskal-Wallis-Test*. Datatab. <https://datatab.net/tutorial/kruskal-wallis-test>
- DATAtab Team. (2025b). *Mann-Whitney U-test*. DATAtab. <https://datatab.net/tutorial/mann-whitney-u-test>
- DATAtab Team. (2025c). *Parametric and non-parametric tests*. DATAtab. <https://datatab.net/tutorial/parametric-and-non-parametric-tests>
- DATAtab Team. (2025d). *Spearman's rank correlation coefficient*. Datatab. <https://datatab.net/tutorial/spearman-correlation>
- De Meyer, I., Berlamont, L., Hoedt, L., Janssens, R., Lermytte, A., Warlop, N., & van Braak, J. (2023). *Vlaams rapport PISA2022*. Universiteit Gent. https://www.pisa.ugent.be/uploads/files/Vlaams-Rapport_PISA2022.pdf
- Gemeenschapsonderwijs. (s.d.). *Leerplan wiskunde lager onderwijs*. Go! Pro. <https://pro.go.be/themas/leerplannen/basisonderwijs/wiskunde/>
- Groep Wetenschap en Technologie. (2024). *Zelfstudiepakket Wiskunde*. Katholieke Universiteit Leuven. https://set.kuleuven.be/voorkennis/zomercursus/zomercursusZ/logica/verzamelingen_lig ht
- Hofmans, M. (2022). *Strategiegebruik van zesdeklassers bij het schatten van breuken op een getallenlijn* [Masterproef, KU Leuven]. Limo.

- Iuculano, T., & Butterworth, B. (2011). Rapid communication: Understanding the real value of fractions and decimals. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 64(11), 2088–2098. <https://doi.org/10.1080/17470218.2011.604785>
- Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159–174.
- Latif, S., Qayyum, J., Lal, M., & Khan, F. (2011) Novel Approach to the Learning of Various Number Systems. *International Journal of Computer Applications*. 26. 18-28. 10.5120/3116-4283.
- Luwel, K., Onghena, P., Torbeyns, J. Schillemans, V., & Verschaffel, L. (2009). Strengths and weaknesses of the choice/no-choice method in research on strategy use. *European Psychologist*, 14(4), 351-362. doi:10.1027/1016-9040.14.4.351
- Nahhas, R. W. (2025, 13 februari). *Introduction to Regression Methods for Public Health Using R*. Bookdown. <https://bookdown.org/rwnahhas/RMPH/>
- Newman, R.S., & Berger, C.F. (1984). Children's numerical estimation: Flexibility in the use of counting. *Journal of Educational Psychology*, 76(1), 55-64. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.76.1.55>
- Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, 28, 64-72.
- Peeters, D., Degrande, T., Ebersbach, M., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2015). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education*, 31(2), 117-134. <https://doi.org/10.1007/s10212-015-0251-z>
- Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. *Society for Research in Child Development*, 89(5), 1467-1484. <https://doi.org/10.1111/cdev.13068>
- Seunarine-MacKay, K.J. (2021). *Sizing up numbers: Exploring individuals' numerical magnitude understanding of natural and rational numbers using eye tracking* [Doctoral dissertation, KU Leuven]. Lirias.
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Society for Research in Child Development*, 75(2), 428–444. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x>
- Siegler, R.S., Duncan, G.J., Kean, P.E, Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697. doi: 10.1177/0956797612461752
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>
- Siegler, R.S., & Opfer, J.E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Association for Psychological Science*, 14(3), 237-250. <https://doi.org/10.1111/1467-9280.02438>

- Siegler, R.S., & Thompson, C.A. (2014). Numerical landmarks are useful - except when they're not. *Journal of Experimental Child Psychology*, 120, 39-58. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.11.014>
- Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 84–106. <https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.82>
- Van Hoof, J., Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2017). The transition from natural to rational number knowledge. In *acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 101-123). London, England: Elsevier.
- Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. In *Learning and Instruction* (Vol. 37, Number 37, pp. 30–38). Pergamon Press. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.004>
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359. <https://doi.org/10.1007/BF03174765>
- Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming (2010). *Ontwikkelingsdoelen en eindtermen voor het gewoon basisonderwijs: informatie voor de onderwijspraktijk*. Vlaamse Overheid. <https://publicaties.vlaanderen.be/view-file/6912>
- Zhang, D., Stecker, P., & Beqiri, K. (2017). Strategies students with and without mathematics disabilities use when estimating fractions on number lines. *Learning Disability Quarterly*, 40(4), 225-236. <https://doi.org/10.1177/0731948717704966>
- Zimbardo, P. G., Johnson, R. L., Weber, A. L. (2005). *Psychologie: een inleiding*. Nederland: Pearson Education.

BIJLAGEN

Bijlage A: Geïnformeerde toestemming

Geachte meneer/ mevrouw/ X

Wij zijn Marie Meuris en Ine Meers, masterstudenten in de orthopedagogiek aan de KULeuven. In het kader van onze masterproef voeren wij onderzoek uit naar hoe leerlingen breuken begrijpen.

De school heeft reeds toestemming gegeven om zijn leerlingen te testen. Via deze weg, willen we uw zoon/ dochter uitnodigen om deel te nemen aan ons onderzoek. De afname, die zal plaatsvinden tijdens de schooluren, zal ongeveer 15 minuten duren.

De leerlingen zullen op dit meetmoment gevraagd worden om enkele schattingstaken op te lossen.

Op de volgende twee pagina's vindt u de geïnformeerde toestemming, die ondertekend dient te worden, indien u akkoord gaat met de deelname van uw zoon/ dochter/ X.

Als u nog verdere vragen heeft, kan u ons bereiken op de volgende e-mailadressen of telefoonnummers:

Marie Meuris

[Emailadres]

[Telefoonnummer]

Ine Meers

[Emailadres]

[Telefoonnummer]

Wij danken u bij voorbaat,

Marie Meuris

Ine Meers

Masterstudenten in de orthopedagogiek

Geïnformeerde toestemming

Titel van het onderzoek: Een vergelijkend onderzoek naar het strategiegebruik bij het schatten van breuken op een getallenlijn in het zesde leerjaar en vijfde middelbaar

Naam + contactgegevens promotor en onderzoeker(s):

Prof. Dr. W. Van Dooren *[Emailadres]*

Onderzoekers: Marie Meuris

[Emailadres]

[Telefoonnummer]

Ine Meers

[Emailadres]

[Telefoonnummer]

Doel en methodologie van het onderzoek:

Het doel van het onderzoek is de evolutie van het strategiegebruik van leerlingen in kaart te brengen. Hierbij wordt een schattingstaak afgenomen bij leerlingen van het vierde leerjaar, zesde leerjaar en vijfde middelbaar. De leerlingen moeten 14 breuken schatten op een getallenlijn van 0 tot 1. Tijdens het maken van deze opgaven, wordt er gevraagd om luidop te redeneren, zodat de achterliggende redenering kan worden bepaald. Deze strategieën en de accuraatheid van de schatting worden dan over de verschillende leerjaren heen vergeleken.

Duur van het experiment:

25 minuten

- Ik begrijp wat van mijn zoon/ dochter verwacht wordt tijdens dit onderzoek.
- Ik weet dat mijn zoon/ dochter zal deelnemen aan volgende proeven of testen:
Een individueel meetmoment van 15 minuten, waarbij er gevraagd wordt om breuken op een getallenlijn te schatten. Hierbij wordt een getallenlijn gegeven met beginpunt 0 en eindpunt 1.
- Ik begrijp dat de deelname van mijn zoon/ dochter aan deze studie vrijwillig is. Ik heb het recht om de deelname van mijn zoon/ dochter op elk moment stop te zetten. Daarvoor hoef ik geen reden te geven en ik weet dat daaruit geen nadeel voor mijn zoon/ dochter kan ontstaan.

- Ik weet dat er in dit onderzoek audio-opnames van mijn zoon/dochter gemaakt kunnen worden. Deze worden enkel gebruikt indien iets niet duidelijk was tijdens testafname of om de strategie te her-evalueren.
- De resultaten van dit onderzoek kunnen gebruikt worden voor wetenschappelijke doeleinden en mogen gepubliceerd worden. De naam van mijn zoon/ dochter wordt daarbij niet gepubliceerd en doorheen het onderzoek zullen de gegevens steeds vertrouwelijk behandeld worden.
- Voor vragen evenals voor de uitoefening van mijn rechten (inzage gegevens, correctie ervan,...) weet ik dat ik na mijn deelname terecht kan bij:

Marie Meuris

[Emailadres]

[Telefoonnummer]

Ine Meers

[Emailadres]

[Telefoonnummer]

- Meer informatie met betrekking tot privacy in onderzoek kan ik terugvinden op www.kuleuven.be/privacy. Verdere vragen over privacyaspecten kan ik richten tot de functionaris voor gegevensbescherming: dpo@kuleuven.be

Deze studie werd beoordeeld en goedgekeurd door de Sociaal-Maatschappelijke Ethische Commissie (SMEC) van KU Leuven (G-2021-3036-R2(AMD)). Voor eventuele klachten of andere bezorgdheden omtrent ethische aspecten van deze studie kan ik contact opnemen met SMEC: smec@kuleuven.be

Ik heb bovenstaande informatie gelezen en begrepen en heb antwoord gekregen op al mijn vragen betreffende deze studie. Ik stem toe dat mijn zoon/ dochter mag deelnemen aan dit onderzoek.

Datum:

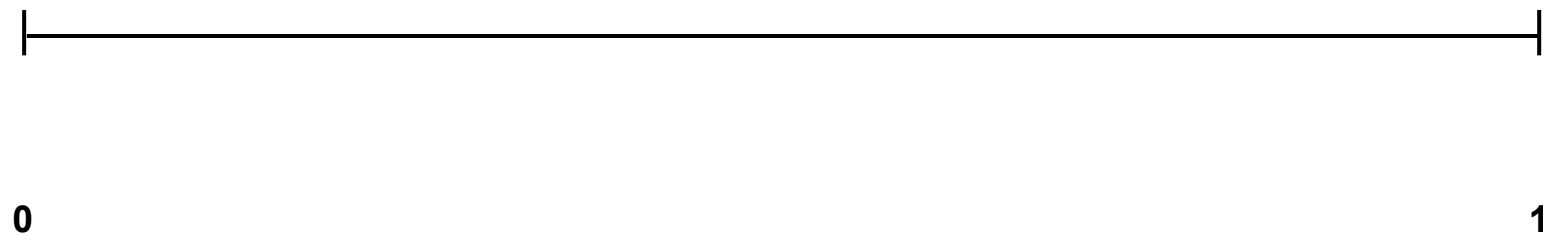
Naam leerling:

Naam en handtekening ouder

Naam en handtekening onderzoeker(s)

Bijlage B: Voorbeeld schattingstaak

$$\frac{40}{79}$$



Bijlage C: Protocol 'Inleiding meetmoment'

Hallo [naam leerling],

Vandaag ga ik jou enkele wiskundige oefeningen geven. Dit is geen test, dus het staat ook niet op punten. Er is ook geen tijdslimiet, dus je mag zoveel tijd nemen als je zelf nodig hebt.

De oefeningen variëren in moeilijkheid, dus sommige kunnen wat makkelijker zijn dan andere. Je moet je geen zorgen maken als het niet direct lukt, het is vooral belangrijk dat je je best doet.

Bij elke opgave moet je een breuk plaatsen op een getallenlijn van 0 tot 1. Je mag geen meetlat gebruiken. Het is dus niet altijd mogelijk om de exacte plaats van de breuk te bepalen, maar probeer dit zo nauwkeurig mogelijk te doen.

Denk vooral luidop na tijdens het maken van de oefeningen, zodat ik je gedachtegang kan volgen. Zeg dus alles wat je denkt en doet. Je mag ook op het blad schrijven of tekenen, indien dit je zou helpen met het oplossen van de oefeningen.

Ik neem dit gesprek ook op, zodat ik niet de hele tijd moet noteren maar de opnames worden enkel gebruikt als er iets onduidelijk is.

Begrijp je wat je gaat moeten doen? Als je nog vragen hebt, mag je ze nu stellen. We kunnen beginnen zodra je er klaar voor bent.

Veel succes!

Bijlage D: Voorbeeld codeerschema

NAAM LEERLING:

ONDERZOEKER: INE MEERS / MARIE MEURIS

KLAS: L4 L6 S5

RECORDING: ZOOM

SCHOOL:

BREUK	 /		
ALG. CAT.	Correct	Inaccuraat	Rest
STRATEGIE	<i>ENCODEREN TARGET ITEM</i>	<i>POSITIONERING</i>	<i>FINALISEREN</i>
	Niets	Geen strategie	Niets
	Bij benadering:	Segmenteren	Compenseren
	Naar decimaal getal: ...	Eenmaal:	Corrigeren
	Naar breuk: ...	Getrapt: à à	
		Benchmarken:	
		0 0,25 0,5 0,75 1	