



Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Natuurkundige Wiskunde en Sterrenkunde

Eddington-Born-Infeld theorie en de donkere kant van het universum

Bastiaan Maertens
Promotor: Dr. K. Van Acoleyen
Co-promotor: Prof. Dr. M. Baes
Academiejaar 2009-2010

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van master in de wiskunde, afstudeer-
richting natuurkundige wiskunde en sterrenkunde.

Voorwoord

Deze masterproef kadert in de studie naar een oplossing voor één van de grootste knelpunten in de hedendaagse wetenschap: het bestaan van donkere materie en donkere energie. Twee zeer uiteenlopende vormen van energie die zeer frequent in één adem worden genoemd. Toch is de klassieke kijk op beide soorten zeer verschillend. In deze masterproef wordt een vereenzelviging van de donkere kant van het universum beschreven en bestudeerd. Is het echt zo vreemd dat donkere materie en donkere energie steeds maar weer samen vernoemd worden?

Het betreffende samenvoegende model is gebaseerd op de minderheidsovertuiging dat de algemene relativiteitstheorie niet precies genoeg is. Daarom gaat men de veldvergelijkingen van Einstein aanpassen met een kleine corrigerende term. Dergelijke gemodificeerde zwaartekrachttheorieën proberen meestal donkere materie te verklaren. Deze masterproef beschrijft gravitatiemodificaties die ook geweten worden aan donkere energie.

De zoektocht is er één van hard werken en veel bijleren geworden. Leunend op mijn initiële interesse in Einsteins theorie, ben ik stap voor stap vooruit gekomen. Graag wil ik dan ook mijn promotor Dr. Karel Van Acoleyen bedanken voor zijn onvoorwaardelijke hulp bij het tot stand komen van deze masterproef. Ook Jef Maertens ben ik mijn dank verschuldigd voor het nalezen van dit werk.

De lezer kan waarschijnlijk wel genieten van een brok wiskundige natuurkunde. Ik wens hem dan ook veel leesplezier.

Bastiaan Maertens

Toelating tot bruikleen

De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.

18 juni 2010

Inhoudsopgave

1	Donkere materie en donkere energie: een schets	1
1.1	Een beetje geschiedenis: het expanderende universum	1
1.2	Waarom donkere materie?	3
1.3	De nood aan donkere energie	4
2	Bespreking “Eddington-Born-Infeld action for dark matter and dark energy”	5
2.1	Inleiding	5
2.2	Afleiding van de bewegingsvergelijkingen	5
2.2.1	Variatie naar $g_{\mu\nu}$	6
2.2.2	Variatie naar de nieuw ingevoerde connectie $C_{\mu\nu}^{\rho}$	8
2.3	De ‘de Sitter’-oplossing	11
2.4	Kosmologie van de actie	13
2.4.1	De kosmologische vergelijkingen	13
2.4.2	Het gedrag van de schaalfactor	14
2.5	Perturbatieve beschrijving van donkere materie halo’s	16
2.5.1	De nulde en eerste orde bewegingsvergelijkingen	16
2.5.2	Een nulde orde, sferisch symmetrische oplossing	17
2.5.3	De eerste orde oplossing en het NFW-profiel	18
2.5.4	Een eenvoudigere oplossing	20
2.5.5	Rotatiecurves van donkere materie halo’s	22
2.5.6	Het asymptotische regime?	24
2.5.7	Het effect van absolute waarde tekens	26
3	Perturbatieve oplossing voor $T_{\mu\nu}^{(m)} \neq 0$	28
3.1	Opzet	28
3.1.1	Storing door een kleine baryonische massa	28
3.1.2	Storing door het EBI-veld	29
3.1.3	De randvoorwaarden	30
3.2	Eerste orde in ϵ	31
3.2.1	Nulde orde in $\frac{1}{r^2}$	31
3.2.2	Eerste orde in $\frac{1}{r^2}$	32
3.3	Beschrijving van een compacte massa	33

3.3.1	Inleidend voorbeeld	34
3.3.2	De oplossingen voor een compacte massa	36
3.3.3	Rotatiecurves	39
4	Het EBI-veld als donkere materie	42
5	Besluit	44
A	Maple documenten	45

HOOFDSTUK 1

Donkere materie en donkere energie: een schets

“Slechts twee dingen zijn oneindig: het universum en de menselijke dwaasheid. Van het universum ben ik het alleen nog niet zeker.”

toegeschreven aan A. Einstein (1879-1955)

1.1 Een beetje geschiedenis: het expanderende universum

Sinds mensenheugenis kijkt men naar boven en verwondert men zich over het grootse dat daar valt te aanschouwen. Lang werd gedacht dat het universum rondom ons, het vacuüm waarin galactieën, sterren en planeten ronddwalen, eeuwig en onveranderlijk is. De laatste honderd jaar zijn deze ideeën echter spectaculair veranderd.

Toen Albert Einstein [12] in 1917 zijn Algemene Relativiteitstheorie probeerde te verenigen met het in die tijd heersende beeld van een statisch universum, merkte hij dat er in zijn veldvergelijkingen een term bij moest komen. Die term, proportioneel met een nieuw ingevoerde *kosmologische constante* Λ , moest de gravitationele aantrekkingskracht die het heelal op zichzelf had, tegenwerken. Het evenwicht dat zo kon ontstaan, is echter zeer instabiel. Als Λ ook maar infinitesimaal verschilt van de waarde die Einstein nodig had, moet het heelal krimpen of expanderen (zie figuur 1.1).

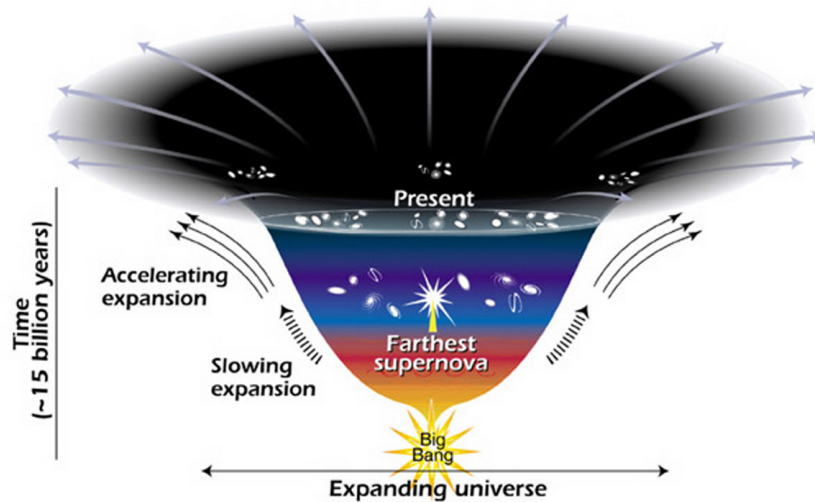
De Rus Alexander Friedman [13] en de Belgische priester George Lemaître [17] legden respectievelijk in 1922 en 1927 onafhankelijk van elkaar de theoretische grondslagen voor het beschrijven van een expanderend universum. Het idee dat het universum zou kunnen uitzetten werd met veel scepticisme ontvangen. Het concept impliceert immers dat er lang geleden een moment moet zijn geweest waar alle materie in één enkel punt zat. Dat moment werd later door Fred Hoyle¹ in een BBC radiolezing in 1949 oneerbiedig een *Big Bang* genoemd². Ironisch genoeg bleef de term hangen en nu nog steeds wordt dat moment van oneindige dichtheid, temperatuur en druk ermee aangeduid. Door de observationele ontdekking van Edwin Hubble [14] in 1929 dat extra-galactische objecten sneller van ons weg bewegen naarmate ze verder van ons verwijderd zijn, kreeg het Friedmann-Lemaître model een grote aanhang.

A.d.h.v. observaties, waarvan een moderne versie is afgebeeld in figuur 1.2, werd vastgesteld dat het zichtbare universum er in alle richtingen ongeveer hetzelfde uitziet. Deze eigenschap heet het *isotroop* zijn van het universum. Als we er vanuit gaan dat wij als aardbewoners geen speciale plaats in het universum innemen, een idee dat *het Copernicaans principe* wordt genoemd, dan moet het universum overal isotroop zijn en dat betekent dat het *homogeen* is. De metriek die zo'n universum beschrijft heet de Robertson-Walker-metriek

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)$$

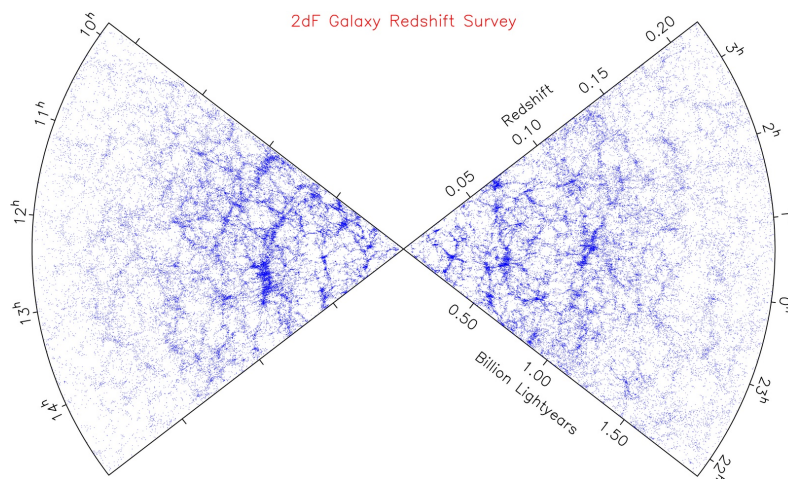
¹Fred Hoyle was een fervente tegenhanger van de Big Bang theorie. Hij stelde zelf een model voor waarin er geleidelijk nieuwe materie ontstaat en zo een gelijkblijvend heelal beschrijft.

²In het Nederlands spreekt men van de *oerknal*.



Figuur 1.1: Een schets van de geschiedenis van het universum. Met het expanderen van het universum wordt niet bedoeld dat de materie die in dat universum aanwezig is van elkaar weg beweegt, maar veeleer dat het vacuüm waaruit het universum bestaat toeneemt. Dit fenomeen valt te vergelijken met twee knikkers die door een elastiek met elkaar verbonden zijn. Op het elastiek zijn afstanden aangeduid, het is dus geijkt. Rekt men nu het elastiek uit, dan is niet alleen de afstand tussen de twee knikkers vergroot, maar ook de geijkte afstanden werden beïnvloed. © NASA

en werd door Howard Percy Robertson [25] in 1935 en Arthur Geoffrey Walker [30] in 1937 afgeleid voor een algemeen isotroop en homogeen universum. De functie $a(t)$ is de *schaalfactor* en bepaalt de evolutie van het ruimtelijke deel van het universum. De constante k staat voor het teken van de kromming van de ruimte en bepaalt of er een vlak heelal ($k = 0$) wordt beschreven of niet. Het heelal waar wij in leven is nagenoeg vlak.



Figuur 1.2: De distributie van galactieën in ons universum. Gezien van op de aarde, die zich in de top van de afgebeelde kegel bevindt, ziet het heelal er in elke richting hetzelfde uit. De speciale structuur die te zien is heet het *kosmisch web*. © 2dFGRS

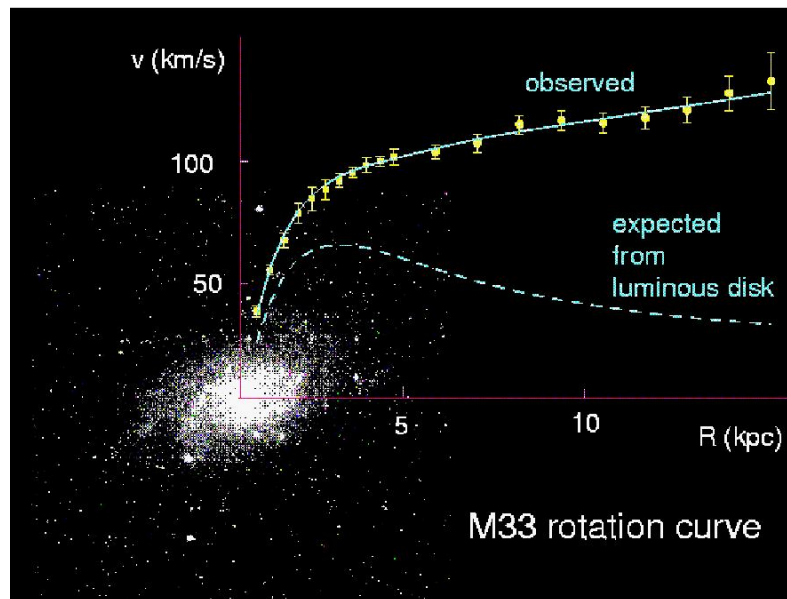
De grote doorbraak voor de Big Bang theorie kwam er echter maar nadat Arno Penzias en Robert Wilson [23] in 1965 de *kosmische achtergrondstraling*, de straling die achtergebleven is na de Big Bang en in het Engels Cosmic Microwave Background of CMB wordt genoemd, hadden geobserveerd. De kosmische achtergrondstraling werd immers door de Big Bang theorie voorspeld en kon moeilijk door een ander

model worden verklaard. Ook werd in diezelfde periode ontdekt dat galactieën veranderingen ondergaan in de tijd en het heelal dus niet eeuwig hetzelfde kon zijn. Onveranderlijke universa zoals die van Einstein of Hoyle werden dan ook uitgesloten.

1.2 Waarom donkere materie?

Het idee dat er een vreemd soort materie aanwezig is in het universum die we niet kunnen zien omdat het geen licht uitstraalt, werd voor het eerst gepubliceerd in 1933 door Fritz Zwicky [32] die het “Dunke Materie” of dus *donkere materie* noemde. Het idee werd niet bepaald met open armen ontvangen door zijn tijdsgenoten en zijn naam werd door het slijk gehaald. Het was pas rond 1980 dat de wetenschappelijke wereld genoeg observationeel bewijs had verzameld om het bestaan van donkere materie te aanvaarden.

Als men bijvoorbeeld, a.d.h.v. Doppler-effecten, de rotatiesnelheden van extra-galactische objecten (zoals galactieën en galactieclusters) bestudeert, blijkt dat de buitenste regionen te snel bewegen volgens de wetten van Newton en de aanwezige zichtbare massa (zie figuur 1.3). Door een grote massa toe te voegen aan zo'n object, kunnen de hoge snelheden wel verklaard worden. Een klein deel van die toe te voegen donkere materie bestaat uit het intergalactische gas, de bijna massaloze neutrino's en de supermassieve zwarte gaten die het centrum van de meeste grote galactieën bewonen. De aard van het overgrote deel van de donkere materie (ongeveer 23% van de universum-inhoud) is nog lang niet begrepen, maar er zijn heel wat theorieën, de één al plausibeler dan de andere.



Figuur 1.3: De geobserveerde rotatiesnelheden van de Triangulum Galaxy (M33), één van onze dichtste burens, vergeleken met de door de tweede wet van Newton voorspelde rotatiecurve. De geobserveerde rotatiecurve gaat naar een eindige, positieve waarde, terwijl verwacht zou worden dat de snelheden in de buitenste regionen van de galactie naar nul zouden naderen. © Sheffield PPPA Group

Eén van de meest aanneembare theorieën is het bestaan van nog niet geobserveerde soorten deeltjes die WIMPS (Weakly Interacting Massive Particles) worden genoemd. Dit zouden zware deeltjes zijn die enkel interageren via de zwakke wisselwerking en de zwaartekracht. Omdat ze dus niets te maken hebben met elektro-magnetische krachten, kunnen we ze niet zien. Deze soorten deeltjes behoren tot wat men *koude donkere materie* noemt, terwijl de massaloze neutrino's deel uitmaken van de *hete donkere materie*, omdat zij heel lang aan relativistische snelheden bewegen.

Een andere visie is er één waarbij de zwaartekrachttheorieën van Newton en Einstein worden aangepast, zodat ze kunnen verklaren wat er gebeurt op grote schaal, zonder dat er hypothetische nieuwe soorten elementaire deeltjes moeten worden toegevoegd. De meest succesvolle theorie die hiervan gebruik maakt is MOND (Modified Newtonian Dynamics), ontwikkeld door Mordehai Milgrom [20] in 1983. Milgrom stelt voor dat de tweede wet van Newton niet meer helemaal correct is wanneer de versnellingen heel klein zijn, wat bijvoorbeeld het geval is in de buitenste regionen van een galactie.

Zowel het postuleren van het bestaan van ongeziene deeltjes, als het aanpassen van succesvolle theorieën van Newton en Einstein brengen problemen met zich mee. Voor een overzicht van de nog niet overwonnen obstakels, zie [16]. Kort geschetst kan gesteld worden dat koude donkere materie op universele schaal het best de observaties verklaard, terwijl op galactische schaal de aangepaste zwaartekrachttheorieën behoorlijk succesvol blijken te zijn.

1.3 De nood aan donkere energie

Toen in 1998 door het Supernovae Cosmology Project, geleid door Saul Perlmutter, [24] en de High-z Supernovae Search, geleid door Brian Schmidt, [28] ontdekt werd dat het heelal niet alleen aan het expanderen was, maar dat ook nog eens versnellend deed, was er goede reden om de kosmologische constante van Einstein terug uit de kast te halen. Er moet immers een soort van *donkere energie*, energie die we (nog) niet kunnen observeren, bestaan die kan verklaren waarom de expansie van het heelal niet vertraagt, zoals men had verwacht, maar net versnelt. Die donkere energie kan worden meegerekend in de veldvergelijkingen van Einstein door er terug een term proportioneel met Λ aan toe te voegen. Het deel van de inhoud van het universum dat bestaat uit deze onbekende energie is een verbazingwekkende 73%.

De meest intuïtieve kandidaat voor donkere energie is *vacuüm energie*, dat is de energie die zou ingebakken zitten in elke kubieke millimeter van het universeel vacuüm. Sommigen proberen deze energie te verklaren a.d.h.v. virtuele deeltjes. De op deze manier voorspelde energiewaarden zijn echter een factor $(10^{15} eV)^4$ te groot, een wel zeer flagrante fout. Anderen verdiepen zich in de effecten die het bestaan van extra dimensies zou hebben op het vacuüm, om zo tot een verklaring te komen. Ook het links laten liggen van het concept vacuüm energie zou een mogelijkheid kunnen zijn. Zo zou een vijfde soort kracht, *quintessence* genaamd, naar het door Aristoteles bedachte vijfde element waaruit de hemellichamen volgens hem zouden bestaan, de versnellende expansie van het universum kunnen verklaren. Voor een overzicht omtrent donkere energie en de huidige alternatieven, zie [9].

Tot slot moet ook rekening gehouden worden met het feit dat het mogelijk is dat de theorieën van Newton en Einstein op kosmologische schalen niet meer exact zijn. Net zoals theorieën donkere materie proberen te verklaren door bijvoorbeeld aanpassingen aan te brengen in de veldvergelijkingen van Einstein, wordt op dezelfde manier donkere energie onderzocht. Deze masterproef zal een model beschrijven en onderzoeken dat zowel donkere materie als donkere energie op deze manier probeert te verklaren.

Observationeel is vastgesteld dat de relatieve energiedichtheden van baryonische materie, donkere materie en donkere energie respectievelijk

$$\Omega_{bm} \approx 0.04, \Omega_{dm} \approx 0.2 \text{ en } \Omega_{\Lambda} \approx 0.73$$

bedragen. Dit betekent dat ongeveer 23% van de energie in het heelal afkomstig is van donkere materie en een ongelofelijke 73% geleverd wordt door donkere energie. Het feit dat het slechts die 4% baryonische materie is die we goed begrijpen, is één van de grootste hedendaagse mysteries.

HOOFDSTUK 2

Bespreking “Eddington-Born-Infeld action for dark matter and dark energy”

*“I have no question:
It is enough, I know what fixed the station
Of star and cloud.
And knowing all, I cry...”*

uit *The Hourglass* van W. B. Yeats, 1913

2.1 Inleiding

Het artikel “Eddington-Born-Infeld action for dark matter and dark energy” van M. Bañados [3] is de basis waarvan we vertrekken. Het voorstel van het artikel is dat de actie

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int \left[\sqrt{|g_{\mu\nu}|} R + \frac{2}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \right] dx^4 + \int \mathcal{L}_m dx^4, \quad (2.1)$$

met $|A_{\mu\nu}|$, voor elke $A_{\mu\nu}$, de absolute waarde van de determinant van $A_{\mu\nu}$, $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}A_{\mu\nu} + \frac{1}{2}A_{\nu\mu}$ de gesymmetriseerde waarde van $A_{\mu\nu}$, $K_{\mu\nu}$ de ‘Ricci’-kromming van een nieuw ingevoerde symmetrische connectie $C_{\mu\nu}^\rho$ en \mathcal{L}_m de baryonische Lagrangiaan, kan dienst doen als donkere materie en donkere energie. Het stelt met ander woorden een aanpassing van de algemene relativiteitstheorie voor om o.a. de rotatiecurves van galactieën te kunnen verklaren.

In dit hoofdstuk willen we de belangrijkste inzichten die door het artikel worden verschaft op een rij zetten, met waar nodig extra uitleg of kritiek. Zo is het lezen van het bewuste artikel geen voorwaarde om te begrijpen wat we in verdere hoofdstukken nog beschrijven.

2.2 Afleiding van de bewegingsvergelijkingen

Omdat het afleiden van de bewegingsvergelijkingen zoals die voorgesteld worden in het artikel [3] uit de actie (2.1) nogal wat meer met zich meebrengt dan men laat uitschijnen, volgt nu een gedetailleerde bespreking. De vergelijkingen die moeten worden afgeleid zijn de volgende:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{q}{g}} g_{\mu\alpha} q^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} + 8\pi G T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (2.2)$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{l^2} (g_{\mu\nu} + \alpha q_{\mu\nu}) \quad (2.3)$$

Hierbij is $q_{\mu\nu}$ de uniek bepaalde metriek zodat de nieuw ingevoerde symmetrische connectie $C_{\mu\nu}^\rho$ de bij deze metriek horende Levi-Civitaconnectie is en $q^{\mu\nu}$ zijn inverse, wat dus niet hetzelfde is als $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} q_{\alpha\beta}$. Ook voeren we de verkorte notaties $g = |g_{\mu\nu}|$ en $q = |q_{\mu\nu}|$ in. Ter verduidelijking nog even deze definitie:

Definitie 2.2.1 Voor een willekeurige metriek $g_{\mu\nu}$ is de **Levi-Civitaconnectie** de uniek bepaalde connectie $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ waarvoor $D_\rho g_{\mu\nu} = 0$ en $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$. Hierbij is D_ρ de covariante afgeleide opgebouwd met $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. Voor deze connectie geldt steeds dat $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\sigma\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\sigma\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} \right)$.

2.2.1 Variatie naar $g_{\mu\nu}$.

De term met $T_{\mu\nu}^{(m)}$ in (2.2) is afkomstig van de baryonische Lagrangiaan en kan bekomen worden op de klassieke manier zoals die in de algemene relativiteitstheorie verkregen wordt. De eerste term bekomen we door het niet-baryonische deel van de actie (2.1) te variëren naar $g_{\mu\nu}$.

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G} \int \delta \left[\sqrt{g} R + \frac{2}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \right] dx^4 \quad (2.4)$$

Gebruiken we de formule van Jacobi (zie [15]) om te schrijven dat, voor inverteerbare A ,

$$\begin{aligned} \delta |\det A| &= \text{sgn}(\det A) \delta \det A \\ &= \text{sgn}(\det A) \text{Tr} (\det(A) A^{-1} \delta A) \\ &= \text{sgn}(\det A) \det A \text{Tr} (A^{-1} \delta A) \\ &= |\det A| \text{Tr} (A^{-1} \delta A), \end{aligned} \quad (2.5)$$

dan kunnen we het integrandum van (2.4) schrijven als

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta \left[\sqrt{g} R + \frac{2}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \right] \\ &= \delta \sqrt{g} R + \sqrt{g} \delta R + \frac{2}{\alpha l^2} \delta \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \quad (\text{kettingregel}) \\ &= \frac{R}{2\sqrt{g}} \delta g + \sqrt{g} \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha l^2 \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|}} \delta |g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}| \\ &= \frac{Rg}{2\sqrt{g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|}{\alpha l^2 \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|}} (g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})^{-1} \delta (g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}) \quad (\text{wegens (2.5)}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu} + \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)^{\mu\nu} \delta (g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (K \text{ hangt niet van } g \text{ af}) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{g} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (A^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} g_{\mu\alpha} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Met de formule voor het covariant afleiden van $\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho$

$$(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho)_{;\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho + \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma,$$

kunnen we $\delta R_{\mu\nu}$ omvormen tot

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \delta R_{\mu\rho\nu}^\rho \\
&= \delta \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\rho} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho + \delta\Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\sigma + \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \delta\Gamma_{\rho\mu}^\sigma \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\rho} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho + \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho - \delta\Gamma_{\rho\mu}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \delta\Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \\
&\quad + \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho + \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma \right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho + \delta\Gamma_{\rho\mu}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \delta\Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \right) \\
&= (\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho)_{;\rho} - (\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho)_{;\nu}. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Voegen we dit in in het integrandum, dan wordt de tweede term van δL

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g} g^{\mu\nu} \left[(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho)_{;\rho} - (\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho)_{;\nu} \right] = \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho)_{;\sigma},$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van $(g^{\mu\nu})_{;\sigma} = 0$ en enkele dummy-indices hebben hernoemd. Zo wordt de bijdrage van deze term in de variatie van de actie

$$\frac{1}{16\pi G} \int (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho)_{;\sigma} \sqrt{g} dx^4 = 0,$$

rekening houdend met de stelling van Stokes in vier dimensies en het feit dat de variatie verdwijnt op de rand op oneindig.

Al deze voorbereidingen nu samenvoegend bekomen we

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G} \int \left[\sqrt{g} G_{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} g_{\mu\alpha} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} dx^4.$$

Zoeken we nu een extremum van deze actie en stellen we dus $\delta I = 0$, dan vertelt het grondlemma van de variatierekening, samen met de veronderstelling dat de variatie nul wordt op de rand op oneindig, ons dat

$$\sqrt{g} G_{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} g_{\mu\alpha} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} = 0. \tag{2.7}$$

Nemen we als definitie

$$q_{\mu\nu} = -\frac{1}{\alpha} (g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}), \tag{2.8}$$

dan is

$$\begin{aligned}\sqrt{q} q^{\alpha\beta} &= \sqrt{\frac{1}{\alpha^4} |(g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})| (-\alpha) (g_{\alpha\beta} - l^2 K_{(\alpha\beta)})^{-1}} \\ &= -\frac{1}{\alpha} \sqrt{|(g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})|} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

en leidt (2.7) inderdaad tot de eerste van het paar bewegingsvergelijkingen, terwijl de definitie (2.8) zelf nagenoeg de tweede bewegingsvergelijking is. Wat ons rest aan te tonen is dat de definitie (2.8) ook impliceert dat $q_{\mu\nu}$ de metriek is, horend bij de connectie $C_{\mu\nu}^\rho$ en dat $K_{(\mu\nu)} = K_{\mu\nu}$ symmetrisch is. In de volgende paragraaf wordt dit aangetoond.

2.2.2 Variatie naar de nieuw ingevoerde connectie $C_{\mu\nu}^\rho$

Nemen we even aan dat $C_{\mu\nu}^\rho$ inderdaad de Levi-Civitaconnectie is voor $q_{\mu\nu}$, dan volgt de symmetrie van $K_{\mu\nu}$ op dezelfde manier als de symmetrie van de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ volgt uit de symmetrie-eigenschappen van de Riemann-tensor $R_{\rho\mu\nu}^\sigma$.

Het enige wat nu nog moet aangetoond worden is dat de definitie (2.8) inderdaad leidt tot het feit dat $C_{\mu\nu}^\rho$ de Levi-Civitaconnectie is voor $q_{\mu\nu}$. Om dit doel te bereiken beginnen we met het variëren van de actie (2.1) naar die $C_{\mu\nu}^\rho$:

$$\begin{aligned}\delta I &= \frac{1}{16\pi G} \int \delta \left[\sqrt{g} R + \frac{2}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})|} \right] dx^4 + \int \delta \mathcal{L}_m dx^4 \\ &= \frac{1}{16\pi G} \frac{2}{\alpha l^2} \int \delta \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})|} dx^4.\end{aligned}$$

De laatste vergelijking geldt omdat de eerste term en de baryonische Lagrangiaan \mathcal{L}_m niet van $C_{\mu\nu}^\rho$ afhangen. Door gebruik te maken van (2.5) volgt

$$\begin{aligned}\delta I &= \frac{1}{16\pi G} \frac{2}{\alpha l^2} \int \frac{1}{2\sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})|}} \delta |g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})| dx^4 \\ &= \frac{1}{16\pi G} \frac{2}{\alpha l^2} \int \frac{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})|}{2\sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})|}} \text{Tr} \left((g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)})^{-1} \delta (g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}) \right) dx^4\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{\alpha} \int \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)^{\mu\nu} \delta K_{(\mu\nu)} dx^4. \quad (2.9)$$

Berekenen we eerst de variatie van $K_{(\mu\nu)}$ naar $C_{\mu\nu}^\rho$:

$$\begin{aligned} \delta K_{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2} (\delta K_{\mu\nu} + \delta K_{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2} [D_\rho (\delta C_{\nu\mu}^\rho) - D_\nu (\delta C_{\rho\mu}^\rho) + D_\rho (\delta C_{\mu\nu}^\rho) - D_\mu (\delta C_{\rho\nu}^\rho)] \\ &= \frac{1}{2} [2D_\rho (\delta C_{\nu\mu}^\rho) - D_\nu (\delta C_{\rho\mu}^\rho) - D_\mu (\delta C_{\rho\nu}^\rho)], \end{aligned} \quad (2.10)$$

waarbij gebruik wordt gemaakt van het analogon van (2.6) en de symmetrie van $C_{\mu\nu}^\rho$. $D_\rho A_{\mu\nu}$ is hierbij de covariante afgeleide van een willekeurige tensor $A_{\mu\nu}$ opgebouwd met de connectie $C_{\mu\nu}^\rho$, in tegenstelling tot $(A_{\mu\nu})_{;\rho}$ die de covariante afgeleide opgebouwd met de Christoffelsymbolen $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ voorstelt.

Invullen van (2.10) in (2.9) leidt tot

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{2\alpha} \int \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \left(\frac{1}{g - l^2 K} \right)^{\mu\nu} [2D_\rho (\delta C_{\nu\mu}^\rho) - D_\nu (\delta C_{\rho\mu}^\rho) - D_\mu (\delta C_{\rho\nu}^\rho)] dx^4.$$

Om de notatie wat te verlichten kan (2.8) gebruikt worden, zodat

$$\begin{aligned} \delta I &= -\frac{1}{16\pi G} \frac{1}{2} \int \sqrt{q} q^{\mu\nu} [2D_\rho (\delta C_{\nu\mu}^\rho) - D_\nu (\delta C_{\rho\mu}^\rho) - D_\mu (\delta C_{\rho\nu}^\rho)] dx^4 \\ &= -\frac{1}{16\pi G} \frac{1}{2} (S_1 + S_2 + S_3). \end{aligned}$$

De laatste vergelijking is zelfverklarend voor de definities van S_i , $i = 1, 2, 3$.

De volgende stap is om de factor $\delta C_{\nu\mu}^\rho$ af te zonderen, zodat het grondlemma van de variatierekening kan gebruikt worden. Voor S_1 gebeurt dit als volgt:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int \sqrt{q} q^{\mu\nu} D_\rho (\delta C_{\nu\mu}^\rho) dx^4 \\ &= 2 \int [D_\rho (\sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\nu\mu}^\rho) - D_\rho \sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\nu\mu}^\rho - \sqrt{q} D_\rho q^{\mu\nu} \delta C_{\nu\mu}^\rho] dx^4 \\ &= 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} (\sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\nu\mu}^\rho) + C_{\rho\kappa}^\rho \sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\nu\mu}^\rho - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\nu\mu}^\rho - \sqrt{q} D_\rho q^{\mu\nu} \delta C_{\nu\mu}^\rho \right] dx^4 \\ &= 2 \int \left[C_{\kappa\rho}^\kappa \sqrt{q} q^{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \sqrt{q} q^{\mu\nu} - \sqrt{q} D_\rho q^{\mu\nu} \right] \delta C_{\nu\mu}^\rho dx^4 \\ &= 2 \int \sqrt{q} \left[\left(C_{\kappa\rho}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\nu} - D_\rho q^{\mu\nu} \right] \delta C_{\nu\mu}^\rho dx^4. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Bij de voorlaatste overgang werd gebruik gemaakt van de divergentiestelling en het feit dat de variatie verdwijnt op de rand.

De term S_2 kan herschreven worden als

$$\begin{aligned}
S_2 &= - \int \sqrt{q} q^{\mu\nu} D_\nu (\delta C_{\rho\mu}^\rho) dx^4 \\
&= - \int \left[D_\nu (\sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\rho\mu}^\rho) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\rho\mu}^\rho - \sqrt{q} D_\nu q^{\mu\nu} \delta C_{\rho\mu}^\rho \right] dx^4 \\
&= - \int \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\rho\mu}^\rho) + C_{\nu\kappa}^\nu \sqrt{q} q^{\mu\kappa} \delta C_{\rho\mu}^\rho - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{q} q^{\mu\nu} \delta C_{\rho\mu}^\rho - \sqrt{q} D_\nu q^{\mu\nu} \delta C_{\rho\mu}^\rho \right] dx^4 \\
&= - \int \sqrt{q} \left[C_{\nu\kappa}^\nu q^{\mu\kappa} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \ln \sqrt{q} q^{\mu\nu} - D_\nu q^{\mu\nu} \right] \delta C_{\rho\mu}^\rho dx^4 \\
&= - \int \sqrt{q} \left[\left(C_{\kappa\alpha}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\alpha} - D_\alpha q^{\mu\alpha} \right] \delta_\rho^\nu \delta C_{\nu\mu}^\rho dx^4, \tag{2.12}
\end{aligned}$$

waar we voor de voorlaatste vergelijking opnieuw de divergentiestelling gebruikten, en analoog

$$S_3 = - \int \sqrt{q} \left[\left(C_{\kappa\alpha}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{q} \right) q^{\nu\alpha} - D_\alpha q^{\nu\alpha} \right] \delta_\rho^\mu \delta C_{\nu\mu}^\rho dx^4. \tag{2.13}$$

(2.11), (2.12) en (2.13) invullend in $\delta I = 0$ en rekening houdend met het feit dat $q_{\mu\nu}$ inverteerbaar wordt verondersteld, wat betekent dat $q \neq 0$, worden de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \left[\left(C_{\kappa\rho}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\nu} - D_\rho q^{\mu\nu} \right] \\
&\quad - \left[\left(C_{\kappa\alpha}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\alpha} - D_\alpha q^{\mu\alpha} \right] \delta_\rho^\nu \\
&\quad - \left[\left(C_{\kappa\alpha}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{q} \right) q^{\nu\alpha} - D_\alpha q^{\nu\alpha} \right] \delta_\rho^\mu. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Om te kunnen bewijzen dat $q_{\mu\nu}$ als Levi-Civitaconnectie precies de connectie $C_{\mu\nu}^\rho$ heeft, moeten we, wegens de veronderstelde symmetrie van de connectie en volgens definitie 2.2.1, enkel nog aantonen dat $D_\rho q_{\mu\nu} = 0$. Hiervoor nemen we de contractie van (2.14) met δ_ν^ρ :

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \left[\left(C_{\kappa\nu}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\nu} - D_\nu q^{\mu\nu} \right] \\
&\quad - 4 \left[\left(C_{\kappa\alpha}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\alpha} - D_\alpha q^{\mu\alpha} \right] \\
&\quad - \left[\left(C_{\kappa\alpha}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\alpha} - D_\alpha q^{\mu\alpha} \right] \\
&= -3 \left[\left(C_{\kappa\alpha}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\alpha} - D_\alpha q^{\mu\alpha} \right],
\end{aligned}$$

wat leidt tot

$$D_\alpha q^{\mu\alpha} = \left(C_{\kappa\alpha}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\alpha}.$$

Als we dit resultaat invullen in (2.14), dan krijgen we

$$D_\rho q^{\mu\nu} = \left(C_{\kappa\rho}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\nu}. \tag{2.15}$$

Aantonen dat het rechterlid van (2.15) nul moet zijn, doen we door die vergelijking te contraheren met $q_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
0 &= q_{\mu\nu} D_\rho q^{\mu\nu} - q_{\mu\nu} \left(C_{\kappa\rho}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{q} \right) q^{\mu\nu} \\
&= q_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} q^{\mu\nu} + C_{\rho\kappa}^\mu q^{\kappa\nu} + C_{\rho\kappa}^\nu q^{\mu\kappa} \right) - 4 \left(C_{\kappa\rho}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{q} \right) \\
&= q_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} q^{\mu\nu} + C_{\rho\mu}^\mu + C_{\rho\nu}^\nu - 4C_{\kappa\rho}^\kappa + 4 \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{q} \\
&= -q^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} q_{\mu\nu} - 2C_{\kappa\rho}^\kappa + 4 \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{1}{2\sqrt{q}} q q^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} q_{\mu\nu} \\
&= q^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} q_{\mu\nu} - 2C_{\kappa\rho}^\kappa \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{q} - 2C_{\kappa\rho}^\kappa.
\end{aligned}$$

Zodoende krijgen we uiteindelijk, gebruik makend van $D_\rho q^{\mu\nu} = 0$,

$$\begin{aligned}
0 &= D_\rho \delta_\beta^\alpha \\
&= D_\rho (q^{\alpha\kappa} q_{\kappa\beta}) \\
&= q_{\kappa\beta} D_\rho q^{\alpha\kappa} + q^{\alpha\kappa} D_\rho q_{\kappa\beta} \\
&= q^{\alpha\kappa} D_\rho q_{\kappa\beta}
\end{aligned}$$

en dat is, na contractie met $\delta_\nu^\beta q_{\mu\alpha}$, precies wat we moesten bewijzen.

Tot slot merken we nog op dat dit alles ook betekent dat we $C_{\mu\nu}^\rho$ kunnen schrijven als

$$C_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} q^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} q_{\sigma\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} q_{\sigma\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} q_{\mu\nu} \right). \quad (2.16)$$

2.3 De ‘de Sitter’-oplossing

Voor de doeleinden van deze masterproef is het interessantste deel van de kosmologie van de voorgestelde actie de ‘de Sitter’-oplossing die wordt beschreven in [3]. Deze oplossing zullen we later namelijk kiezen als beginoplossing bij het verder bestuderen van het model in hoofdstuk 3. Een uitgebreide bespreking is dan ook leerzaam.

De oplossing die de Nederlandse fysicus Willem de Sitter (1872-1934) voorstelde voor de Einstein-vergelijkingen met kosmologische constante kan ook hier voor een vlak¹ en leeg² heelalmodel worden gebruikt. Voor een ‘de Sitter’-universum geldt dat $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, waar er van vertrokken wordt in de bespreking in [3]. Veronderstel dus $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, dan volgt

$$R = R_\mu^\mu = \Lambda g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \Lambda \delta_\mu^\mu = 4\Lambda$$

en zo

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \\
&= \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} 4\Lambda g_{\mu\nu} \\
&= -\Lambda g_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

¹Op grote schaal is het observeerbare heelal nagenoeg vlak.

²Met een leeg heelalmodel wordt bedoeld dat er geen straling of baryonische materie in te vinden is: $T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$.

Door dit gelijk te stellen aan het rechterlid van (2.2) voor $T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$ en te vermenigvuldigen met $g^{\sigma\mu}$ en $g^{\nu\kappa}$, verschijnt er

$$\Lambda g^{\sigma\mu} g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{q}{g}} g^{\sigma\mu} g_{\mu\alpha} q^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} g^{\nu\kappa}.$$

Met de definitie

$$\gamma = \frac{1}{l^2 \Lambda} \sqrt{\frac{q}{g}}, \quad (2.17)$$

wordt dat

$$g^{\sigma\kappa} = \gamma q^{\sigma\kappa}. \quad (2.18)$$

Door vermenigvuldiging van (2.18) met $q_{\rho\sigma}$ en $g_{\kappa\lambda}$ wordt aangetoond dat $q_{\rho\lambda}$ voor dit model proportioneel is met $g_{\rho\lambda}$:

$$q_{\rho\lambda} = \gamma g_{\rho\lambda}. \quad (2.19)$$

Merk op dat γ volgens (2.17) afhangt van de gekozen coördinaten, zodat dit in principe een scalaire functie is. (2.19) invullen in (2.17) geeft echter

$$\gamma = \frac{1}{l^2 \Lambda} \sqrt{\frac{\gamma^4 g}{g}} = \frac{\gamma^2}{l^2 \Lambda},$$

waaruit blijkt dat γ een constante is: $\gamma = l^2 \Lambda$ (of $\gamma = 0$, wat natuurlijk geen interessante oplossing is).

Verder kan Λ nu worden uitgedrukt in functie van de constanten α en l uit de actie (2.1). Gebruik makend van (2.16), (2.18) en (2.19) is direct in te zien dat

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} q^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} q_{\sigma\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} q_{\sigma\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} q_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma} g^{\rho\sigma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\sigma\mu} + \gamma \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\sigma\nu} - \gamma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} q_{\mu\nu} \right) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\rho, \end{aligned}$$

waaruit

$$K_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$$

volgt. Samen met (2.3) geeft dit

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{l^2} (\gamma \alpha + 1) g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{l^2} (\Lambda l^2 \alpha + 1) g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Λ kan nu gevonden worden met

$$\Lambda g_{\mu\nu} = \left(\Lambda \alpha + \frac{1}{l^2} \right) g_{\mu\nu},$$

wat leidt tot

$$\Lambda = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{l^2}. \quad (2.20)$$

Deze oplossing van de bewegingsvergelijkingen (2.2)-(2.3) kan gebruikt worden wanneer materie verwaarloosbaar geworden is. Het blijkt dat ze dan, precies zoals het verwacht wordt, kan gezien worden

als een oplossing van de Einstein-vergelijkingen met de kosmologische constante (2.20):

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{\gamma^4 g}{g}} g_{\mu\alpha} \frac{1}{\gamma} g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} + 8\pi G T_{\mu\nu}^{(m)} \\ &= -\frac{1}{l^2} \gamma g_{\mu\nu} + 0 \\ &= -\Lambda g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

2.4 Kosmologie van de actie

2.4.1 De kosmologische vergelijkingen

Het intrigerende aan het Eddington-Born-Infeld (EBI) model is dat het veld $C_{\mu\nu}^\rho$ zich in het vroege universum gedraagt als donkere materie, terwijl het zich na lange tijd begint te gedragen als donkere energie. Het model kan zo, voor vlakke ruimtes, de evolutie van de schaalfactor $a(t)$ verklaren zonder donkere materie of donkere energie te moeten toevoegen. Om dit gedrag te ontdekken, zullen we net als in [3] enkele generieke assumpties maken.

Naast het vlak zijn van het universum, veronderstellen we dat het heelal isotroop en homogeen is. We zullen ook in eenheden werken waarvoor de lichtsnelheid $c = 1$ en de schaalfactor vandaag $a(t_0) = 1$. Dat maakt de formules net iets eenvoudiger. Met deze veronderstellingen en door gebruik te maken van de ijkvrijheid om $g_{00} = -1$ te kunnen stellen, krijgen de metrieken $g_{\mu\nu}$ en $q_{\mu\nu}$ de eenvoudige vorm

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.21)$$

$$q_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -X(t)^2 dt^2 + Y(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.22)$$

waarbij $a(t)$, $X(t)$ en $Y(t)$ de te vinden functies zijn. $g_{\mu\nu}$ is simpelweg de Robertson-Walker-metriek voor een vlakke ruimte.

Met (2.21) en (2.22) kunnen de vergelijkingen (2.2) en (2.3) omgevormd worden tot

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{3l^2 H_0^2} \frac{Y^3}{X} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho}{\rho_{krit}} \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{X^2} \frac{\dot{Y}^2}{Y^2} = \frac{1}{3l^2 H_0^2} \left(-\frac{1}{2X^2} + \alpha + \frac{3}{2} \frac{a^2}{Y^2} \right), \quad (2.24)$$

waarbij de tijdscoördinaat werd gheredefinieerd als $t = H_0 t$, “ $\dot{}$ ” afleiding naar $H_0 t$ voorstelt, ρ de baryonische energiedichtheid is en $\rho_{krit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ staat voor de kritische energiedichtheid. De berekeningen die hiervoor nodig zijn, zijn terug te vinden in de Appendix (document A.2), waar de betreffende Maple™ in- en output is afgebeeld.

De vergelijking (2.23) is de Friedmanvergelijking voor de schaalfactor. De eerste term in het rechterlid stelt het effect voor die het EBI-veld $C_{\mu\nu}^\rho$ heeft op de groei van het universum. Om dit nog duidelijker te maken, worden de energiedichtheid en de druk voor het EBI-veld gedefiniëerd als

$$\rho_{\text{EBI}} = \frac{1}{8\pi G l^2} \frac{Y^3}{X} \frac{1}{a^3} \quad (2.25)$$

$$p_{\text{EBI}} = -\frac{1}{8\pi G l^2} \frac{XY}{a}. \quad (2.26)$$

Zo wordt de Friedmanvergelijking simpelweg

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho_{\text{EBI}} + \rho}{\rho_{krit}}.$$

Vergelijking (2.24) geeft de toestandsvergelijking voor ρ_{EBI} en p_{EBI} wanneer X en Y in functie van ρ_{EBI} en p_{EBI} worden geschreven. De expliciete vorm van deze differentiaalvergelijking is niet erg verlichtend en is terug te vinden in document A.2.

Nemen we de covariante afgeleide naar x^μ van de contravariante versie van vergelijking (2.2), dan vinden we, wegens de Bianchi identiteiten

$$(G^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$$

en het behoud van baryonische energie

$$\left(T_{(m)}^{\mu\nu}\right)_{;\mu} = 0$$

of anders geschreven

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{da^3}{dt},$$

met p de baryonische druk, nog een interessante vergelijking:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Y^3}{X} \right) = 3XYa \frac{da}{dt}. \quad (2.27)$$

Deze vergelijking is te schrijven als

$$\frac{d}{dt}(\rho_{\text{EBI}} a^3) = -p_{\text{EBI}} \frac{da^3}{dt}$$

en stelt dus het behoud van niet-baryonische energie voor.

2.4.2 Het gedrag van de schaalfactor

De schaalfactor in een vlak, materiegedomineerd heelal varieert in de tijd volgens

$$a(t) \sim t^{2/3}.$$

(Voor een gedetailleerde afleiding, zie bijvoorbeeld [8].) Niet zo lang na de Big Bang was ons universum zo'n door (donkere) materie gedomineerd universum. Als de evolutie van het universum wordt bepaald door een kosmologische constante, zoals nu het geval is in ons universum, dan gedraagt de schaalfactor zich als een exponentiële functie:

$$a(t) \sim e^{\sqrt{\Omega_\Lambda} t}.$$

Om aan te tonen dat het model (2.23)-(2.27) het juiste gedrag kan reproduceren, wordt een theoretische schets gegeven en een numerieke analyse uitgevoerd.

Wanneer de schaalfactor zeer groot wordt, zal de invloed van de baryonische massadichtheid ($\rho \sim a^{-3}$) verwaarloosbaar klein worden³ t.o.v. het effect van de donkere materie en donkere energie. In (2.23) kan de term $\frac{\rho}{\rho_{\text{krit}}}$ in dit regime weggelaten worden, zodat

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 e^{\frac{t}{\sqrt{3(1-\alpha)}H_0}} \\ X(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \\ Y(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{1-\alpha}} e^{\frac{t}{\sqrt{3(1-\alpha)}H_0}} \end{aligned}$$

³De massadichtheid wordt steeds kleiner met een factor a^3 naarmate het universum uitzet en de schaalfactor groeit, omdat het volume waarin de niet-toegenomen massa zich bevindt precies met die factor is vergroot.

een exacte oplossing wordt. $a(t)$ is inderdaad een exponentiële en als er een restrictie op α en l wordt gelegd, dan is dit gewoon de ‘de Sitter’-oplossing, zoals die beschreven wordt in paragraaf 2.3. Hiervoor moet de vergelijking

$$\frac{1}{3(1-\alpha)l^2H_0^2} = \Omega_\Lambda \quad (2.28)$$

voldaan zijn, dan heeft $a(t)$ immers de juiste exponent. Anders geschreven, wordt dit inderdaad

$$\frac{1}{3(1-\alpha)l^2H_0^2} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

of

$$\frac{1}{(1-\alpha)l^2} = \Lambda.$$

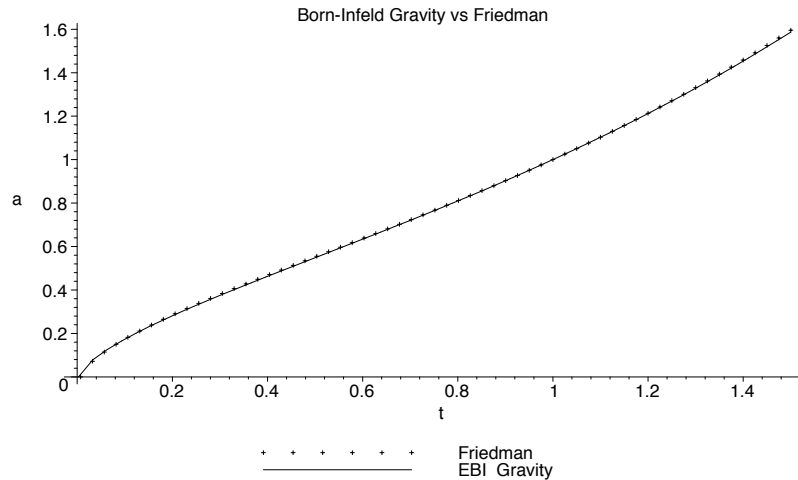
Dit alles toont aan dat de schaalfactor in het EBI-model voor late tijdstippen (grote schaalfactor) verandert zoals ze onder invloed van pure donkere energie zou doen.

Om een idee te krijgen van waarom het EBI-veld ook zou kunnen dienen als donkere materie, stelt het artikel [3]

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 t^{2/3} \left(1 + O\left(t^{4/3}\right) \right) \\ X(t) &= x_0^3 (1 + O(t)) \\ Y(t) &= x_0 (1 + O(t)) \end{aligned}$$

voor als een reeksoplossing van het stelsel (2.23)-(2.27), voor vroege tijdstippen. Op die manier heeft de eerste term in (2.23) het a^{-3} -gedrag dat verwacht wordt van een donkere materie component.

Numeriek oplossen van (2.23)-(2.27) levert een evolutie van de schaalfactor die voor $0 < t < 1$ niet te onderscheiden is van die voorspeld door het Friedman-model (zie figuur 2.1). Hiervoor moet de parameter α wel dicht bij 1 liggen. Dit betekent dat het EBI-veld zich voor vroege tijdstippen inderdaad als donkere materie en op late tijdstippen als donkere energie kan gedragen.



Figuur 2.1: De evolutie van de schaalfactor voor het Friedman- en het EBI-model voor $\alpha = 0.99$. © M. Bañados

Ter uitbreiding kunnen we ons de vraag stellen of het ook mogelijk is dat het EBI-veld straling beschrijft. [3] heeft daar een negatief antwoord op. Schrijven we, lettend op de definities (2.25) en (2.26) van p_{EBI}

en ρ_{EBI} ,

$$\begin{aligned} p_{\text{EBI}} &= - \left(\frac{aX}{Y} \right)^2 \rho_{\text{EBI}} \\ &= w_{\text{EBI}} \rho_{\text{EBI}}, \end{aligned}$$

dan blijkt dat de druk steeds kleiner of gelijk aan nul zal zijn. $w_{\text{EBI}} = \frac{1}{3}$ is dus geen mogelijkheid. Dit neemt niet weg dat het EBI-model een stralingsgedomineerd heelal kan beschrijven. Daarvoor moet $\rho \sim a^{-4}$ en de tweede term in de Friedmanvergelijking (2.23) dominant zijn. Met de reeksoplossing

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 t^{1/2} \left(1 + O\left(t^{1/2}\right) \right) \\ X(t) &= x_0^3 t^{-1} \left(1 + O\left(t^{1/2}\right) \right) \\ Y(t) &= x_0 t^{1/2} \left(1 + O\left(t^{1/2}\right) \right) \end{aligned}$$

van (2.23)-(2.27) zien we dat de schaalfactor ook het gedrag $a(t) \sim t^{1/2}$ van een stralingsgedomineerd heelal kan vertonen.

2.5 Perturbatieve beschrijving van donkere materie halo's

In [3] beweert men dat het voorgestelde model in staat is om realistische rotatiecurves te genereren, als men aanneemt dat de zichtbare materie verwaarloosbaar is: $T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$. Om dit te bewerkstelligen gaat men de vergelijkingen

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{q}{g}} g_{\mu\alpha} q^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} \quad (2.29)$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{l^2} (g_{\mu\nu} + \alpha q_{\mu\nu}) \quad (2.30)$$

perturbatief oplossen. Dit is mogelijk doordat $\frac{1}{l^2}$ klein is, vergeleken met een galactische schaal. l heeft namelijk een kosmologische schaal.

2.5.1 De nulde en eerste orde bewegingsvergelijkingen

We ontwikkelen de metrieken $g_{\mu\nu}$ en $q_{\mu\nu}$, de Einstein tensor $G_{\mu\nu}$ en de kromming van de q -ruimte $K_{\mu\nu}$ in machtreeksen van $\frac{1}{l^2}$:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} + \left(\frac{1}{l^2} \right)^2 g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (2.31)$$

$$q_{\mu\nu} = q_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{l^2} q_{\mu\nu}^{(1)} + \left(\frac{1}{l^2} \right)^2 q_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (2.32)$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{l^2} G_{\mu\nu}^{(1)} + \left(\frac{1}{l^2} \right)^2 G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (2.33)$$

$$K_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{l^2} K_{\mu\nu}^{(1)} + \left(\frac{1}{l^2} \right)^2 K_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (2.34)$$

Taylorontwikkeling rond $g_{\mu\nu}^{(0)}$ en (2.5) leren dat

$$\begin{aligned}
g &= \left| \det \left[g_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right] \right| \\
&= \left| \det g_{\mu\nu}^{(0)} \right| + \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}^{(0)}} \left| \det g_{\mu\nu}^{(0)} \right| + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \\
&= \left| \det g_{\mu\nu}^{(0)} \right| + \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} \left| \det g_{\mu\nu}^{(0)} \right| \text{Tr} \left(g^{\alpha\beta(0)} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}^{(0)}} g_{\beta\gamma}^{(0)} \right) + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \\
&= \left| \det g_{\mu\nu}^{(0)} \right| \left(1 + \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} g^{\alpha\beta(0)} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}^{(0)}} g_{\beta\alpha}^{(0)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right) \\
&= \left| \det g_{\mu\nu}^{(0)} \right| \left(1 + \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} g^{\alpha\beta(0)} \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right) \\
&= \left| \det g_{\mu\nu}^{(0)} \right| \left(1 + \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} g^{\nu\mu(0)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right)
\end{aligned}$$

en analoog

$$q = \left| \det q_{\mu\nu}^{(0)} \right| \left(1 + \frac{1}{l^2} q_{\mu\nu}^{(1)} q^{\nu\mu(0)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right).$$

Hiermee kunnen we schrijven

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{q}{g}} &= \sqrt{\frac{\left| \det q_{\mu\nu}^{(0)} \right| \left(1 + \frac{1}{l^2} q_{\mu\nu}^{(1)} q^{\nu\mu(0)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right)^{1/2}}{\left| \det g_{\mu\nu}^{(0)} \right| \left(1 + \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} g^{\nu\mu(0)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right)^{1/2}}} \\
&= \sqrt{\frac{q^{(0)}}{g^{(0)}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} q_{\mu\nu}^{(1)} q^{\nu\mu(0)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} g^{\nu\mu(0)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right)}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} q_{\mu\nu}^{(1)} q^{\nu\mu(0)} - \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu}^{(1)} g^{\nu\mu(0)} + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \right)}}. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Na invullen van (2.31)-(2.34) en (2.35) in (2.29)-(2.30), vinden we

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = 0 \tag{2.36}$$

$$K_{\mu\nu}^{(0)} = 0 \tag{2.37}$$

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\sqrt{\frac{q^{(0)}}{g^{(0)}}} g_{\mu\alpha}^{(0)} q^{\alpha\beta(0)} g_{\beta\nu}^{(0)} \tag{2.38}$$

$$K_{\mu\nu}^{(1)} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \alpha q_{\mu\nu}^{(0)}, \tag{2.39}$$

waarbij we termen van gelijke macht aan elkaar gelijkstellen en tot op eerste orde in $\frac{1}{l^2}$ werken. Dit zijn de vergelijkingen die worden opgelost door [3].

2.5.2 Een nulde orde, sferisch symmetrische oplossing

Om het rekenwerk te vereenvoudigen wordt sferische symmetrie verondersteld. Het doel is immers donkere materie halo's te beschrijven en die zijn sferisch symmetrisch. De statisch, sferisch symmetrische

oplossing voor (2.36) is de Schwarzschild metriek, die voor een ruimte zonder baryonische materie gewoon de vlakke metriek is:

$$g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.40)$$

Ook (2.37) heeft een Schwarzschild oplossing, maar omdat de t- en r- coördinaat zijn vastgelegd door $g_{\mu\nu}^{(0)}$, kunnen we niet veronderstellen dat zij op dezelfde elegante manier in deze Schwarzschild metriek zullen verschijnen. Daarom verschijnen β en $\tilde{k}(r)$ in de formule. In [3] wordt

$$q_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = -\beta^2 c^2 \left(1 - \frac{w_0}{\tilde{k}(r)}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{w_0}{\tilde{k}(r)}\right)^{-1} \tilde{k}'(r)^2 dr^2 + \tilde{k}(r)^2 d\Omega^2 \quad (2.41)$$

voorgesteld. Hierbij kunnen we ons de vraag stellen waarom er niet, net zoals voor $g_{\mu\nu}^{(0)}$, gezien de afwezigheid van een bron in het rechterlid van (2.37), voor gekozen werd om in een Minkowski-ruimte te werken. (Ook dan zou weliswaar de toevoeging van β en $\tilde{k}(r)$ nodig zijn.) Niettemin gaan we verder zoals in het artikel en gebruiken we (2.41) als nulde orde oplossing voor $q_{\mu\nu}$.

In document A.3 wordt aangetoond dat voor deze metriek inderdaad $K_{\mu\nu}^{(0)} = 0$ geldt, behalve voor $\tilde{k}(r) = 0$, waar er een singulariteit optreedt. Omdat men deze singulariteit niet wenst te bestuderen, wordt verondersteld dat $\tilde{k} > w_0$, wat betekent dat enkel het gebied in de $q_{\mu\nu}$ -ruimte buiten de ‘‘Schwarzschildstraal’’ wordt bekeken. Om alles een eenvoudigere vorm te geven definiëert men nog $k(r)$ als

$$k(r) = \frac{\tilde{k}}{w_0}.$$

Hiermee ligt de ‘‘Schwarzschildstraal’’ (en dus ook de horizon van de singulariteit) op $k = 1$.

2.5.3 De eerste orde oplossing en het NFW-profiel

Met de keuzes (2.40) en (2.41) kan de eerste orde oplossing worden geconstrueerd. Enkel de eerste orde correctie op $g_{\mu\nu}^{(0)}$ wordt hier berekend. (2.40) en (2.41) moeten dus ingevuld worden in (2.38), waarna de verkregen vergelijking moet opgelost worden naar $g_{\mu\nu}^{(1)}$.

Een algemene perturbatie van de vlakke metriek die ook nog eens sferisch symmetrisch is, kan worden geschreven als

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2}{c^2} \Phi(r)\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2}{c^2} \Psi(r)\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

waarbij de functies Φ en Ψ enkel van r afhangen. Met een definitie voor $m(r)$,

$$\Psi(r) = \frac{m(r)}{r - \frac{2m(r)}{c^2}},$$

wordt dit teruggebracht naar de vertrouwd aandoende vorm

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2}{c^2} \Phi(r)\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Door te schrijven

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(0)} + \frac{1}{l^2} \Phi^{(1)} + \left(\frac{1}{l^2}\right)^2 \Phi^{(2)} + \dots \\ m &= m^{(0)} + \frac{1}{l^2} m^{(1)} + \left(\frac{1}{l^2}\right)^2 m^{(2)} + \dots, \end{aligned}$$

moet, wegens het feit dat $g_{\mu\nu}^{(0)}$ de vlakke metriek is, gelden dat

$$\begin{aligned}\Phi^{(0)} &= 0 \\ m^{(0)} &= 0 \\ g_{00}^{(1)} &= -\frac{2}{c^2}\Phi^{(1)} \\ g_{rr}^{(1)} &= \frac{2m^{(1)}}{c^2 r} \\ g_{\theta\theta}^{(1)} &= 0 \\ g_{\phi\phi}^{(1)} &= 0 \\ g_{\alpha\beta}^{(1)} &= 0 \quad (\alpha \neq \beta),\end{aligned}$$

met $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Het vinden van de eerste orde correcte $g_{\mu\nu}^{(1)}$ komt er dus op neer om de $\Phi^{(1)}$ en $m^{(1)}$ te vinden die een oplossing van de eerste orde veldvergelijkingen (2.38) vormen.

Definiëert men de functie $u^{(1)}(r)$ a.d.h.v.

$$r \frac{d\Phi^{(1)}}{dr} = u^{(1)}(r) + \frac{m^{(1)}(r)}{r}, \quad (2.42)$$

dan worden de veldvergelijkingen omgevormd tot het stelsel

$$\begin{cases} \frac{dm^{(1)}}{dr} \left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{c^2}{2} \left| \frac{w_0^3}{\beta} \right| k^2 \left| \frac{dk}{dr} \right| = 0 \\ c^2 |\beta w_0| k^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) + 2u^{(1)} \left| \frac{dk}{dr} \right| = 0 \\ \frac{du^{(1)}}{dr} + c^2 |\beta w_0| r \left| \frac{dk}{dr} \right| = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

De afleiding hiervan kan teruggevonden worden in document A.4. In het artikel wordt geen aandacht besteed aan de absolute-waarde tekens en direct aangenomen dat $\frac{dk}{dr} > 0$ en dat β en w_0 positieve constanten zijn. Dit levert problemen op die in paragraaf 2.5.7 zullen besproken worden. Om de bespreking van het artikel niet te hinderen, gaan we toch verder met de vergelijkingen zonder absolute-waarde tekens.

Dit stelsel is niet analytisch oplosbaar in functie van r . Voor kleine waarden van r kan er wel een machtsontwikkeling gebruikt worden (zie document A.5) en er volgt

$$\begin{aligned}k(r) &= k_0 - \frac{1}{2} \frac{\beta c^2 w_0 k_0 (k_0 - 1)}{u^{(1)}(0)} r + O(r^2) \\ m^{(1)}(r) &= m^{(1)}(0) - \frac{1}{4} \frac{w_0^4 c^4 k_0^4}{u^{(1)}(0)} r + O(r^2) \\ u^{(1)}(r) &= u^{(1)}(0) + O(r^2),\end{aligned}$$

waarbij k_0 de waarde van k is waarvoor $r = 0$.

Merk op dat voor de rotatiesnelheid $v_{\text{circ}}(r)$ van een niet-relativistisch object op een cirkelbaan met straal r geldt

$$v_{\text{circ}}(r) = \sqrt{r \frac{d\Phi(r)}{dr}} = \sqrt{\frac{1}{l^2} \left(u^{(1)}(r) + \frac{m^{(1)}(r)}{r} \right)}. \quad (2.44)$$

Op de klassieke manier kan namelijk aangetoond worden dat in de zwakke veldlimiet $\Phi(r)$ precies de Newtoniaanse zwaartekrachtpotentiaal is.

Zo wordt

$$\lim_{r \rightarrow 0} v_{\text{circ}}(r) = 0 \quad (2.45)$$

een natuurlijke voorwaarde bij het beschrijven van een galactie of donkere materie halo. Opdat aan deze voorwaarde zou voldaan zijn, moet gelden dat

$$m^{(1)}(0) = 0 \quad (2.46)$$

en

$$u^{(1)}(0) + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dr} m^{(1)}(r)}{\frac{d}{dr} r} = 0,$$

waarbij de regel van de l' Hôpital werd gebruikt, of nog

$$u^{(1)}(0) = -\frac{dm^{(1)}}{dr}(0) = \frac{w_0^2 k_0^2 c^2}{2}. \quad (2.47)$$

Alles samen geeft dit

$$\begin{aligned} k(r) &= k_0 - \frac{\beta(k_0 - 1)}{w_0 k_0} r + O(r^2) \\ m^{(1)}(r) &= -\frac{w_0^2 k_0^2 c^2}{2} r + O(r^2) \\ u^{(1)}(r) &= \frac{w_0^2 k_0^2 c^2}{2} + O(r^2) \end{aligned}$$

als oplossing voor een donkere materie halo.

In het artikel [3] wordt tot slot opgemerkt dat de massaverdeling $\rho(r)$ in dit model net als het Navarro-Frenk-White profiel⁴ een lineaire divergentie heeft. De Poissonvergelijking geeft immers (zie document A.5)

$$4\pi G\rho(r) = \Delta\Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) = \frac{2(k_0 - 1)w_0 c^2 \beta}{l^2 r} + O(1). \quad (2.48)$$

2.5.4 Een eenvoudigere oplossing

Stelsel (2.43) zonder absolute waardes en zijn oplossingen kunnen vereenvoudigd worden door gebruik te maken van de kettingregel voor afleiden en van

$$\frac{dk}{dr} \frac{dr}{dk} = 1.$$

Dit laatste is geldig omdat $\tilde{k}(r)$ een coördinatentransformatie is. Er komt

$$\begin{cases} \frac{dr}{dk} \left(\frac{dk}{dr} \frac{dm^{(1)}}{dk} \left(1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{w_0^3 c^2}{2\beta} k^2 \frac{dk}{dr} \right) = 0 \\ \frac{dr}{dk} \left(\beta c^2 w_0 k^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) + 2u^{(1)} \frac{dk}{dr} \right) = 0 \\ \frac{dr}{dk} \left(\frac{dk}{dr} \frac{du^{(1)}}{dk} + \beta c^2 w_0 r \frac{dk}{dr} \right) = 0 \end{cases}$$

⁴Het NFW-profiel geeft de massaverdeling voor een donkere materie halo: $\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{a}{\frac{r}{r_0} \left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^2} = \frac{ar_0}{r} + O(1)$.

of

$$\begin{cases} \frac{dm^{(1)}}{dk} \left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{w_0^3 c^2}{2\beta} k^2 = 0 \\ \beta c^2 w_0 k^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{dr}{dk} + 2u^{(1)} = 0 \\ \frac{du^{(1)}}{dk} + \beta c^2 w_0 r = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Met een rekenpakket zoals Maple™ is de oplossing van (2.49) snel gevonden (zie document A.6) en er volgt

$$m^{(1)}(k) = \frac{w_0^3 c^2}{2\beta} \left(\frac{1}{3} k^3 + \frac{1}{2} k^2 + k + \ln(k-1) - h_0 \right) \quad (2.50)$$

$$r(k) = A_0 \left(- \left(k - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) - 1 \right) + B_0 \left(k - \frac{1}{2} \right) \quad (2.51)$$

$$u^{(1)}(k) = \frac{1}{2} \beta c^2 w_0 \left[A_0 \left(k^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) + k - \frac{1}{2} \right) - B_0 (k^2 - k) \right]. \quad (2.52)$$

Omdat k de radiële coördinaat is in de $q_{\mu\nu}$ -ruimte, wordt enkel het domein $k > 0$ bekeken. Aangezien voor $0 < k < 1$ o.a. $r(k)$ (de radiële coördinaat in de $g_{\mu\nu}$ -ruimte) imaginair is, wordt ook dat deel van het domein niet beschouwd. De ruimte wordt dus enkel bekeken buiten de horizon in de $q_{\mu\nu}$ -ruimte.

Om de functie $r(k)$ van dichterbij te bestuderen, wordt er eerst opgemerkt dat voor een coördinatentransformatie steeds moet gelden dat $\frac{dr}{dk} \neq 0$, wat niet het geval is als A_0 en B_0 hetzelfde teken hebben. De afgeleide is immers

$$\frac{dr}{dk} = A_0 \left(- \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{k - \frac{1}{2}}{k(k-1)} \right) + B_0 = A_0 f(k) + B_0$$

en de functie $f(k)$ kan voor $k \in]1, \infty[$ alle waarden in $]-\infty, 0[$ aannemen (zie figuur 2.2), zo ook de waarde $-\frac{B_0}{A_0} < 0$.

Voor het geval dat $A_0 < 0$ en $B_0 > 0$ (wat in het artikel [3] de “Linear Branch” wordt genoemd) ziet u op figuur 2.3a (of algemener op figuur 2.3c) dat $r(k) = 0$ voor een bepaalde waarde $k_0 > 1$. Omdat in dit geval voor grote k geldt dat

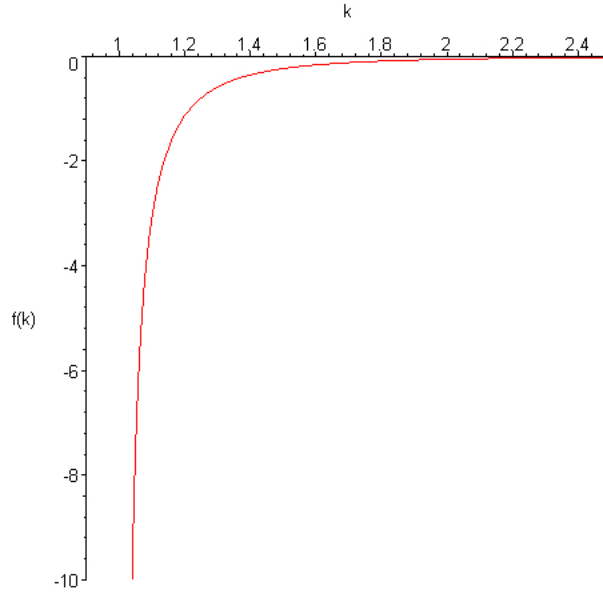
$$\frac{m(k)^{(1)}}{r(k)} \sim \frac{O(k^3)}{O(k)} \sim O(k^2)$$

en zo kwadratisch divergeert voor grote k en dus ook voor grote r (zie figuur 2.3a), wat niet fysisch is⁵, wordt deze “Linear Branch” buiten beschouwing gelaten.

De laatst overgebleven mogelijkheid $A_0 > 0$ en $B_0 < 0$ is meteen ook de interessantste. Op figuur 2.3b (of figuur 2.3d) is duidelijk te zien dat voor deze “Logarithmic Branch” (zoals dit geval in [3] wordt genoemd) $r(k)$ divergeert als $k \rightarrow 1$ en wederom $r(k) = 0$ voor een zekere $k_0 > 1$. Omdat $r < 0$ niet fysisch is, wordt het domein dat wordt onderzocht verder verkleind tot

$$1 < k \leq k_0.$$

⁵Als het ruimte-tijd continuüm voor grote r moet luisteren naar de Minkowski-metrick, mag $\frac{m(k)^{(1)}}{r(k)}$ niet divergeren, maar moet ze net nul worden voor grote r .



Figuur 2.2: $f(k)$ voor $k \in]1, \infty[$

2.5.5 Rotatiecurves van donkere materie halo's

Voor de “Logarithmic Branch” kunnen, analoog aan (2.45) en (2.46)-(2.47), h_0 en A_0 , met de voorwaarde

$$\lim_{k \rightarrow k_0} v_{\text{circ}}(k) = 0,$$

in functie van k_0 , w_0 en β worden geschreven. Met $r(k_0) = 0$ is ook B_0 op die manier te schrijven en er verschijnt (zie document A.7)

$$h_0 = \frac{1}{3}k_0^3 + \frac{1}{2}k_0^2 + k_0 + \ln(k_0 - 1) \quad (2.53)$$

$$A_0 = \frac{2w_0k_0^2(2k_0 - 1)}{\beta} \quad (2.54)$$

$$B_0 = \frac{2w_0k_0^2}{\beta} \left((2k_0 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{k_0} \right) + 2 \right). \quad (2.55)$$

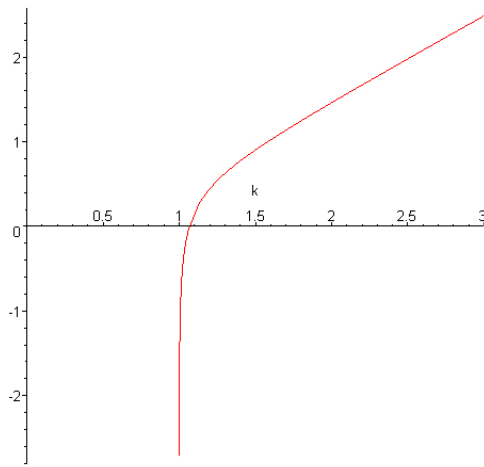
Nu kan aangetoond worden dat in dit geval de rotatiecurve voor een bepaalde k_0 -waarde naar een eindige waarde nadert:

$$v_{\infty}^2 \equiv \lim_{k \rightarrow 1} v_{\text{circ}}(k)^2 = \frac{4k_0^6 - 4k_0^5 + k_0^4 - 1}{2(2k_0 - 1)k_0^2} \frac{w_0^2}{l^2} c^2, \quad (2.56)$$

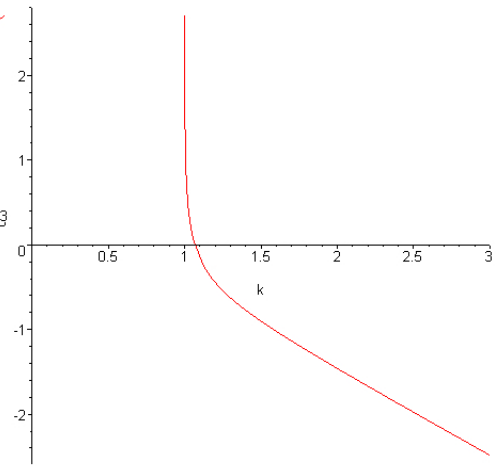
wat niet divergeert, zolang $k_0 \neq \frac{1}{2}$ en $k_0 \neq 0$, wat het geval is omdat $k_0 > 1$.

Ook grafisch is het duidelijk dat de rotatiecurve voor een welbepaalde waarde voor k_0 naar een eindige waarde nadert. Met het invoeren van een nieuwe parameter r_0 (met de dimensies van een lengte) i.p.v. de parameter β ,

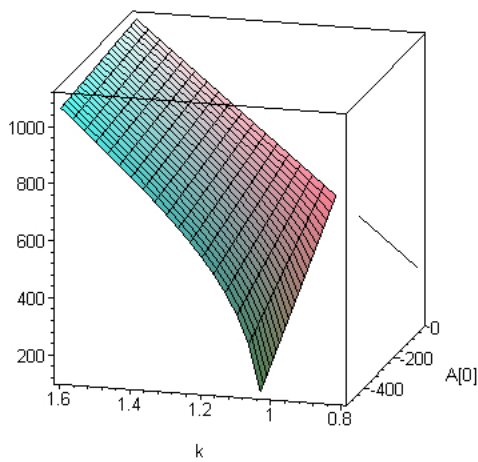
$$\beta = \frac{l}{r_0} \frac{v_{\infty}}{c}, \quad (2.57)$$



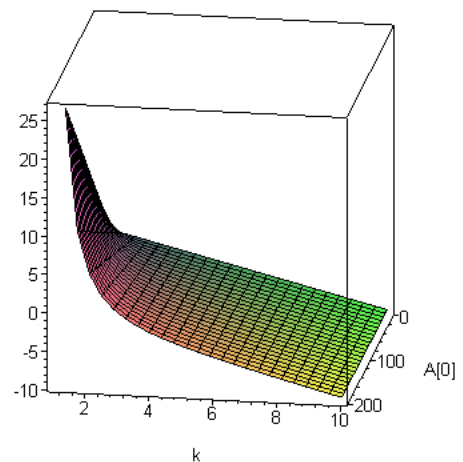
(a) "Linear Branch": $A_0 < 0, B_0 > 0$



(b) "Logarithmic Branch": $A_0 > 0, B_0 < 0$



(c) "Linear Branch" met $A_0 < 0$ als variabele.



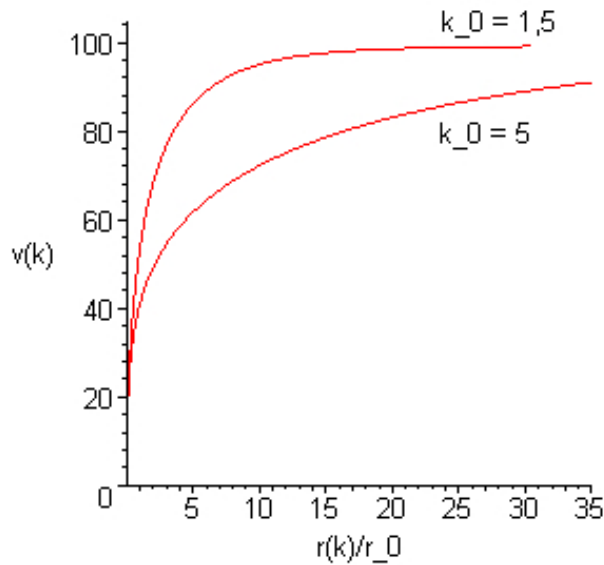
(d) "Logarithmic Branch" met $A_0 > 0$ als variabele.

Figuur 2.3: $r(k)$ voor $\text{sgn}A_0 \neq \text{sgn}B_0$. Merk op dat het geval $A_0 = 0$ onttaardt in een rechte.

verkrijgt men

$$\begin{aligned}
 r(k) &= A_0 f_a(k, k_0) & \text{en} & & v_{\text{circ}}(k) &= \frac{1}{l} \left(u^{(1)}(k) + \frac{m^{(1)}(k)}{r(k)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{2w_0}{\beta} f_b(k, k_0) & & & &= \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \beta c^2 w_0 A_0 f_d(k, k_0) + \frac{w_0^3 c^2}{A_0} f_e(k, k_0) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{l v_\infty}{c} \frac{1}{\beta} f_c(k, k_0) & & & &= \frac{1}{l} \left(\beta c^2 \frac{l v_\infty}{c} \frac{2w_0}{\beta} f_f(k, k_0) + \frac{\left(\frac{l v_\infty}{c}\right)^3 c^2}{\beta \frac{2w_0}{\beta}} f_g(k, k_0) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{l v_\infty}{c} \frac{r_0 c}{l v_\infty} f_c(k, k_0) & & & &= \frac{1}{l} \left(c l v_\infty \frac{l v_\infty}{c} f_h(k, k_0) + \frac{(l v_\infty)^3}{c} \frac{c}{l v_\infty} f_i(k, k_0) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= r_0 f_c(k, k_0) & & & &= v_\infty f_j(k, k_0),
 \end{aligned}$$

met $f_x(k, k_0)$, $x \in [a, \dots, j]$, welbepaalde functies van k en k_0 . ((2.50)-(2.52) werden hiervoor gebruikt.) Met deze parametervoorstelling van de rotatiecurves kunnen nu makkelijk grafieken zoals in figuur 2.4 worden gemaakt, waarop duidelijk te zien is dat ze naar v_∞ naderen. Hierbij legt r_0 een lengteschaal vast en k_0 beïnvloedt de snelheid waarmee de rotatiecurve naar v_∞ gaat. In hoeverre deze twee parameters daadwerkelijk een fysische betekenis hebben, wordt niet besproken in [3]. Een gedetailleerde studie hieromtrent zal volgens Bañados [3] te vinden zijn in het nog niet gepubliceerde artikel [6].



Figuur 2.4: Rotatiecurves voor $v_\infty = 100$ km/s en $k_0 = 1,5$ en $k_0 = 5$.

2.5.6 Het asymptotische regime?

Wat werd besproken in het artikel [3] is enkel een eerste orde benadering. Om daadwerkelijk iets te kunnen vertellen over het regime waarin $r \rightarrow \infty$, moet naar hogere orde correcties gekeken worden. Om dit aan te tonen zullen we de inzichten uit [18] hier kort samenvatten.

We werken weer met de ‘‘Logarithmic Branch’’. Om het geheel wat begrijpbaarder te maken, willen we alles in functie van r schrijven i.p.v. in functie van k . In het asymptotische regime is dit mogelijk door een benadering te gebruiken. Uit (2.51) blijkt dat $r(k) \rightarrow \infty$ als $k \rightarrow 1$. Door nu overal $k = 1$ in te vullen,

behalve in de divergerende ln-termen, kan (2.51) geïnverteerd worden tot

$$k(r) = \frac{1}{1 - e^{-2 + \frac{B_0}{A_0} - \frac{2}{A_0}r}}. \quad (2.58)$$

Deze uitdrukking geldt natuurlijk enkel in het asymptotische regime.

Door ook in (2.50) en (2.52) k gelijk aan 1 te stellen, behalve in de divergerende ln-termen waar (2.58) ingevuld wordt, kunnen $m^{(1)}$ en $u^{(1)}$ in functie van r geschreven worden:

$$m^{(1)}(r) = \frac{w_0^3 c^2}{2\beta} \left[-\frac{1}{6} - h_0 + \frac{B_0}{A_0} - \frac{2}{A_0}r \right] \quad (2.59)$$

$$u^{(1)}(r) = \frac{1}{2}\beta w_0 c^2 A_0 \left[e^{-2 + \frac{B_0}{A_0} - \frac{2}{A_0}r} \left(-2 + \frac{B_0}{A_0} - \frac{2}{A_0}r \right) + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.60)$$

Voor $r \rightarrow \infty$ dragen de exponentiële termen in $u^{(1)}(r)$ zeer weinig bij, daarom worden deze verwaarloosd. Dit laat toe om te schrijven

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi^{(1)}}{dr}(r) &= \frac{u^{(1)}(r)}{r} + \frac{m^{(1)}}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{4}\beta w_0 c^2 A_0 - \frac{w_0^3 c^2}{2\beta} \frac{2}{A_0} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{w_0^3 c^2}{2\beta} \left(-\frac{1}{6} - h_0 + \frac{B_0}{A_0} \right). \end{aligned}$$

Vullen we hier (2.54) in, dan vinden we, gebruik makend van (2.56),

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{dr}(r) = \frac{1}{r} v_\infty^2 l^2 + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (2.61)$$

Het feit dat de rotatiecurves plat zijn en niet dalen volgens het Newtoniaanse

$$v_{\text{circ}}(r) = \sqrt{r \frac{d\Phi}{dr}(r)} \sim \frac{1}{\sqrt{r}},$$

is te wijten aan het feit dat de eerste term in (2.61) dominant is voor grote r . Voor zeer grote r kan de $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ -term, die de Schwarzschild-massa representeert, helemaal verwaarloosd worden. Zo krijgen we

$$\Phi^{(1)}(r) = v_\infty^2 l^2 \ln \frac{r}{r_0}, \quad (2.62)$$

met r_0 een integratieconstante.

De op deze manier bekomen oplossing is slechts geldig zolang de perturbatieve oplossingmethode mag gebruikt worden. Dat betekent dat de eerste orde correcties veel kleiner moeten zijn dan de nulde orde oplossingen. Concreet voor g_{00} bijvoorbeeld moet gelden

$$1 \gg \left| \frac{\Phi^{(1)}(r)}{c^2 l^2} \right| \quad (2.63)$$

of m.a.w.

$$r \ll r_* = r_0 e^{\frac{r_0}{v_\infty^2}}.$$

Hiermee is duidelijk dat de benaderde oplossing die we bekomen hebben enkel geldig is tot op een eindige afstand van de bron. Op afstanden groter dan r_* zou het kunnen dat de rotatiesnelheden zich helemaal anders gedragen.

Ook de correctie voor g_{rr} levert restricties op. Hiervoor moet gelden dat

$$1 \gg \left| \frac{2m^{(1)}(r)}{c^2 l^2 r} \right|,$$

wat met (2.59) en verwaarlozing van de $O\left(\frac{1}{r}\right)$ -termen voor grote r neer komt op

$$\frac{2w_0^3}{\beta l^2 A_0} = \frac{w_0^2}{c^2 k_0^2 (2k_0 - 1)} \ll 1.$$

Hieraan moeten de vrije parameters (k_0, w_0) voldoen opdat de perturbatieve oplossing zou gelden.

2.5.7 Het effect van absolute waarde tekens

Zoals reeds gemeld werd, wordt in het artikel [3] geen aandacht besteed aan het verschijnen van absolute waarde tekens in het stelsel (2.43). Laten we even een kijkje nemen naar het effect van deze absolute waarde tekens op de oplossingen van de veldvergelijkingen. Hiervoor zetten we het stelsel weer om naar een stelsel in functie van k i.p.v. in functie van r :

$$\begin{cases} \frac{dm^{(1)}}{dk} \left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{c^2}{2} \left| \frac{w_0^3}{\beta} \right| k^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{dr}{dk} \right) = 0 \\ c^2 |\beta w_0| k^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left| \frac{dr}{dk} \right| + 2u^{(1)} = 0 \\ \frac{du^{(1)}}{dk} + c^2 |\beta w_0| r \operatorname{sgn} \left(\frac{dr}{dk} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

De oplossing van dit stelsel (voor de berekening zie document A.4) is

$$m^{(1)}(k) = \frac{c^2}{2} \operatorname{sgn} \left(\frac{dr}{dk} \right) \left| \frac{w_0^3}{\beta} \right| \left(\frac{1}{3} k^3 + \frac{1}{2} k^2 + k + \ln(k-1) - h_0 \right) \quad (2.65)$$

$$u^{(1)}(k) = -\frac{1}{2} c^2 |\beta w_0| k^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left| \frac{dr}{dk} \right| \quad (2.66)$$

$$r(k) = A_0 \left(-\left(k - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) - 1 \right) + B_0 \left(k - \frac{1}{2}\right). \quad (2.67)$$

Het fundamentele verschil met (2.50)-(2.52) is dat het teken van de afgeleide van $r(k)$ een invloed heeft op $m^{(1)}(k)$.

Net als eerder moet $k > 1$ zijn, om een fysische oplossing te kunnen hebben. Ook A_0 en B_0 moeten weer een verschillend teken hebben, omdat er anders steeds een zekere waarde voor k bestaat die $\frac{dr}{dk}$ nul maakt. Dat is niet toegelaten, want $r(k)$ is nog altijd een coördinatentransformatie.

Zoals in sectie 2.5.4 levert de ‘‘Linear Branch’’ ($A_0 < 0$ en $B_0 > 0$) uit figuur 2.3a geen fysisch gewenste oplossing op, want $\frac{m^{(1)}}{r}$ divergeert voor grote r . Niet erg, het is toch de ‘‘Logarithmic Branch’’ ($A_0 > 0$ en $B_0 < 0$) uit figuur 2.3b waar we in geïnteresseerd zijn. Opgeliet, hier is $r(k)$ een dalende functie, wat betekent dat de uitdrukking voor $m^{(1)}(k)$ op een minteken zal verschillen van (2.50).

Met de definitie (2.44) voor de rotatiesnelheid, vinden we

$$v_\infty^2 = \lim_{k \rightarrow 1} v_{\text{circ}}(k)^2 = \frac{c^2}{4l^2} \frac{4w_0^2 - \beta^2 A_0^2}{A_0} \left| \frac{w_0}{\beta} \right|.$$

Dit lijkt op het eerste zicht heel interessant, want het is een eindige asymptotische rotatiesnelheid waar we naar op zoek zijn. Dit is echter slechts positief als $4w_0^2 > \beta^2 A_0^2$, want A_0 is positief voor de ‘‘Logarithmic Branch’’.

Met de definitie van k_0 ,

$$r(k_0) = 0,$$

en de randvoorwaarden

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m^{(1)}}{r} \neq \infty \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow k_0} \frac{m^{(1)}(k)}{r(k)} \neq \infty \Leftrightarrow m^{(1)}(k_0) = 0$$

en

$$\lim_{k \rightarrow k_0} v_{\text{circ}}(k) = 0 \Leftrightarrow m^{(1)}(k_0) = 0 \text{ en } u^{(1)}(k_0) + \lim_{k \rightarrow k_0} \frac{dm^{(1)}}{\frac{dr}{dk}} = 0$$

kunnen we A_0 , B_0 en h_0 herschrijven als

$$B_0 = \frac{A_0}{2k_0 - 1} \left((2k_0 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{k_0} \right) + 2 \right) \quad (2.68)$$

$$h_0 = \frac{1}{3} k_0^3 + \frac{1}{2} k_0^2 + k_0 + \ln(k_0 - 1) \quad (2.69)$$

$$A_0 = \pm \frac{2w_0 k_0^2 (2k_0 - 1)}{|\beta|}. \quad (2.70)$$

Het is duidelijk dat B_0 steeds het tegenovergestelde teken heeft van A_0 , want voor $k_0 > 1$ is de uitdrukking in k_0 in (2.68) steeds negatief. Doordat $A_0 > 0$ moet zijn, moet $\text{sgn}(w_0) = \mp 1$. Dit heeft verre gaande consequenties voor v_∞^2 :

$$\begin{aligned} v_\infty^2 &= \pm \frac{4k_0^6 - 4k_0^5 + k_0^4 - 1}{2(2k_0 - 1)k_0^2} \frac{w_0 |w_0| c^2}{l^2} \\ &= \pm \frac{4k_0^6 - 4k_0^5 + k_0^4 - 1}{2(2k_0 - 1)k_0^2} \frac{\mp w_0^2 c^2}{l^2} \\ &= - \frac{4k_0^6 - 4k_0^5 + k_0^4 - 1}{2(2k_0 - 1)k_0^2} \frac{w_0^2 c^2}{l^2} \end{aligned}$$

en dat is steeds negatief, wegens $k_0 > 1$. De voorwaarde $4w_0^2 > \beta^2 A_0^2$ is dus nooit voldaan.

Net als in de voorgaande sectie kunnen we nu het gedrag van de potentiaal $\Phi^{(1)}$ voor $r \rightarrow \infty$ bestuderen. Volledig analoog als voorheen bekomen we

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi^{(1)}}{dr}(r) &= -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{4} |\beta w_0| c^2 A_0 - \left| \frac{w_0^3}{\beta} \right| \frac{c^2}{A_0} \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ &= \frac{1}{r} v_\infty^2 l^2 + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Wegens het negatief zijn van v_∞^2 , betekent dit dat $\Phi^{(1)}$ (voor grote r) een afstotende potentiaal is. Met deze potentiaal kan geen donkere materie beschreven worden.

De vraag of er überhaupt een statische, sferisch symmetrische en fysische oplossing zonder massabron bestaat voor (2.2)-(2.3) die donkere materie kan beschrijven, moeten we dus negatief beantwoorden. In het volgende hoofdstuk nemen we daarom een kijkje naar de mogelijkheden wanneer er wel baryonische massa aanwezig is in het centrum. Bestaan er dan statische, sferisch symmetrische en fysische oplossingen en indien ja, kunnen ze asymptotisch eindige rotatiecurves genereren?

HOOFDSTUK 3

Perturbatieve oplossing voor $T_{\mu\nu}^{(m)} \neq 0$

“To confine our attention to terrestrial matters would be to limit the human spirit.”

S. Hawking

3.1 Opzet

3.1.1 Storing door een kleine baryonische massa

Na de perturbatieve oplossingen van de bewegingsvergelijkingen (2.2)-(2.3) te hebben bekeken voor een vlak en leeg heelalmodel, willen we in dit hoofdstuk nagaan wat het effect is van een kleine, sferisch symmetrische massa in het in sectie 2.3 voorgestelde ‘de Sitter’-heelal. We hebben het dus enkel over late tijdstippen, waarop het universum reeds gedomineerd wordt door donkere energie. Hiervoor gaan we wederom perturbatief te werk.

Net als bij de Newtoniaanse benadering van de algemene relativiteitstheorie zullen we op zoek gaan naar een reeksoplossing in $G\rho(r)$. Daarom schrijven we de massadichtheid van die sferisch symmetrische massa als

$$\rho(r) = \varepsilon\rho^{(1)}(r),$$

met ε een kleine perturbatieve grootheid. Op deze manier kunnen we de metriek van een ‘de Sitter’-heelal,

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

perturberen tot

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = & -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \varepsilon A^{(1)}(r) + \varepsilon^2 A^{(2)}(r) + \dots\right) dt^2 \\ & + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \varepsilon B^{(1)}(r) + \varepsilon^2 B^{(2)}(r) + \dots\right)^{-1} dr^2 \\ & + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de ijkvrijheid om de radiële coördinaat r onaangepast te laten en voor het gemak werken met $c = 1$. Analoog krijgen we uit $q_{\mu\nu}^{(0)} = \gamma g_{\mu\nu}^{(0)}$ (zie (2.19)) de geperturbeerde metriek

$$\begin{aligned} q_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = & -\left(\gamma\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) + \varepsilon C^{(1)}(r) + \varepsilon^2 C^{(2)}(r) + \dots\right) dt^2 \\ & + \left(\frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) + \varepsilon D^{(1)}(r) + \varepsilon^2 D^{(2)}(r) + \dots\right)^{-1} dr^2 \\ & + \left(\gamma + \varepsilon E^{(1)}(r) + \varepsilon^2 E^{(2)}(r) + \dots\right) r^2 d\Omega^2. \end{aligned}$$

De functies $E^{(i)}$ treden op omdat de ijkvrijheid reeds werd opgebruikt bij het vastleggen van r en er dus niet vanuit kan gegaan worden dat de radiële coördinaat in de q -ruimte onveranderd blijft door de intrede van de massa.

Oplossen van de bewegingsvergelijkingen (2.2)-(2.3) tot op nulde orde in ε geeft, net als in sectie 2.3,

$$\gamma = \frac{1}{1 - \alpha}$$

$$\Lambda = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{l^2},$$

aangezien de massa nog geen invloed heeft op de nulde orde vergelijkingen.

Wanneer we hogere ordes willen bestuderen, hebben we de vorm van de baryonische energietensor $T_{\mu\nu}^{(m)}$ nodig. Als we veronderstellen dat de geïntroduceerde massa bestaat uit een ideale vloeistof en statisch is (we zoeken dus niet naar oplossingen voor veranderende massa's), dan is

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = (\rho(r) + p(r))U_\mu U_\nu + p(r)g_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Hierbij is de genormaliseerde ($U^\mu U_\mu = -1$) viersnelheid

$$U_\mu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = (\sqrt{-g_{00}}, 0, 0, 0) = \left(\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \varepsilon A^{(1)}(r) + \varepsilon^2 A^{(2)}(r) + \dots}, 0, 0, 0 \right)$$

gericht volgens de tijdsrichting, aangezien we enkel in statische oplossingen (niet afhankelijk van t) geïnteresseerd zijn. τ is de eigentijd. Invullen in (3.1) geeft

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \begin{bmatrix} -\varepsilon \rho^{(1)}(r) g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & (\varepsilon p^{(1)}(r) + \varepsilon^2 p^{(2)}(r) + \dots) g_{ii} & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

met g_{ii} de ruimtelijke componenten van de metriek. De eerste orde term in de drukfunctie

$$p(r) = \varepsilon p^{(1)}(r) + \varepsilon^2 p^{(2)}(r) + \dots,$$

zal klein moeten zijn ten opzichte van $\rho^{(1)}(r)$, want we zijn vooral geïnteresseerd in het effect van niet-relativistische massa's (wat ook soms stof of simpelweg *materie* genoemd wordt) op de vorm van de metrieken. Deze materie heeft normaal geen drukcomponent in haar energietensor, maar zoals zal blijken is dat hier wegens de aanwezigheid van het EBI-veld iets anders.

Om behoud van baryonische energie te verkrijgen, moet

$$\left(T_{(m)}^{\mu\nu} \right)_{;\mu} = 0 \quad (3.3)$$

gelden. Hieruit kunnen we, perturberend volgens ε , uitdrukkingen voor $p^{(1)}(r)$, $p^{(2)}(r)$, ... bepalen. Een randvoorwaarde hierbij is dat de druk nul moet zijn op plaatsten waar er zich geen materie bevindt.

3.1.2 Storing door het EBI-veld

Voor elke orde in de perturbatie volgens ε zullen we de oplossing wederom zoeken a.d.h.v. storingsrekening, nu perturberend volgens $\frac{1}{l^2}$, zoals in sectie 2.5. Het gebruik van deze dubbele perturbatie dient tot

het opsplitsen en afzonderlijk bestuderen van de effecten die de geïntroduceerde baryonische massa en het EBI-veld hebben op de gravitatie. De eerste orde correcties worden herschreven als

$$\begin{aligned}
A^{(1)}(r) &= A^{(1,0)}(r) + \frac{1}{l^2}A^{(1,1)}(r) + \left(\frac{1}{l^2}\right)^2 A^{(1,2)}(r) + \dots \\
B^{(1)}(r) &= B^{(1,0)}(r) + \frac{1}{l^2}B^{(1,1)}(r) + \left(\frac{1}{l^2}\right)^2 B^{(1,2)}(r) + \dots \\
C^{(1)}(r) &= C^{(1,0)}(r) + \frac{1}{l^2}C^{(1,1)}(r) + \left(\frac{1}{l^2}\right)^2 C^{(1,2)}(r) + \dots \\
D^{(1)}(r) &= D^{(1,0)}(r) + \frac{1}{l^2}D^{(1,1)}(r) + \left(\frac{1}{l^2}\right)^2 D^{(1,2)}(r) + \dots \\
E^{(1)}(r) &= E^{(1,0)}(r) + \frac{1}{l^2}E^{(1,1)}(r) + \left(\frac{1}{l^2}\right)^2 E^{(1,2)}(r) + \dots \\
p^{(1)}(r) &= p^{(1,0)}(r) + \frac{1}{l^2}p^{(1,1)}(r) + \left(\frac{1}{l^2}\right)^2 p^{(1,2)}(r) + \dots
\end{aligned}$$

en analoog voor de tweede orde correcties.

Al deze gegevens in de bewegingsvergelijkingen stoppen (en voor $p(r)$ in (3.3)) en de oplossingen zoeken voor elk van de correcties is veel rekenwerk. Daarom is in document A.8 de Maple-code terug te vinden die dit alles bewerkstelligt. In de volgende paragrafen bespreken we de belangrijkste stappen en resultaten.

3.1.3 De randvoorwaarden

Elk stelsel van differentiaalvergelijkingen heeft een stel randvoorwaarden nodig om helemaal opgelost te kunnen worden. Hier kunnen die randvoorwaarden met een beetje fysisch inzicht achterhaald worden. We wensen geen singulariteiten te beschrijven, zodat de voorwaarden

$$\lim_{r \rightarrow 0} A^{(1,0)}(r) \neq \infty \quad (3.4)$$

en

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dA^{(1,0)}}{dr}(r) = 0 \quad (3.5)$$

voorop gesteld kunnen worden, met analoge uitdrukkingen voor $F^{(i,j)}(r)$, $F \in \{A, B, C, D, E, p\}$, $i \in \{1, 2, \dots\}$ en $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Daarnaast beschrijven we het effect van een eindige massa. Dat effect mag ver van de bron niet meer te voelen zijn, wat betekent dat de voorwaarden

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A^{(1)}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B^{(1)}(r) = 0 \quad (3.6)$$

en

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dA^{(1)}}{dr}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dB^{(1)}}{dr}(r) = 0 \quad (3.7)$$

moeten gelden (en analoog voor $F^{(i)}(r)$). Omdat deze functies echter ook volgens $\frac{1}{l^2}$ werden ontwikkeld en daarvoor moet gelden dat $r \ll l$, kunnen we r niet naar oneindig laten naderen zonder de geldigheid van de oplossing te schaden. Van deze randvoorwaarden kunnen we dus jammergenoeg geen gebruik maken, waardoor bij het oplossen van de differentiaalvergelijkingen enkele integratieconstanten onbepaald zullen blijven.

3.2 Eerste orde in ε

3.2.1 Nulde orde in $\frac{1}{l^2}$

Starten we met de nulde orde correcties in $\frac{1}{l^2}$. Laten we voor het gemak refereren naar eerste orde in ε en bijvoorbeeld nulde orde in $\frac{1}{l^2}$ als $(1,0)$. De vergelijkingen (2.2) zullen de componenten van $g_{\mu\nu}$ orde per orde bepalen, terwijl (2.3) de correcties op $q_{\mu\nu}$ zal bepalen. Uit (2.3) is duidelijk dat de (i,j) -de orde correcties op $g_{\mu\nu}$ nooit invloed zullen hebben op de (i,j) -de orde correcties op $q_{\mu\nu}$ (in tegenstelling tot de $(i,j-1)$ -ste orde). Daarom kunnen we de veldvergelijkingen voor iedere orde (i,j) bekijken als twee onafhankelijke stelsels van drie onafhankelijke vergelijkingen.

Vooraleer die twee stelsels te bekijken voor de orde $(1,0)$, bepalen we de $(1,0)$ -vergelijking voor $p(r)$. Uit (3.2) en (3.3) vinden we simpelweg

$$\frac{dp^{(1,0)}}{dr} = 0,$$

met als oplossing

$$p^{(1,0)}(r) = C_p^{(1,0)}.$$

Als we niet-relativistische materie willen beschrijven, moet de constante $C_p^{(1,0)}$ nul zijn.

Het $G_{\mu\nu}$ -stelsel

Het $(1,0)$ -stelsel voor $G_{\mu\nu}$ ziet er als volgt uit:

$$\left\{ \begin{array}{l} -B^{(1,0)} - r \frac{dB^{(1,0)}}{dr} = 8\pi G \rho^{(1)} r^2 \\ B^{(1,0)} + r \frac{dA^{(1,0)}}{dr} = 0 \\ \frac{dA^{(1,0)}}{dr} + \frac{dB^{(1,0)}}{dr} + r \frac{d^2A^{(1,0)}}{dr^2} = 0. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Definiëren we de functie $m^{(1)}(r)$ als¹

$$\begin{aligned} m^{(1)}(r) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^r \rho^{(1)}(r') r'^2 dr' \\ &= 4\pi \int_0^r \rho^{(1)}(r') r'^2 dr', \end{aligned}$$

dan zijn de oplossingen van (3.8)

$$A^{(1,0)}(r) = \int \frac{2Gm^{(1)}(r) - C_2}{r^2} dr + C_1 \quad (3.9)$$

en

$$B^{(1,0)}(r) = -\frac{2Gm^{(1)}(r) - C_2}{r}. \quad (3.10)$$

¹Door deze definitie is het verleidelijk om $m^{(1)}(r)$ te interpreteren als de totale energie binnen een straal r . Het volume-element in een gekromde ruimte is echter niet $r^2 dr d\Omega$, maar $\sqrt{g_{rr}} r^2 dr d\Omega$. De totale energie binnen de straal r is dan $M^{(1)}(r) = 4\pi \int_0^r \rho^{(1)}(r') \sqrt{g_{rr}(r')} r'^2 dr$.

De integratieconstanten C_i , $i \in \mathbb{N}$, kunnen zoals eerder aangehaald niet allemaal bepaald worden a.d.h.v. (3.4)-(3.5). Hierdoor moeten we C_1 volledig vrij laten. C_2 kunnen we echter wel bepalen:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} B^{(1,0)}(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{2Gm^{(1)}(r) - C_2}{r} \neq \infty \\ &\Leftrightarrow C_2 = 2Gm^{(1)}(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Het $K_{\mu\nu}$ -stelsel

De (1,0)-vergelijkingen die volgen uit (2.3) zijn

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{dC^{(1,0)}}{dr} + r\frac{d^2C^{(1,0)}}{dr^2} = 0 \\ 2\frac{dE^{(1,0)}}{dr} + r\frac{d^2E^{(1,0)}}{dr^2} + \frac{r}{2}\frac{d^2C^{(1,0)}}{dr^2} = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\frac{dD^{(1,0)}}{dr} \\ r\frac{dC^{(1,0)}}{dr} + 2E^{(1,0)} + 4r\frac{dE^{(1,0)}}{dr} + r^2\frac{d^2E^{(1,0)}}{dr^2} = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(r\frac{dD^{(1,0)}}{dr} + 2D^{(1,0)}\right) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

met als oplossingen

$$C^{(1,0)}(r) = C_3 + \frac{C_4}{r}, \quad (3.12)$$

$$D^{(1,0)}(r) = -(\alpha-1)^2 \left(E^{(1,0)}(r) + r\frac{dE^{(1,0)}}{dr}(r) - \frac{C_4}{r} \right), \quad (3.13)$$

en

$$E^{(1,0)}(r) = E^{(1,0)}(r). \quad (3.14)$$

De oplossing van dit stelsel laat $E^{(1,0)}(r)$ vrij, wat tot op deze orde zou kunnen geïnterpreteerd worden als een ijkvrijheid in de q -ruimte. In de volgende orde voor $\frac{1}{l^2}$ zal $E^{(1,0)}(r)$ echter vastgelegd worden door de vergelijkingen. Daar zal dan $E^{(1,1)}(r)$ onbepaald blijven.

(3.4)-(3.5) leggen C_4 vast:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} C^{(1,0)}(r) &= C_3 + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_4}{r} \neq \infty \\ &\Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_4}{r} \neq \infty \\ &\Leftrightarrow C_4 = 0.\end{aligned}$$

3.2.2 Eerste orde in $\frac{1}{l^2}$

Onze eerste taak is om $p^{(1,1)}(r)$ te bepalen uit het (1,1)-deel van (3.3):

$$\frac{dp^{(1,1)}}{dr} + \frac{r}{3(\alpha-1)}\rho^{(1)} = 0$$

en dus

$$p^{(1,1)}(r) = -\frac{1}{\alpha-1} \int \rho^{(1)}(r) r dr + C_p^{(1,1)}.$$

We zullen hier de rest van de op te lossen vergelijkingen niet volledig uitschrijven, ze zijn terug te vinden in document A.8. De oplossingen van de drie $G_{\mu\nu}$ -gerelateerde (1,1)-vergelijkingen zijn

$$A^{(1,1)}(r) = \frac{2G}{3(\alpha-1)} \int r^{-2} \left[-3 \int r^2 \int r^{-1} \frac{dm^{(1)}}{dr} dr dr + \int r^2 \frac{dm^{(1)}}{dr} dr + 6 \int r m^{(1)} dr \right] dr - \frac{1}{3} r^2 C_3 - \frac{C_5}{r} + 4r^2 \pi G C_p^{(1,1)} + C_6 \quad (3.15)$$

$$B^{(1,1)}(r) = \frac{4G}{6(\alpha-1)} \left(r^{-1} \int \left[r^2 \int 3r^{-1} \frac{dm^{(1)}}{dr} dr - r^2 \frac{dm^{(1)}}{dr} - 8r m^{(1)} \right] dr - r^2 \int r^{-1} \frac{dm^{(1)}}{dr} dr + 2r^2 \int m^{(1)} r^{-2} dr + 2m^{(1)} r \right) + \frac{C_1}{6(\alpha-1)} r^2 + \frac{1}{6} r^2 C_3 - \frac{C_5}{r} + \frac{2}{3} \frac{C_7}{r} - \frac{1}{2} r^2 C_8 \quad (3.16)$$

$$E^{(1,0)}(r) = -\frac{2G}{\alpha-1} \int m^{(1)} r^{-2} dr - \frac{1}{3} \frac{C_7}{r^3} + C_8. \quad (3.17)$$

Zoals reeds aangegeven, wordt $E^{(1,0)}(r)$ hier pas vastgelegd.

De randvoorwaarden kunnen ons niet echt veel vertellen over het algemeen geval waar $m^{(1)}(r)$ vrij gelaten wordt.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dA^{(1,1)}}{dr}(r) = 0$$

vertelt ons bijvoorbeeld wel dat

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{2G}{3(\alpha-1)} \frac{1}{r^2} \left[-3 \int r^2 \int r^{-1} \frac{dm^{(1)}}{dr} dr dr + \int r^2 \frac{dm^{(1)}}{dr} dr + 6 \int r m^{(1)} dr \right] + \frac{C_5}{r^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow C_5 = -\frac{2G}{3(\alpha-1)} \lim_{r \rightarrow 0} \left(-3 \int r^2 \int r^{-1} \frac{dm^{(1)}}{dr} dr dr + \int r^2 \frac{dm^{(1)}}{dr} dr + 6 \int r m^{(1)} dr \right),$$

maar zonder een specifieke vorm voor $m^{(1)}(r)$ betekent dat niet veel. Een gelijkaardige uitdrukking is te vinden voor C_7 door $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dE^{(1,0)}}{dr}(r) = 0$ te gebruiken.

De algemene uitdrukkingen voor verdere ordes zijn te uitgebreid om ze hier neer te schrijven. Enkele hiervan zijn terug te vinden in document A.8.

3.3 Beschrijving van een compacte massa

Om de gevonden uitdrukkingen makkelijker interpreteerbaar te maken, gebruiken we een zeer simpele massaverdeling, die toch als eerste approximatie voor bijvoorbeeld een galactie kan dienen:

$$\rho^{(1)}(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{als } r < r_0 \\ 0 & \text{als } r > r_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Deze massaverdeling kan gezien worden als die van een sferisch symmetrische massa die zich binnen een straal r_0 bevindt en die overal dezelfde massadichtheid heeft.

3.3.1 Inleidend voorbeeld

Oplossingsmethode

Door de stuksgewijze definitie van $\rho(r)$ zullen we een ietwat andere oplossingsmethode moeten gebruiken om de veldvergelijkingen verder te kunnen oplossen. Om deze methode te illustreren bespreken we hoe we de oplossing van

$$\square \phi(r) + m^2 \phi(r) = -4\pi G \rho(r),$$

of anders geschreven

$$\Delta \phi(r) - m^2 \phi(r) = \phi'' + \frac{2}{r} \phi' - m^2 \phi = 4\pi G \rho_0 H(r_0 - r), \quad (3.19)$$

kunnen vinden. De stuksgewijze functie $\rho(r)$ werd uitgedrukt als een stapfunctie, met $H(x)$ de Heaviside functie. Deze vergelijking beschrijft een statisch, sferisch symmetrisch scalair veld met een van nulverschillende massa m dat koppelt aan materie. Het is één van de veldvergelijkingen afgeleid van de Brans-Dicke² actie op de Minkowski-ruimte.

Als we $\phi(r)$ ook schrijven als een stapfunctie,

$$\phi(r) = \phi_s(r) H(r_0 - r) + \phi_b(r) H(r - r_0),$$

dan kan de vergelijking (3.19) opgesplitst worden in een vergelijking voor $r < r_0$,

$$\phi_s'' + \frac{2}{r} \phi_s' - m^2 \phi_s = 4\pi G \rho_0, \quad (3.20)$$

en één voor $r > r_0$,

$$\phi_b'' + \frac{2}{r} \phi_b' - m^2 \phi_b = 0. \quad (3.21)$$

Vergelijking (3.20) heeft de particuliere oplossing

$$\phi_s(r) = -\frac{4\pi G \rho_0}{m^2}.$$

Met de twee onafhankelijke oplossingen

$$\phi_s(r) = \frac{e^{-mr}}{r}$$

en

$$\phi_s(r) = \frac{e^{mr}}{r}$$

van de homogene vergelijking, vinden we de algemene oplossing voor $\phi_s(r)$ als

$$\phi_s(r) = C_1 \frac{e^{-mr}}{r} + C_2 \frac{e^{mr}}{r} - \frac{4\pi G \rho_0}{m^2}.$$

Analoog volgt er uit (3.21) dat

$$\phi_b(r) = C_3 \frac{e^{-mr}}{r} + C_4 \frac{e^{mr}}{r}.$$

²De Brans-Dicke zwaartekrachttheorie is een alternatief voor de algemene relativiteitstheorie. Ze gaat uit van een scalair veld dat de energie-tensor beïnvloedt, naast het bestaan van een gravitatieveld. Om de klassieke tests (afbuiging van licht, perihelium precessie) voor de algemene relativiteitstheorie te kunnen verklaren met de Brans-Dicke theorie, moet een belangrijke parameter ω zeer groot worden.

Om de integratieconstanten $C_i, i \in \{1, \dots, 4\}$, te kunnen bepalen, hebben we randvoorwaarden nodig. Naar analogie met (3.5) en (3.7) stellen we

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi'(r) = 0 \quad (3.22)$$

en

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi'(r) = 0 \quad (3.23)$$

voorop. Uit (3.22) kan $C_1 = -C_2$ gehaald worden en (3.23) geeft $C_4 = 0$. Er blijven nog twee onbepaalde integratieconstanten staan. We hebben dus nog andere randvoorwaarden nodig. Deze leiden we af uit de algemene vergelijking (3.19).

Omdat de afgeleide van de Heaviside stapfunctie $H(r - r_0)$ de Dirac-delta distributie $\delta(r - r_0)$ is, ziet de vergelijking er volledig uitgeschreven als volgt uit:

$$\begin{aligned} & \left(\phi_s'' + \frac{2}{r} \phi_s' - m^2 \phi_s \right) H(r_0 - r) + \left(\phi_b'' + \frac{2}{r} \phi_b' - m^2 \phi_b \right) H(r - r_0) \\ & - 2 \left(\phi_s' - \phi_b' + \frac{\phi_s}{r} - \frac{\phi_b}{r} \right) \delta(r_0 - r) + (\phi_s - \phi_b) \delta'(r_0 - r) = 4\pi G\rho_0 H(r_0 - r). \end{aligned}$$

$\delta'(r - r_0)$ stelt de afgeleide³ van de Dirac-delta distributie voor. We zien de vergelijkingen (3.20) en (3.21) mooi terug verschijnen. Voor $r = r_0$ zullen $\delta(r - r_0)$ en $\delta'(r - r_0)$ zich echter niet regulier gedragen, zodat we de coëfficiënten van deze distributies voor $r = r_0$ gelijk aan nul moeten veronderstellen. Dat levert de randvoorwaarden

$$\phi_s(r_0) = \phi_b(r_0) \quad (3.24)$$

en

$$\phi_s'(r_0) = \phi_b'(r_0). \quad (3.25)$$

Zo worden de uiteindelijke waarden van de integratieconstanten

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2\pi G\rho_0}{m^2 e^{mr_0}} \left(r_0 + \frac{1}{m} \right) \\ C_2 &= \frac{2\pi G\rho_0}{m^2 e^{mr_0}} \left(r_0 + \frac{1}{m} \right) \\ C_3 &= -\frac{2\pi G\rho_0}{m^2} \left(r_0 (e^{mr_0} + e^{-mr_0}) - \frac{1}{m} (e^{mr_0} - e^{-mr_0}) \right) \\ C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Illustratie: afschatting van de vrije integratieconstanten in de perturbatieve oplossing

De bovenstaande methode van het opsplitsen van de differentiaalvergelijking in twee gevallen en het bepalen van de randvoorwaarden door de coëfficiënten van de optredende distributies nul te stellen in r_0 , zullen we ook gebruiken voor het bepalen van de oplossingen van de veldvergelijkingen voor een compacte massa. Omdat daar echter ook nog eens een perturbatieve benadering moet worden bijgevoegd, kunnen we randvoorwaarden van de vorm (3.23) niet gebruiken, waardoor er een integratieconstante vrij gelaten moet worden. Deze constante kan echter wel afgeschat worden. De redenering hierachter, die te vinden is in de volgende paragraaf, kan geïllustreerd worden met dit voorbeeld.

³De afgeleide van de Dirac-delta distributie wordt gedefinieerd via $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(r) f(r) dr = -f'(0)$ en is in tegenstelling tot $\delta(r)$ een oneven distributie van r .

Een perturbatieve oplossing van het stelsel (3.19) kan gevonden worden door m^2 als perturbatieparameter te gebruiken. De details kunnen gevonden worden in document A.9. De resultaten zijn:

$$\begin{aligned}\phi_s(r) &= \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2 - 2\pi G\rho_0 r_0^2 + C_\infty^{(0)} + \left(\frac{1}{30}\pi G\rho_0 r^4 - \frac{1}{3}\pi G\rho_0 r_0^2 r^2 - \frac{1}{2}\pi G\rho_0 r_0^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}C_\infty^{(0)} r^2 + C_\infty^{(1)} \right) m^2 + O(m^4), \\ \phi_b(r) &= -\frac{4}{3}\frac{\pi G\rho_0 r_0^3}{r} + C_\infty^{(0)} + \left(-\frac{2}{15}\frac{\pi G\rho_0 r_0^5}{r} - \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r_0^3 r + \frac{1}{6}r^2 C_\infty^{(0)} + C_\infty^{(1)} \right) m^2 + O(m^4).\end{aligned}$$

$C_\infty^{(0)}$ is de vrije integratieconstante uit de nulde orde oplossing die bepaald wordt door het gedrag van ϕ op oneindig. Dat gedrag kan niet bestudeerd worden, omdat we moeten aannemen dat $r \ll \frac{1}{m}$ om de perturbatie te mogen uitvoeren. Analoog voor de eerste orde in m^2 en $C_\infty^{(1)}$. Vergelijken we dit met de exacte oplossingen ontwikkeld volgens m ,

$$\begin{aligned}\phi_s(r) &= \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2 - 2\pi G\rho_0 r_0^2 + \frac{4}{3}\pi G\rho_0 r_0^3 m + \left(\frac{1}{30}\pi G\rho_0 r^4 - \frac{1}{3}\pi G\rho_0 r_0^2 r^2 - \frac{1}{2}\pi G\rho_0 r_0^4 \right) m^2 \\ &\quad + \left(\frac{2}{9}\pi G\rho_0 r_0^3 r^2 + \frac{2}{15}\pi G\rho_0 r_0^5 \right) m^3 + O(m^4) \\ \phi_b(r) &= -\frac{4}{3}\frac{\pi G\rho_0 r_0^3}{r} + \frac{4}{3}\pi G\rho_0 r_0^3 m + \left(-\frac{2}{15}\frac{\pi G\rho_0 r_0^5}{r} - \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r_0^3 r \right) m^2 \\ &\quad + \left(\frac{4}{9}\pi G\rho_0 r_0^3 r^2 + \frac{2}{15}\pi G\rho_0 r_0^5 \right) m^3 + O(m^4),\end{aligned}\tag{3.26}$$

dan zien we dat

$$C_\infty^{(0)} = \frac{4}{3}\pi G\rho_0 r_0^3 m \sim GMm\tag{3.27}$$

$$C_\infty^{(1)} = \frac{2}{15}\pi G\rho_0 r_0^5 m \sim GMr_0^2 m,\tag{3.28}$$

met

$$M = \frac{4}{3}\pi G\rho_0 r_0^3.$$

Hier kunnen we al een vermoeden van het uiteindelijke effect van het EBI-veld op de gravitatie uiten. De eerste orde correctie op $-\frac{4}{3}\frac{\pi G\rho_0 r_0^3}{r}$ in (3.26) zal een belangrijk effect hebben op de waarde van ϕ_b wanneer $r \gtrsim \frac{1}{m}$. Als we de rechterleden van de bewegingsvergelijkingen (2.2) en (2.3) interpreteren als massatermen analoog aan de term $m^2\phi$ in (3.19), dan kunnen we vermoeden dat de invloed van het EBI-veld pas belangrijk zal worden wanneer $r \gtrsim l$.

3.3.2 De oplossingen voor een compacte massa

Afschatting van de vrije integratieconstanten

Laten we als voorbeeld eens kijken naar hoe $A^{(1,0)}(r)$ er uit ziet als we een compacte massa beschrijven. Stoppen we de stuksgewijze uitdrukking voor $\rho^{(1)}(r)$ in (3.9), dan volgt er wegens

$$m^{(1)}(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 \begin{cases} r^3 & \text{als } r < r_0 \\ r_0^3 & \text{als } r > r_0, \end{cases}$$

dat

$$A^{(1,0)}(r) = C_1 + \begin{cases} \frac{4}{3}\pi G\rho_0 r^2 & \text{als } r < r_0 \\ -\frac{8}{3}\frac{\pi G\rho_0 r_0^3}{r} + 4\pi G\rho_0 r_0^2 & \text{als } r > r_0. \end{cases}$$

De constante term $4\pi G\rho_0 r_0^2$ zorgt er voor dat de functie $A^{(1,0)}(r)$ goed gedefinieerd is voor $r = r_0$, wat overeenkomt met het voldoen aan een randvoorwaarde analoog aan (3.24).

Een afschatting voor C_1 kan nu gevonden worden door de limiet $r \rightarrow \infty$ te nemen,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} A^{(1,0)}(r) &= A_\infty^{(1,\frac{1}{2})} \\ &= C_1 + 4\pi G\rho_0 r_0^2, \end{aligned}$$

en zoals in (3.27) te zeggen dat

$$A_\infty^{(1,0)} \sim \frac{GM}{l}.$$

Dit laatste is geen uit de lucht gegrepen analogie, want $A_\infty^{(1,0)}$ is een constante van eerste orde in ε en via

$$A^{(1)}(r) \sim A_\infty^{(1,0)} + \frac{GM}{r} + \dots$$

zal ook $A_\infty^{(1,0)} \sim GM$. Aangezien $A^{(1)}(r)$ een functie zonder fysische dimensies is, moeten $A^{(1,0)}(r)$ en a fortiori $A_\infty^{(1,0)}$ dimensieloos zijn. In SI-eenheden:

$$\begin{aligned} A_\infty^{(1,0)} \sim GM &= \frac{GM}{c^2} \\ &\sim \left[\frac{m^3}{gs^2} g \frac{s^2}{m^2} \right]. \end{aligned}$$

Om dit dimensieloos te maken moet er nog een evenredigheidsfactor met dimensie $[m^{-1}]$ bijkomen. Aangezien deze constante zal bepaald worden door het gedrag van $A^{(1)}(r)$ in het regime $r \gg l$, is het intuïtief om die factor $\frac{1}{l}$ te stellen.

Ook $A_\infty^{(1,1)}$ (die uit te drukken is in functie van C_6 op dezelfde manier als voor C_1 en $A_\infty^{(1,0)}$ werd gedaan) is door een dergelijke redenering af te schatten. Het dimensieloos zijn van $A^{(1)}(r)$ betekent dan dat $A^{(1,1)}(r) \sim [m^2]$ moet zijn. Een intuïtieve lengteschaal is hier r_0 , omdat $A^{(1,1)}(r)$ enkel voor $r \ll l$ een fysische betekenis heeft. Voor de constante $A_\infty^{(1,1)}$ betekent dit, dat ze evenredig met $GM r_0^2$ moet zijn. Om daar opnieuw een dimensieloze constante, bepaald door het gedrag op oneindig, van te maken schrijven we

$$A_\infty^{(1,1)} \sim \frac{GM r_0^2}{l}.$$

Dit blijkt zeer gelijkaardig aan (3.28) te zijn.

De constante $A_\infty^{(2,0)}$, tweede orde in ε , afschatten, doen we dan (als laatste voorbeeld) als volgt

$$\begin{aligned} A_\infty^{(2,0)} &\sim \frac{(GM)^2}{[x]} \sim [1] \\ \Leftrightarrow \left[\frac{m^6}{g^2 s^4} g^2 \frac{s^4}{m^4} \frac{1}{x} \right] &= [1] \\ \Leftrightarrow x &= m^2 \\ \Rightarrow A_\infty^{(2,0)} &\sim \frac{(GM)^2}{l^2}. \end{aligned}$$

De correcties

Met berekeningen zoals in sectie 3.3.1 kunnen we nu de dubbele perturbatie oplossen tot op elke gewenste orde. In document A.10 zijn de berekeningen en oplossingen te vinden tot op de ordes (1,2) en (2,1). We zijn vooral geïnteresseerd in de correcties die het model veroorzaakt buiten de baryonische massa. Daarom schrijven we hier enkel de uitdrukkingen voor $r > r_0$ uit en dit, om de overzichtelijkheid te bewaren, niet zo ver uitgewerkt als in het document te vinden is.

Om duidelijk te maken dat de onbepaalde constanten werden afgeschat en tegelijkertijd de uitdrukkingen te verlichten, voeren we een herdefiniëring door voor alle onbepaalde constanten. Deze heeft de vorm:

$$A_{\infty}^{(1,0)} := A_{\infty}^{(1,0)} \frac{l}{GM}.$$

Uiteindelijk komt er dan voor eerste orde in ε

$$A^{(1)}(r) = \frac{GM}{r} \left[-2 + rA_{\infty}^{(1,0)} \frac{1}{l} + \frac{1}{20} \frac{8r_0^2 + 40r^2}{(\alpha-1)} \frac{1}{l^2} + \left(r_0^2 A_{\infty}^{(1,1)} r - \frac{1}{3} r^3 C_{\infty}^{(1,0)} \right) \frac{1}{l^3} \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{315} \frac{35r^4 - 63r^2 r_0^2 - 12r_0^4}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{105} \frac{35r^4 + 42r^2 r_0^2 + 3r_0^4}{\alpha-1} \right) \frac{1}{l^4} \right] + O\left(\frac{1}{l^5}\right) \quad (3.29)$$

$$B^{(1)}(r) = \frac{GM}{r} \left[-2 + \frac{2}{5} \frac{-5r^2 + r_0^2}{(\alpha-1)} \frac{1}{l^2} + \left(\frac{1}{6} \frac{r^3 A_{\infty}^{(1,0)}}{\alpha-1} + \frac{1}{6} r^3 C_{\infty}^{(1,0)} - \frac{1}{2} r^3 E_{\infty}^{(1,0)} \right) \frac{1}{l^3} \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{105} \frac{21r^2 r_0^2 + 35r^4 - 4r_0^4}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{35} \frac{35r^4 + 14r^2 r_0^2 - r_0^4}{\alpha-1} \right) \frac{1}{l^4} \right] + O\left(\frac{1}{l^5}\right) \quad (3.30)$$

$$C^{(1)}(r) = \frac{GM}{r} \left[rC_{\infty}^{(1,0)} \frac{1}{l} + \left(\frac{2}{3} \frac{r^2}{(\alpha-1)^2} - \frac{2}{5} \frac{r_0^2 + 5r^2}{\alpha-1} \right) \frac{1}{l^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{3} \frac{r^3 A_{\infty}^{(1,0)}}{\alpha-1} + \frac{1}{3} \frac{r^3 \alpha C_{\infty}^{(1,0)}}{\alpha-1} + r_0^2 C_{\infty}^{(1,1)} r + \frac{1}{3} \frac{r^3 E_{\infty}^{(1,0)}}{\alpha-1} \right) \frac{1}{l^3} \right] + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \quad (3.31)$$

$$D^{(1)}(r) = \frac{GM}{r} \left[-rE_{\infty}^{(1,0)} (\alpha-1)^2 \frac{1}{l} + \left(2r^2 - \frac{2}{5} (\alpha-1) (r_0^2 + 5r^2) \right) \frac{1}{l^2} + \left(-\frac{1}{30} r^3 (7+2\alpha) A_{\infty}^{(1,0)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{30} r^3 (\alpha-1) (7+2\alpha) C_{\infty}^{(1,0)} - \frac{1}{10} r^3 (\alpha-1) (4\alpha-7) E_{\infty}^{(1,0)} - (\alpha-1)^2 r_0^2 E_{\infty}^{(1,1)} r \right) \frac{1}{l^3} \right] \\ + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \quad (3.32)$$

$$E^{(1)}(r) = \frac{GM}{r} \left[\frac{2}{\alpha-1} + rE_{\infty}^{(1,0)} \frac{1}{l} + \left(-\frac{2}{15} \frac{5r^2 + 3r_0^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{5} \frac{r_0^2 + 5r^2}{\alpha-1} \right) \frac{1}{l^2} + \left(-\frac{1}{30} \frac{r^3 (\alpha-4) A_{\infty}^{(1,0)}}{(\alpha-1)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{30} \frac{r^3 (\alpha-4) C_{\infty}^{(1,0)}}{\alpha-1} + \frac{1}{10} \frac{r^3 (3\alpha-4) E_{\infty}^{(1,0)}}{\alpha-1} + r_0^2 E_{\infty}^{(1,1)} r \right) \frac{1}{l^3} \right] + O\left(\frac{1}{l^4}\right) \quad (3.33)$$

en tweede orde in ε zijn

$$A^{(2)}(r) = \left(\frac{GM}{r} \right)^2 \left[-2 \frac{rA_{\infty}^{(1,0)}}{l} + \left(r^2 A_{\infty}^{(2,0)} - \frac{176}{35} \frac{rr_0}{\alpha-1} \right) \frac{1}{l^2} \right] + O\left(\frac{1}{l^3}\right) \quad (3.34)$$

$$B^{(2)}(r) = \left(\frac{GM}{r} \right)^2 \left[\frac{3}{35} \frac{r(35r - 16r_0)}{(\alpha-1)l^2} \right] + O\left(\frac{1}{l^3}\right) \quad (3.35)$$

$$C^{(2)}(r) = \left(\frac{GM}{r}\right)^2 \left[r^2 C_\infty^{(2,0)} - \frac{64}{105} \frac{rr_0}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{35} \frac{-7r_0^2 + 70 \ln(r)r^2 + 52rr_0}{\alpha-1} \right] \frac{1}{l^2} + O\left(\frac{1}{l^3}\right) \quad (3.36)$$

$$D^{(2)}(r) = \left(\frac{GM}{r}\right)^2 \left[-\frac{1}{140} (\alpha-1) \frac{(512r_0 - 560r)}{r} + \frac{2}{5} \left((\alpha-1) \frac{r_0^2 A_\infty^{(1,0)}}{r} \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha-1)^2 \frac{r_0^2 C_\infty^{(1,0)}}{r} - (\alpha-1)^2 \frac{r_0^2 E_\infty^{(1,0)}}{r} \right) \frac{1}{l} \right] + O\left(\frac{1}{l^2}\right) \quad (3.37)$$

$$E^{(2)}(r) = \left(\frac{GM}{r}\right)^2 \left[-\frac{1}{140} \frac{256r_0 - 420r}{(\alpha-1)r} - \frac{1}{5} \left(\frac{(5r^2 - r_0^2) A_\infty^{(1,0)}}{(\alpha-1)r} + \frac{(5r^2 - r_0^2) C_\infty^{(1,0)}}{r} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(r_0^2 + 5r^2) E_\infty^{(1,0)}}{r} \right) \frac{1}{l} \right] + O\left(\frac{1}{l^2}\right) \quad (3.38)$$

Zoals verwacht, zien we in (3.29)-(3.30) top op nulde orde in $\frac{1}{l}$ de Schwarzschildmetriek tevoorschijn komen. Omdat we geen singulariteiten willen bespreken, zal $r_0 \gg R_s$, met $R_s = 2GM$ de Schwarzschildstraal. Aangezien we $r > r_0$ veronderstellen, geldt

$$\frac{GM}{r} < \frac{2GM}{r} < \frac{2GM}{r_0} \ll 1.$$

De eerste orde-correcties in ε (3.29)-(3.33) zullen dan klein zijn, als de perturbatie volgens $\frac{1}{l^2}$ niet uit de hand loopt. De meeste termen zijn duidelijk klein, want rekening houdend met

$$r_0 < r \text{ en } r \ll l$$

vinden we direct

$$\frac{r}{l} \ll 1, \frac{rr_0}{l^2} \ll \frac{r}{l}, \frac{r^2}{l^2} \ll \frac{r}{l}, \dots$$

Met

$$\left(\frac{GM}{r}\right)^2 \ll \frac{GM}{r}$$

tot slot, zien we dat ook de tweede orde-correcties (3.34)-(3.38) voldoende klein zijn. Opvallend is echter wel de \ln -term in (3.36). Opdat deze term dimensieloos zou zijn, moet $C_\infty^{(2,0)}$ van de vorm $\sim -\ln r_*$ zijn, voor een welbepaalde r_* . Zo wordt de $\frac{r^2}{l^2}$ -term vermenigvuldigd met een dimensieloze factor $\sim \ln \frac{r}{r_*}$.

3.3.3 Rotatiecurves

Uit de vorm van de correcties (3.29)-(3.38) kunnen we afleiden dat het effect van de intrede van een compacte massa op de geometrie van de ruimte gelijkaardig is aan dat in het algemeen relativistische geval. In de zwakke veldlimiet geldt steeds

$$g_{00} \approx -(1 + 2\Phi),$$

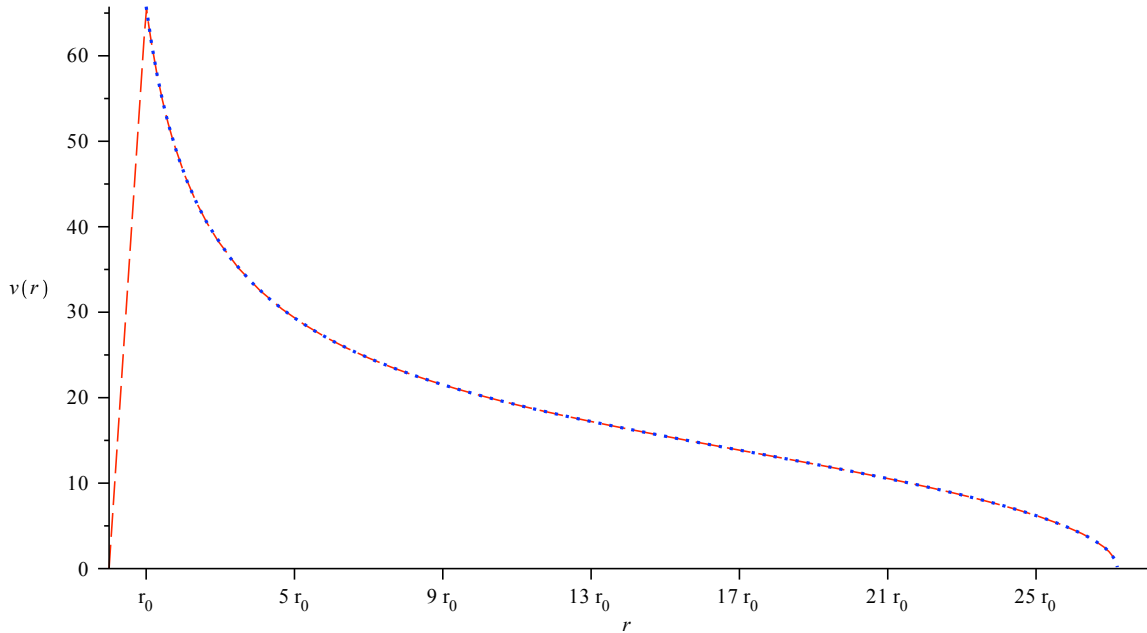
met Φ de Newtoniaanse potentiaal. Wanneer het EBI-model de invloed van een sferisch symmetrische en compacte massa beschrijft, betekent dit

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\Lambda}{3} r^2 + \varepsilon A^{(1)}(r) + \varepsilon^2 A^{(2)}(r) + \dots \right),$$

met

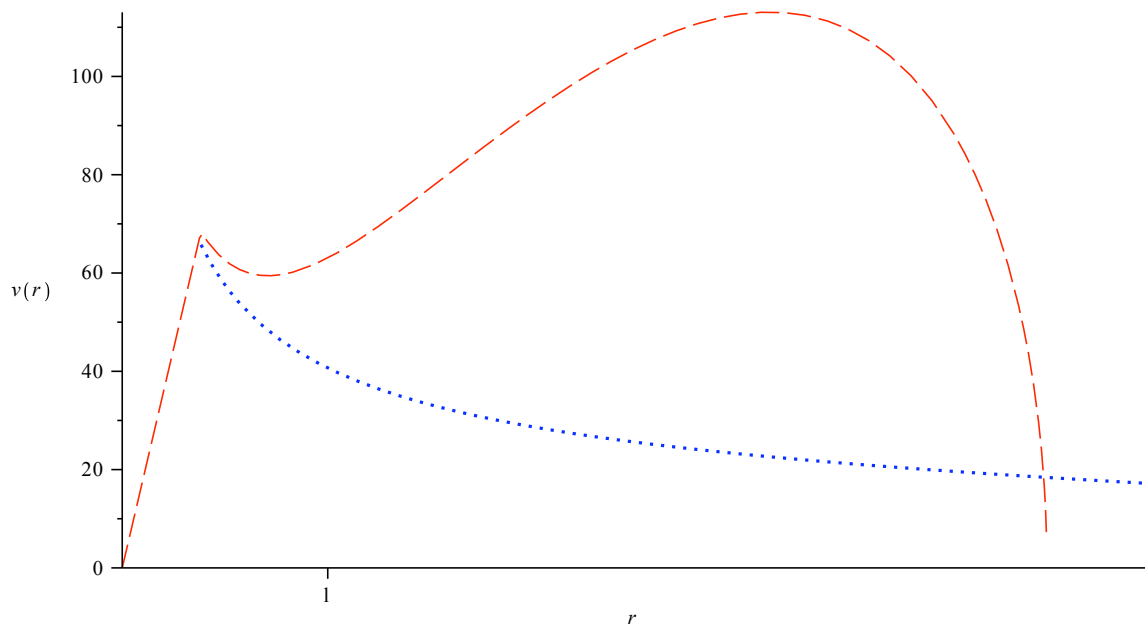
$$\Lambda = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{l^2}. \quad (3.39)$$

Aangezien Ω_Λ en H_0 observationeel kunnen bepaald worden, zal de daaruit volgende waarde van Λ via (3.39) een restrictie leggen op l en α . Deze restrictie is dezelfde als (2.28). De vrije constanten van het model zijn dan l , $A_\infty^{(1, \frac{1}{2})}$, $C_\infty^{(1, \frac{1}{2})}$, ... Variatie van deze constanten binnen redelijke grenzen (l van kosmologische schaal, $A_\infty^{(1, \frac{1}{2})} \sim 1$, ...) levert geen waarneembare verschillen op. De in figuur 3.1 afgebeelde rotatiecurve voor M33 geeft dan ook duidelijk aan dat er weinig verschil is tussen de door het EBI-model voorspelde curve en die voorspeld door de wetten van Newton. Er kan niet gesproken worden over een asymptotisch eindige curve, zodat een gezamenlijke beschrijving van donkere materie en donkere energie niet mogelijk is met dit model.



Figuur 3.1: De rotatiecurve (in km/s) van de Triangulum Galaxy (M33) voorspeld door het EBI-model (rood) vergeleken met het Newtoniaanse resultaat (blauw). $l = 10^9$ pc. Vergelijk ook met figuur 1.3.

In al het voorgaande veronderstelden we dat de parameter l van kosmologische schaal is, o.a. om de voorwaarde $r \ll l$ te rechtvaardigen. We weten uit gravitatieëxperimenten in ons zonnestelsel, dat de gravitatiepotentiaal Φ de Einstein-potentiaal is op mogelijke correcties kleiner dan 10^{-5} na. De grootste correcties die het EBI-veld heeft op de gravitatie zijn van de orde $\frac{l^2}{r^2}$ en die moeten kleiner zijn dan 10^{-5} , anders zouden we ze opgemerkt hebben tijdens de gravitatieëxperimenten. Dit geeft $l > 10^3 R_{\text{zonnestelsel}} \sim 10^{-1}$ pc. In principe zou l dus zo klein kunnen zijn. Een duidelijk effect kan dan verkregen worden als we l bijvoorbeeld van galactische schaal $\sim 10^4$ pc kiezen. Dit effect zal echter voor elke galactie waarneembaar zijn vanaf $r \sim l$ (zie figuur 3.2), terwijl het effect van donkere materie voor elk melkwegstelsel op een andere afstand van het centrum duidelijk wordt. Ook voor l van galactische schaal lijkt het EBI-model geen donkere materie te kunnen beschrijven.



Figuur 3.2: De rotatiecurve (in km/s) van de Triangulum Galaxy (M33) voorspeld door het EBI-model (rood) vergeleken met het Newtoniaanse resultaat (blauw), wanneer l van galactische schaal is. $l = 2 \cdot 10^4$ pc. Het EBI-veld heeft een duidelijk effect vanaf $r \sim l$. Let wel, het is niet gegarandeerd dat de oplossing juist is voor $r > l$.

HOOFDSTUK 4

Het EBI-veld als donkere materie

“We’re all in the gutter, but some of us are looking at the stars.”

uit *Lady Windermere’s Fan* van O. Wilde, 1892

Uit recent onderzoek [5] is gebleken dat het EBI-veld niet erg geschikt is om te gebruiken als vereniging van de donkere kant van het universum (donkere materie én donkere energie). In dit korte hoofdstuk bespreken we waarom het interessanter is om met het EBI-veld enkel donkere materie te beschrijven en het niet de taak van kosmologische constante op zich te laten nemen. Een gedetailleerdere uiteenzetting is terug te vinden in [5].

Hoewel, zoals in sectie 2.4.2 werd aangetoond, de evolutie van de schaalfactor kan verklaard worden enkel en alleen door de invloed van het EBI-veld te gebruiken, blijkt het beter te zijn om ook een echte kosmologische constante (die niets met het EBI-veld te maken heeft) in te voeren. Dat gebeurt door de actie 2.1 aan te passen tot

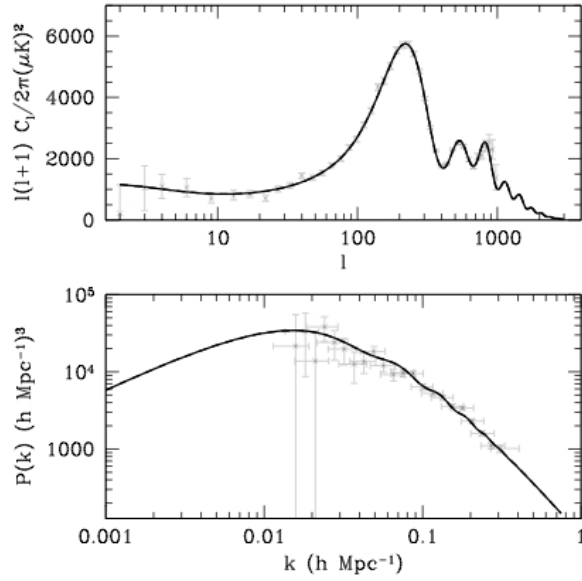
$$I = \frac{1}{16\pi G} \int \left[\sqrt{|g_{\mu\nu}|} (R - 2\Lambda) + \frac{2}{\alpha l^2} \sqrt{|g_{\mu\nu} - l^2 K_{(\mu\nu)}|} \right] dx^4 + \int \mathcal{L}_m dx^4.$$

Voor $\Lambda \neq 0$ zijn er twee mogelijkheden. Ofwel wordt enkel donkere materie door het EBI-veld beschreven en is Λ dus de effectieve kosmologische constante, ofwel schrijven we $\Lambda^{(\text{eff})} = \Lambda + \Lambda_{\text{EBI}}$ en wordt ook een deel van de donkere energierie bepaald door het EBI-veld. Als in deze actie $\Lambda = 0$ gesteld wordt, dan doet het EBI-veld terug dienst als zowel donkere materie als donkere energie.

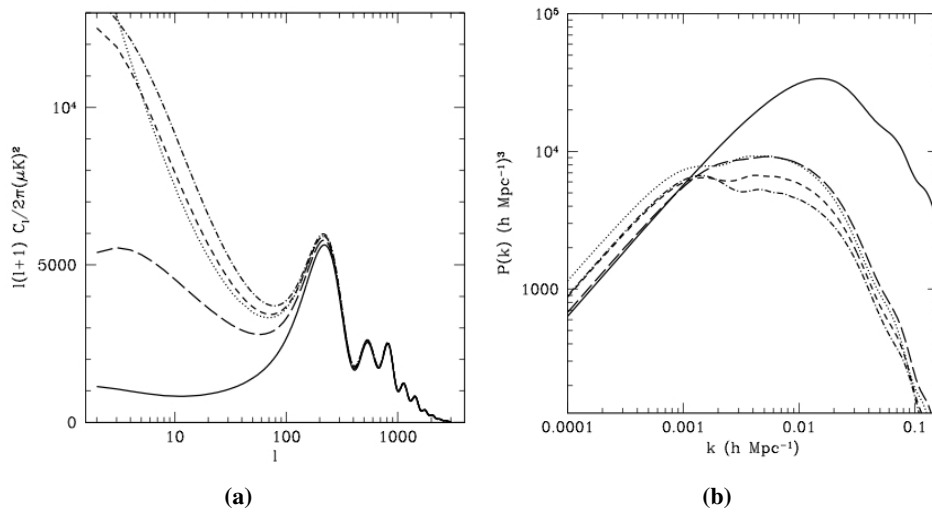
Het geval waarbij de kosmologische constante geen invloed ondervindt van het EBI-veld, noemt men in [5] het ΛEBI -model. Het is slechts afhankelijk van drie parameters, Ω_{bm} , Ω_{EBI} en Ω_{Λ} , net als het ΛCDM -model. Voor een goede keuze van deze drie parameters is het ΛEBI -model niet te onderscheiden van het ΛCDM -model gefit aan data geproduceerd door o.a. de WMAP-satelliet. Zo zijn het angulair power spectrum van de kosmische achtergrondstraling C_l en het power spectrum van de dichtheidsfluctuaties $P(k)$ perfect gelijk aan die voor een ΛCDM -model (zie figuur 4.1).

Wanneer het EBI-veld gedeeltelijk of volledig verantwoordelijk is voor de kosmologische constante, ontstaan er grote inconsistenties met de huidige data. Het geïntegreerde Sachs-Wolfe effect speelt hier het angulair powerspectrum C_l grote parten, zoals te zien is in figuur 4.2a. Waarden voor l zo ver als 150 worden vertekend, wat betekent dat relatief kleine kosmologische schalen aangetast worden. Ook het powerspectrum $P(k)$ komt in de problemen. Zijn waarden zijn veel te klein voor kleine kosmologische schalen (grote k) en zijn top wordt veel te breed uitgesmeerd. Mocht het EBI-model donkere energie beschrijven, zou er voor kleine kosmologische schalen m.a.w. veel minder structuurvorming¹ geweest zijn dan de structuurvorming waarvan we vandaag de dag het resultaat kunnen waarnemen.

¹Met structuurvorming wordt de vorming van sterren, galactieën, galactieclusters, ... uit het initieel zo goed als uniforme universum bedoeld.



Figuur 4.1: Bovenste paneel: Het angulair powerspectrum C_l van de kosmische achtergrondstraling gemeten met de WMAP-satelliet (data-punten) en volgens het Λ EBI-model (volle lijn). Onderste paneel: Het baryon powerspectrum $P(k)$ voor het Λ EBI-model (volle lijn) samen met data van de SDSS (data-punten). © M. Bañados, P. G. Ferreira en C. Skordis



Figuur 4.2: Het angulair powerspectrum C_l (links) en het powerspectrum $P(k)$ (rechts) van enkele EBI-modellen (onderbroken lijnen) vergeleken met het best-passende Λ CDM- of Λ EBI-model (volle lijn). © M. Bañados, P. G. Ferreira en C. Skordis

HOOFDSTUK 5

Besluit

*“O, here
Will I set up my everlasting rest
And shake the yoke of inauspicious stars
From this world-wearied flesh.”*

uit *Romeo and Juliet* van W. Shakespeare, 1595

In de voorgaande hoofdstukken hebben we een voorbeeld gegeven van een theorie die probeert de donkere kant van het universum te vereenzelvigen. Kosmologisch zag het er op het eerste zicht goed uit, want het gedrag van de schaalfactor $a(t)$ kon volledig worden verklaard met het model, mits een goede keuze voor enkele parameters.

Wanneer we echter een kritische blik werpen op het gedrag dat het model vertoont op kleinere (galactische) schaal, dan zien we dat het niet in staat is om de mysterieuze vlakke stukken van de rotatiecurves van spiraalgalactieën te verklaren. Het zou wel eens kunnen dat het de geprobeerde vereenzelving is die hier roet in het eten gooit. Kosmologische argumenten tonen namelijk aan dat het model een kandidaat kan zijn voor de beschrijving van donkere materie tout court. Verder onderzoek naar het gedrag van het Λ EBI-model op galactische schaal, zou dan moeten duidelijk maken of de aanwezigheid van een pure kosmologische constante het model in staat stelt om asymptotisch eindige rotatiesnelheden te genereren.

We zijn deze masterproef begonnen met de vraag of het echt zo bizar is dat donkere materie en donkere energie steeds maar weer samen worden vernoemd. Uit de resultaten die hier beschreven werden, moeten we concluderen dat de zoektocht naar een complete, eenvormige beschrijving van de donkere kant van het universum, als die er al is, nog niet ten einde is.

BIJLAGE A

Maple documenten

Voor de berekeningen voor deze masterproef werd Maple™, het alom bekende symbolische rekenpakket van Maplesoft™, gebruikt. In deze appendix kunnen alle in- en outputbestanden teruggevonden worden waarnaar verwezen wordt in de tekst.

Opdat de lezer de code in de onderstaande documenten helemaal zou kunnen begrijpen, willen we erop wijzen dat regelmatig het bestand “Procedures” wordt ingeladen. De code voor de procedures die daarmee beschikbaar worden gesteld, is terug te vinden in Document A.1.

Document A.1: Maple procedures voor het berekenen van de Christoffelsymbolen, de Ricci-tensor en de Einstein-tensor horend bij een bepaalde metriek, voor het berekenen van covariante afgeleiden, voor het perturberen van vergelijkingen volgens een bepaalde variabele en het opstellen van de geperturbeerde vergelijkingen voor de actie (2.1).

```

> restart:
Procedure voor de berekening van de Christoffelsymbolen  $\Gamma_{\mu\nu}^p$ 
> Christoffel_u:=proc(g::table,gu::table)
  local Gamma, Gamma_u, i, j, n, p:

  for i from 0 to 3 do
    for j from 0 to 3 do
      for n from 0 to 3 do
        Gamma[i][j,n] := 1/2*(diff(g[i,j],x[n])+diff(g[i,n],x[j])-
diff(g[j,n],x[i]));
      end do:
    end do:
  end do:

  for i from 0 to 3 do
    for j from 0 to 3 do
      for n from 0 to 3 do
        Gamma_u[i][j,n] := add(gu[i,p]*Gamma[p][j,n],p=0..3):
      end do:
    end do:
  end do:

  return(Gamma_u):
end proc:
Procedure voor de berekening van de Riccitenor  $R_{\mu\nu}$ 
> Ricci:=proc(g::table,gu::table)
  local i, j, n, p, Gamma, Gamma_u, Ricci:

  for i from 0 to 3 do
    for j from 0 to 3 do
      for n from 0 to 3 do
        Gamma[i][j,n] := 1/2*(diff(g[i,j],x[n])+diff(g[i,n],x[j])-
diff(g[j,n],x[i]));
      end do:
    end do:
  end do:

  for i from 0 to 3 do
    for j from 0 to 3 do
      for n from 0 to 3 do
        Gamma_u[i][j,n] := add(gu[i,p]*Gamma[p][j,n],p=0..3):
      end do:
    end do:
  end do:

  for i from 0 to 3 do
    for j from 0 to 3 do
      Ricci[i,j] := add(diff(Gamma_u[n][i,j],x[n]),n=0..3)-add
(diff(Gamma_u[n][i,n],x[j]),n=0..3)-add(add(Gamma_u[p][i,n]*
Gamma_u[n][j,p],p=0..3),n=0..3)+add(add(Gamma_u[p][i,j]*Gamma_u[n]
[p,n],p=0..3),n=0..3):
      Ricci[i,j]:= simplify(Ricci[i,j]):
    end do:
  end do:

  return(Ricci):
end proc:
Procedure voor de berekening van de Einsteinensor  $G_{\mu\nu}$ 
> Einstein:=proc(g::table,gu::table)
  local i, j, n, p, Gamma, Gamma_u, Ricci, R, G:
  for i from 0 to 3 do
    for j from 0 to 3 do
      for n from 0 to 3 do

```

```

Gamma[i][j,n] := 1/2*(diff(g[i,j],x[n])+diff(g[i,n],x[j])-
diff(g[j,n],x[i]));
end do:
end do:
end do:

for i from 0 to 3 do
for j from 0 to 3 do
for n from 0 to 3 do
Gamma_u[i][j,n] := add(gu[i,p]*Gamma[p][j,n],p=0..3):
end do:
end do:
end do:

for i from 0 to 3 do
for j from 0 to 3 do
Ricci[i,j] := add(diff(Gamma_u[n][i,j],x[n]),n=0..3)-add
(diff(Gamma_u[n][i,n],x[j]),n=0..3)-add(add(Gamma_u[p][i,n]*
Gamma_u[n][j,p],p=0..3),n=0..3)+add(add(Gamma_u[p][i,j]*Gamma_u[n]
[p,n],p=0..3),n=0..3):
Ricci[i,j]:= simplify(Ricci[i,j]):
end do:
end do:

R := simplify(add(add(gu[i,j]*Ricci[j,i],j=0..3),i=0..3)):

for i from 0 to 3 do:
for j from 0 to 3 do:
G[i,j] := simplify(Ricci[i,j] - 1/2*R*g[i,j]):
end do:
end do:
return(G):
end proc:

```

Procedure die een functie teruggeeft die $\nabla_{\mu} T^{\nu\rho}$ berekent

```

> covDerivative:=proc(Tu::table,Gamma_u::table,coord)
local k, n, r, m, cov der:
return((n,r,m)->diff(Tu[n,r],coord[m+1])+add(Gamma_u[n][m,k]*Tu
[k,r],k=0..3)+add(Gamma_u[r][m,k]*Tu[n,k],k=0..3)):
end proc:

```

Procedure die de 'orde'-ordevergelijkingen in 'var' van de vergelijkingen 'EQNS' teruggeeft

```

> pertEQNS:=proc(EQNS::list,var,orde::integer,printing::string)
local i, eqns::list:
for i from 1 to nops(EQNS) do
eqns[i]:=simplify(coeff(series(simplify(lhs(EQNS[i])),var,
orde+1),var,orde)=coeff(series(simplify(rhs(EQNS[i])),var,orde+1),
var,orde));
if lhs(eqns[i])<>0 or rhs(eqns[i])<>0 then
if printing="yes" then
eqns[i]:=factor(simplify(eqns[i])):
print(eqns[i]):
end if:
else
eqns[i]:=NULL:
end if:
end do:
return(convert(eqns,list)):
end proc:

```

Procedures die de 'orde'-orde veldvergelijkingen voorgesteld door M. Bañados teruggeven

```

> banadosPertG:=proc(G::table,g::table,qu::table,T::table,var,
orde::integer)
local m, n, a, b, f_g, f_q,gMatrix, qMatrix, det_q_op_g, LL_G,
RL_G, LL_K, RL_K,eqn_G::list,aant_eq:
f_g:=(i,j)->g[i-1,j-1]:
gMatrix:=Matrix(4,4,f_g):

```

```

f_q:=(i,j)->q[i-1,j-1]:
qMatrix:=Matrix(4,4,f_q):

det_q_op_g:=Determinant(qMatrix)/Determinant(gMatrix):

aant_eq:=0:
for m from 0 to 3 do:
  for n from 0 to 3 do:
    LL_G[m,n]:=coeff(series(G[m,n],var,orde+1),var,orde):
    RL_G[m,n]:=coeff(series(-inv_1^2*sqrt(det_q_op_g)*add(add(g
[m,a]*qu[a,b]*g[b,n],a=0..3),b=0..3) + 8*Pi*G_c*T[m,n],var,
orde+1),var,orde):
    if LL_G[m,n]<>0 or RL_G[m,n]<>0 then
      aant_eq:=aant_eq+1:
      eqn_G[aant_eq]:=simplify(LL_G[m,n] = RL_G[m,n]):
    end if:
  end do:
end do:

return(convert(eqn_G,list)):
end proc:
> banadosPertK:=proc(K::table,g::table,q::table,var,orde::integer)
  local m, n, LL_K, RL_K,eqn_K::list,aant_eq:

  aant_eq:=0:
  for m from 0 to 3 do:
    for n from 0 to 3 do:
      LL_K[m,n]:=coeff(series(K[m,n],var,orde+1),var,orde):
      RL_K[m,n]:=coeff(series(inv_1^2*(g[m,n]+alpha*q[m,n]),var,
orde+1),var,orde):

      if LL_K[m,n]<>0 or RL_K[m,n]<>0 then
        aant_eq:=aant_eq+1:
        eqn_K[aant_eq]:=simplify(LL_K[m,n] = RL_K[m,n]):
      end if:
    end do:
  end do:

  return(convert(eqn_K,list)):
end proc:
>

```

```

> restart:
> with(LinearAlgebra):
> read "Procedures":
> interface(showassumed=0):
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    g[i,j] := 0: gu[i,j] := 0:
    q[i,j] := 0: qu[i,j] := 0:
    T[i,j]:=0:
  end do:
end do:
Componenten van de  $g_{\mu\nu}$ -metriek en zijn inverse.
> g[0,0] := -1;
  g[1,1] := a(x[0])^2;
  g[2,2] := a(x[0])^2;
  g[3,3] := a(x[0])^2;
                                      $g_{0,0} := -1$ 
                                      $g_{1,1} := a(x_0)^2$ 
                                      $g_{2,2} := a(x_0)^2$ 
                                      $g_{3,3} := a(x_0)^2$ 
> for i from 0 to 3 do
  gu[i,i] := 1/g[i,i]:
end do:
Componenten van de  $q_{\mu\nu}$ -metriek en diens inverse.
> q[0,0] := -X(x[0])^2;
  q[1,1] := Y(x[0])^2;
  q[2,2] := Y(x[0])^2;
  q[3,3] := Y(x[0])^2;
                                      $q_{0,0} := -X(x_0)^2$ 
                                      $q_{1,1} := Y(x_0)^2$ 
                                      $q_{2,2} := Y(x_0)^2$ 
                                      $q_{3,3} := Y(x_0)^2$ 
> for i from 0 to 3 do
  qu[i,i] := 1/q[i,i]:
end do:
De energietensor
> T[0,0] := -rho(x[0])*g[0,0];
  T[1,1] := p(x[0])*g[1,1];
  T[2,2] := p(x[0])*g[2,2];
  T[3,3] := p(x[0])*g[3,3];
                                      $T_{0,0} := \rho(x_0)$ 
                                      $T_{1,1} := p(x_0) a(x_0)^2$ 
                                      $T_{2,2} := p(x_0) a(x_0)^2$ 
                                      $T_{3,3} := p(x_0) a(x_0)^2$ 
De bewegingsvergelijkingen
> assume(a(x[0])>0,G_c>0,1>0,rho(x[0])::real,x[0]>0,X(x[0])>0,Y(x[0])>0):
> G:=Einstein(g,gu):
  K:=Ricci(q,qu):
> EQNS G:=expand(subs(inv_1=1/1,banadosPertG(G,g,qu,T,var,0)):
  for I from 1 to 2 do
    print(EQNS_G[I]):
  end do:

```

$$\frac{3 \left(\frac{d}{dx_0} a(x_0) \right)^2}{a(x_0)^2} = \frac{Y(x_0)^3}{X(x_0) a(x_0)^3 l^2} + 8 \pi G_c \rho(x_0)$$

$$-\left(\frac{d}{dx_0} a(x_0) \right)^2 - 2 a(x_0) \left(\frac{d^2}{dx_0^2} a(x_0) \right) = -\frac{X(x_0) Y(x_0) a(x_0)}{l^2} + 8 \pi G_c \rho(x_0) a(x_0)^2$$

```
> EQNS_K:=expand(subs(inv_l=1/l,banadosPertK(K,g,q,var,0))):
for i from 1 to 2 do
  print(EQNS_K[i]):
end do:
```

$$-\frac{3 \left(\frac{d^2}{dx_0^2} Y(x_0) \right)}{Y(x_0)} + \frac{3 \left(\frac{d}{dx_0} X(x_0) \right) \left(\frac{d}{dx_0} Y(x_0) \right)}{X(x_0) Y(x_0)} = -\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha X(x_0)^2}{l^2}$$

$$-\frac{Y(x_0) \left(\frac{d}{dx_0} Y(x_0) \right) \left(\frac{d}{dx_0} X(x_0) \right)}{X(x_0)^3} + \frac{2 \left(\frac{d}{dx_0} Y(x_0) \right)^2}{X(x_0)^2} + \frac{Y(x_0) \left(\frac{d^2}{dx_0^2} Y(x_0) \right)}{X(x_0)^2} = \frac{a(x_0)^2}{l^2}$$

$$+ \frac{\alpha Y(x_0)^2}{l^2}$$

Omvorming tot Friedmanvergelijking.

```
> expand(subs({G_c=3*H[0]^2/(rho[c]*Pi*8)},EQNS_G[1])/3/H[0]^2);
```

$$\frac{\left(\frac{d}{dx_0} a(x_0) \right)^2}{H_0^2 a(x_0)^2} = \frac{1}{3} \frac{Y(x_0)^3}{H_0^2 X(x_0) a(x_0)^3 l^2} + \frac{\rho(x_0)}{\rho_c}$$

Omvorming tot toestandsvergelijking voor ρ_{EBI} en p_{EBI}

```
> EQ:=simplify(rhs(isolate(EQNS_K[2],diff(Y(x[0]),x[0],x[0])))=rhs
(isolate(EQNS_K[1],diff(Y(x[0]),x[0],x[0])))):
EQ:=simplify(isolate(EQ,diff(Y(x[0]),x[0])^2)/(X(x[0])^2*Y(x[0])
^2)):
lhs(EQ)=expand(rhs(EQ));
```

$$\frac{\left(\frac{d}{dx_0} Y(x_0) \right)^2}{X(x_0)^2 Y(x_0)^2} = -\frac{1}{6 X(x_0)^2 l^2} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{l^2} + \frac{1}{2} \frac{a(x_0)^2}{Y(x_0)^2 l^2}$$

```
> Y(x[0]) := (8*Pi*G_c*l^2*rho[EBI](x[0])*X(x[0])*a(x[0])^3)^(1/3);
X(x[0]) := simplify(solve(p[EBI](x[0])=-X(x[0])*Y(x[0])
/8/Pi/G_c/l^2/a(x[0]),X(x[0]))[1]);
EQ_EBI:=expand(simplify(EQ*sqrt(-p[EBI](x[0])*rho[EBI](x[0]))*p
[EBI](x[0])*Pi*G_c*72-(3/2)*rho[EBI](x[0])/l^4));
Y:='Y':
X:='X':
```

$$Y(x_0) := 8^{1/3} \left(\pi G_c l^2 \rho_{EBI}(x_0) X(x_0) a(x_0)^3 \right)^{1/3}$$

Warning, solve may be ignoring assumptions on the input variables.

$$X(x_0) := \frac{2 \sqrt{2} \sqrt{\pi} \sqrt{G_c} \left(-p_{EBI}(x_0) \rho_{EBI}(x_0) \right)^{3/4} l}{\rho_{EBI}(x_0)}$$

$$EQ_{EBI} := -\frac{9}{16} \frac{\left(\frac{d}{dx_0} \rho_{EBI}(x_0) \right)^2}{\rho_{EBI}(x_0) l^2} - \frac{9 \rho_{EBI}(x_0) \left(\frac{d}{dx_0} a(x_0) \right)^2}{l^2 a(x_0)^2}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{9}{16} \frac{\rho_{EBI}(x_0) \left(\frac{d}{dx_0} \rho_{EBI}(x_0)\right)^2}{l^2 \rho_{EBI}(x_0)^2} - \frac{9}{2} \frac{\left(\frac{d}{dx_0} \rho_{EBI}(x_0)\right) \left(\frac{d}{dx_0} a(x_0)\right)}{l^2 a(x_0)} \\
& - \frac{9}{8} \frac{\left(\frac{d}{dx_0} \rho_{EBI}(x_0)\right) \left(\frac{d}{dx_0} \rho_{EBI}(x_0)\right)}{l^2 \rho_{EBI}(x_0)} - \frac{9}{2} \frac{\rho_{EBI}(x_0) \left(\frac{d}{dx_0} \rho_{EBI}(x_0)\right) \left(\frac{d}{dx_0} a(x_0)\right)}{l^2 a(x_0) \rho_{EBI}(x_0)} \\
& - \frac{3}{2} \frac{\rho_{EBI}(x_0)}{l^4} = \frac{24 \rho_{EBI}(x_0) \alpha \pi G_c \sqrt{-\rho_{EBI}(x_0) \rho_{EBI}(x_0)}}{l^2} + \frac{9}{2} \frac{\rho_{EBI}(x_0)}{l^4}
\end{aligned}$$

Minder interessante vergelijkingen van tweede orde die ook moeten voldaan zijn.

```
> EQNS_G[2];
EQNS_K[1];
```

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{d}{dx_0} a(x_0)\right)^2 - 2 a(x_0) \left(\frac{d^2}{dx_0^2} a(x_0)\right) = -\frac{X(x_0) Y(x_0) a(x_0)}{l^2} + 8 \pi G_c p(x_0) a(x_0)^2 \\
& - \frac{3 \left(\frac{d^2}{dx_0^2} Y(x_0)\right)}{Y(x_0)} + \frac{3 \left(\frac{d}{dx_0} X(x_0)\right) \left(\frac{d}{dx_0} Y(x_0)\right)}{X(x_0) Y(x_0)} = -\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha X(x_0)^2}{l^2}
\end{aligned}$$

Bereken de Bianchi identiteiten

```
> Gamma_u:=Christoffel_u(g,gu):
coord:= [x[0],x[1],x[2],x[3]]:
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    Gu[i,j]:=add(add(gu[i,k]*gu[j,l]*G[k,l],k=0..3),l=0..3):
  end do:
end do:
> cov_Gu:=covDerivative(Gu,Gamma_u,coord):
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    if i=j then
      RHS_EQNS_G[i,j]:=rhs(EQNS_G[i+1]):
    else
      RHS_EQNS_G[i,j]:=0:
    end if:
  end do:
end do:
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    RHS_EQNS_Gu[i,j]:=sum(sum(gu[i,k]*gu[j,l]*RHS_EQNS_G[k,l],k=0..3),l=0..3):
  end do:
end do:
> cov_RHS_EQNS_Gu:=covDerivative(RHS_EQNS_Gu,Gamma_u,coord):
> BianchiID:=simplify(add(cov_Gu(m,0,m),m=0..3)=add(cov_RHS_EQNS_Gu(m,0,m),m=0..3));
simplify(add(cov_Gu(m,1,m),m=0..3)=add(cov_RHS_EQNS_Gu(m,1,m),m=0..3));
simplify(add(cov_Gu(m,2,m),m=0..3)=add(cov_RHS_EQNS_Gu(m,2,m),m=0..3));
simplify(add(cov_Gu(m,3,m),m=0..3)=add(cov_RHS_EQNS_Gu(m,3,m),m=0..3));
```

$$\begin{aligned}
\text{BianchiID} := 0 &= \frac{1}{a(x_0)^3 X(x_0)^2 l^2} \left(-Y(x_0)^3 \left(\frac{d}{dx_0} X(x_0)\right) + 3 Y(x_0)^2 \left(\frac{d}{dx_0} Y(x_0)\right) X(x_0) \right. \\
& \left. + 8 \pi G_c \left(\frac{d}{dx_0} \rho(x_0)\right) X(x_0)^2 a(x_0)^3 l^2 + 24 \left(\frac{d}{dx_0} a(x_0)\right) X(x_0)^2 \pi G_c \rho(x_0) a(x_0)^2 l^2 \right)
\end{aligned}$$

$$-3 \left(\frac{d}{dx_0} a(x_0) \right) a(x_0) X(x_0)^3 Y(x_0) + 24 \left(\frac{d}{dx_0} a(x_0) \right) a(x_0)^2 X(x_0)^2 \pi G_c p(x_0) l^2$$

0 = 0
0 = 0
0 = 0

Gebruik behoud van energie $\frac{d}{dt} (\rho a^3) = -p \frac{d}{dt} (a^3)$ om de laatste vergelijking die we nog nodig hadden te vinden.

```
> simplify(BianchiID, {diff(rho(x[0]), x[0]) + 3*rho(x[0])*diff(a(x[0]), x[0])/a(x[0]) + 3*p(x[0])*diff(a(x[0]), x[0])/a(x[0]) = 0}):
expand(simplify(%+3*(diff(a(x[0]), x[0]))*a(x[0])*X(x[0])^3*Y(x[0])/a(x[0])^3/X(x[0])^2/1^2)*a(x[0])^3*1^2));
```

$$3 a(x_0) \left(\frac{d}{dx_0} a(x_0) \right) X(x_0) Y(x_0) = - \frac{Y(x_0)^3 \left(\frac{d}{dx_0} X(x_0) \right)}{X(x_0)^2} + \frac{3 Y(x_0)^2 \left(\frac{d}{dx_0} Y(x_0) \right)}{X(x_0)}$$

Document A.3: Maple code en output om aan te tonen dat $K_{\mu\nu} = 0$ als (2.41) gekozen wordt als nulde orde vorm voor $q_{\mu\nu}$.

```

> restart:
> with(LinearAlgebra):
> read "Procedures":
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    q[i,j] := 0:
    qu[i,j] := 0:
  end do:
end do:

```

De componenten van de tensor $q_{\mu\nu}$

```

> q[0,0] := -beta^2*(1-w[0]/k(x[1]));
q[1,1] := 1/(1-w[0]/k(x[1]))*diff(k(x[1]),x[1])^2;
q[2,2] := k(x[1])^2;
q[3,3] := k(x[1])^2*sin(x[2])^2;

```

$$q_{0,0} := -\beta^2 \left(1 - \frac{w_0}{k(x_1)} \right)$$

$$q_{1,1} := \frac{\left(\frac{d}{dx_1} k(x_1) \right)^2}{1 - \frac{w_0}{k(x_1)}}$$

$$q_{2,2} := k(x_1)^2$$

$$q_{3,3} := k(x_1)^2 \sin(x_2)^2$$

De componenten van de inverse tensor.

```

> for i from 0 to 3 do
  qu[i,i] := 1/q[i,i]:
end do:

```

Berekenen van de 'Ricci'-tensor voor $q_{\mu\nu}$

```

> K:=Ricci(q,qu):

```

Er geldt inderdaad dat $K_{\mu\nu} = 0$.

```

> f K:=(i,j)->K[i-1,j-1]:
'K[mu,nu]'=Matrix(4,4,f_K);

```

$$K_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> with(PDETools):
> with(plots):
> read "Procedures":
> interface(showassumed=0):
```

Invulwerk

De niet-nul componenten van de tensoren $g_{\mu\nu}$ en $q_{\mu\nu}$:

```
> g[0,0] := -(1+2/c^2*(inv_l^2*Phi[1](x[1])+inv_l^4*Phi[2](x[1]
)))
g[1,1] := (1-2/c^2/x[1]*(inv_l^2*m[1](x[1])+inv_l^4*m[2](x[1]
)))^(-1);
g[2,2] := x[1]^2;
g[3,3] := x[1]^2*sin(x[2])^2;

q[0,0]:=-beta^2*(1-1/k(x[1])+inv_l^2*a[1](x[1])+inv_l^4*a[2]
(x[1]));
q[1,1]:=w[0]^2*(1-1/k(x[1])+inv_l^2*b[1](x[1])+inv_l^4*b[2](x
[1]))^(-1)*diff(k(x[1]),x[1])^2;
q[2,2]:=w[0]^2*(k(x[1]))^2;
q[3,3]:=w[0]^2*(k(x[1]))^2*sin(x[2])^2;
```

$$g_{0,0} := -1 - \frac{2 \left(\text{inv_l}^2 \Phi_1(x_1) + \text{inv_l}^4 \Phi_2(x_1) \right)}{c^2}$$

$$g_{1,1} := \frac{1}{1 - \frac{2 \left(\text{inv_l}^2 m_1(x_1) + \text{inv_l}^4 m_2(x_1) \right)}{c^2 x_1}}$$

$$g_{2,2} := x_1^2$$

$$g_{3,3} := x_1^2 \sin^2(x_2)$$

$$q_{0,0} := -\beta^2 \left(1 - \frac{1}{k(x_1)} + \text{inv_l}^2 a_1(x_1) + \text{inv_l}^4 a_2(x_1) \right)$$

$$q_{1,1} := \frac{w_0^2 \left(\frac{d}{dx_1} k(x_1) \right)^2}{1 - \frac{1}{k(x_1)} + \text{inv_l}^2 b_1(x_1) + \text{inv_l}^4 b_2(x_1)}$$

$$q_{2,2} := w_0^2 k(x_1)^2$$

$$q_{3,3} := w_0^2 k(x_1)^2 \sin^2(x_2)$$

De energietensor

```
> for i from 0 to 3 do:
  for j from 0 to 3 do:
    T[i,j]:=0:
  end do:
end do:
> assume(alpha::real,beta::real,inv_l>0,k::real,k(r)::real,
r::real,r(k)::real,w[0]::real):
```

Vorbereidend werk

```
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    if i<>j then
      g[i,j] := 0: gu[i,j] := 0:
      q[i,j] := 0: qu[i,j] := 0:
    else
```

```

        g[i,i]:=convert(series(g[i,i],inv_l,5),polynom):
        q[i,i]:=convert(series(q[i,i],inv_l,5),polynom):
    end if:
end do:
end do:

```

De coëfficiënten van de inverse tensoren $g^{\mu\nu}$ en $q^{\mu\nu}$

```

> for i from 0 to 3 do
    gu[i,i]:=convert(series(1/g[i,i],inv_l,5),polynom):
    qu[i,i]:=convert(series(1/q[i,i],inv_l,5),polynom):
end do:

```

Opstellen van de op te lossen vergelijkingen

Berekening van de kromingstensor $K_{\mu\nu}$ in de q -ruimte en de Einsteintensor $G_{\mu\nu}$

```

> K:=Ricci(q,qu):
G:=Einstein(g,gu):
for i from 0 to 3 do
    for j from 0 to 3 do
        G[i,j]:=series(G[i,j],inv_l,5):
        K[i,j]:=series(K[i,j],inv_l,5):
    end do:
end do:

```

Voor de gekozen vormen voor $g_{\mu\nu}^{(0)}$ en $q_{\mu\nu}^{(0)}$ zijn de nulde-orde veldvergelijkingen voldaan, wat te zien is aan het feit dat er geen (van $0=0$ verschillende) vergelijkingen worden teruggegeven.

```

> EQNS_G[0]:=banadosPertG(G,g,qu,T,inv_l,0):
EQNS_K[0]:=banadosPertK(K,g,q,inv_l,0):
EQNS_G_0:= [eqn_G]
EQNS_K_0:= [eqn_K]

```

De eerste orde veldvergelijkingen (in functie van r en θ i.p.v. x_1 en x_2).

```

> EQNS_G[1]:=simplify(dchange({x[1]=r,x[2]=theta},banadosPertG
(G,g,qu,T,inv_l,2))):
EQNS_K[1]:=simplify(dchange({x[1]=r,x[2]=theta},banadosPertK
(K,g,q,inv_l,2))):

```

Verander variabele van r naar k

```

> omzettingssvgln_1:=
diff(k(r),r)=1/diff(r(k),k),
diff(a[0](r),r,r)=diff(diff(a[0](k),k)/diff(r(k),k),k)/diff(r
(k),k),
diff(b[0](r),r,r)=diff(diff(b[0](k),k)/diff(r(k),k),k)/diff(r
(k),k),
diff(Phi[1](r),r,r)=diff(diff(Phi[1](k),k)/diff(r(k),k),k)
/diff(r(k),k),
diff(u[1](r),r,r)=diff(diff(u[1](k),k)/diff(r(k),k),k)/diff(r
(k),k),
diff(m[1](r),r,r)=diff(diff(m[1](k),k)/diff(r(k),k),k)/diff(r
(k),k),
diff(a[1](r),r,r)=diff(diff(a[1](k),k)/diff(r(k),k),k)/diff(r
(k),k),
diff(b[1](r),r,r)=diff(diff(b[1](k),k)/diff(r(k),k),k)/diff(r
(k),k),
diff(a[0](r),r)=diff(a[0](k),k)/diff(r(k),k),
diff(b[0](r),r)=diff(b[0](k),k)/diff(r(k),k),
diff(Phi[1](r),r)=diff(Phi[1](k),k)/diff(r(k),k),
diff(u[1](r),r)=diff(u[1](k),k)/diff(r(k),k),
diff(m[1](r),r)=diff(m[1](k),k)/diff(r(k),k),
diff(a[1](r),r)=diff(a[1](k),k)/diff(r(k),k),
diff(b[1](r),r)=diff(b[1](k),k)/diff(r(k),k),
diff(k(r),r,r)=-diff(r(k),k)^(-3)*diff(r(k),k,k),
r=r(k):
> omzettingssvgln_2:=
a[0](r(k))=a[0](k),
b[0](r(k))=b[0](k),
Phi[1](r(k))=Phi[1](k),

```

```

u[1](r(k))=u[1](k),
m[1](r(k))=m[1](k),
a[1](r(k))=a[1](k),
b[1](r(k))=b[1](k),
k(r(k))=k:

```

▼ Bereken de oplossing tot op eerste orde in $\frac{1}{l^2}$

Definiëring van $u^{(1)}(r)$.

```
> Phi[1](r):=int(u[1](r)/r+m[1](r)/r^2,r);
```

$$\Phi_1(r) := \int \left(\frac{u_1(r)}{r} + \frac{m_1(r)}{r^2} \right) dr$$

De veldvergelijkingen in functie van $u^{(1)}(r)$, $m^{(1)}(r)$ en $r(k)$.

```
> for i from 1 to 4 do
  if i=1 then
    EQNS_G[1][i]:=simplify(isolate(EQNS_G[1][i],m[1](r)))
  assuming diff(k(r),r)::real:
  else
    EQNS_G[1][i]:=simplify(isolate(EQNS_G[1][i],u[1](r)))
  assuming diff(k(r),r)::real:
  end if:
  print(EQNS_G[1][i]):
end do:
```

$$\frac{d}{dr} m_1(r) = \frac{1}{2} \frac{c^2 k(r)^3 \left| \frac{w_0^3 \left(\frac{d}{dr} k(r) \right)}{\beta} \right|}{k(r) - 1}$$

$$u_1(r) = -\frac{1}{2} c^2 (k(r) - 1) k(r) \left| \frac{\beta w_0}{\frac{d}{dr} k(r)} \right|$$

$$\frac{d}{dr} u_1(r) = -r c^2 \left| \beta w_0 \left(\frac{d}{dr} k(r) \right) \right|$$

$$\frac{d}{dr} u_1(r) = -r c^2 \left| \beta w_0 \left(\frac{d}{dr} k(r) \right) \right|$$

Verander van variabele: $r \rightarrow k$.

```
> simplify(subs({omzettingssvgn_1},EQNS_G[1])):
EQNS_G_k[1]:=simplify(subs({omzettingssvgn_2},%)):
for i from 1 to 4 do
  if i<>2 then
    EQNS_G_k[1][i]:=simplify(EQNS_G_k[1][i]*abs(diff(r(k),k))
  )/abs(diff(r(k),k)):
  else
    EQNS_G_k[1][i]:=simplify(EQNS_G_k[1][i]/abs(diff(r(k),k))
  )*abs(diff(r(k),k)):
  end if:
end do:
'EQNS_G_k[1]'=EQNS_G_k[1];
```

$$EQNS_G_k_1 = \left[\frac{\frac{d}{dk} m_1(k)}{\frac{d}{dk} r(k)} = \frac{1}{2} \frac{c^2 k^3 \left| \frac{w_0^3}{\beta} \right|}{\left| \frac{d}{dk} r(k) \right| (k-1)}, u_1(k) = -\frac{1}{2} \left| \frac{d}{dk} r(k) \right| k c^2 (k$$

$$-1) \left| \beta w_0 \right|, \frac{\frac{d}{dk} u_1(k)}{\frac{d}{dk} r(k)} = - \frac{c^2 r(k) \left| \beta w_0 \right|}{\left| \frac{d}{dk} r(k) \right|}, \frac{\frac{d}{dk} u_1(k)}{\frac{d}{dk} r(k)} = - \frac{c^2 r(k) \left| \beta w_0 \right|}{\left| \frac{d}{dk} r(k) \right|}$$

Oplossen van het stelsel:

```
> OPL_G[1]:=dsolve(EQNS G k[1]) assuming diff(r(k),k)::real:
OPL_G[1]:=simplify(subs({_Ci=-abs(w[0])^3*c^2/2/abs(beta)*h
[0]7signum(diff(r(k),k))},OPL_G[1]));
```

$$OPL_G_1 := \left[\left\{ r(k) = \left(e^{\left[-b(-a) \frac{d}{da} + -c^2 \right]} \right) \&where \left\{ \left\{ \frac{d}{da} -b(-a) = \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \frac{-2 -b(-a) + 2 \left[-b(-a) \right]^2 -a + -a^2 -b(-a)^3 - b(-a)^3 -a - \left[-b(-a) \right]^2 \right]}{-a(-a-1) -b(-a)} \right\}, \left\{ -a = k, \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. -b(-a) = \frac{\frac{d}{dk} r(k)}{r(k)} \right\}, \left\{ k = -a, r(k) = e^{\left[-b(-a) \frac{d}{da} + -c^2 \right]} \right\} \right\}, \left\{ u_1(k) = \right.$$

$$\left. \left. \left. - \frac{1}{2} k c^2 \left[\left(\frac{d}{dk} r(k) \right) \beta w_0 \right] (k-1) \right\}, \left\{ m_1(k) = \frac{1}{12} \frac{1}{\beta \operatorname{signum} \left(\frac{d}{dk} r(k) \right)} \left(c^2 \left(2 \right. \right. \right.$$

$$w_0^3 \operatorname{signum} \left(\frac{w_0^3}{\beta \left(\frac{d}{dk} r(k) \right)} \right) \operatorname{signum} \left(\frac{d}{dk} r(k) \right) k^3 + 3$$

$$w_0^3 \operatorname{signum} \left(\frac{w_0^3}{\beta \left(\frac{d}{dk} r(k) \right)} \right) \operatorname{signum} \left(\frac{d}{dk} r(k) \right) k^2 + 6$$

$$w_0^3 \operatorname{signum} \left(\frac{w_0^3}{\beta \left(\frac{d}{dk} r(k) \right)} \right) \operatorname{signum} \left(\frac{d}{dk} r(k) \right) k + 6$$

$$w_0^3 \operatorname{signum} \left(\frac{w_0^3}{\beta \left(\frac{d}{dk} r(k) \right)} \right) \operatorname{signum} \left(\frac{d}{dk} r(k) \right) \ln(k-1) - 6 h_0 \left[\frac{w_0^3}{\beta} \left| \beta \right| \right] \right] \right\}$$

```
> u[1](k):=simplify(rhs(OPL_G[1][2][1])/abs(diff(r(k),k)))*abs
(diff(r(k),k));
m[1](k):=simplify(simplify(rhs(OPL_G[1][3][1]),{signum(w[0]
^3/(beta*diff(r(k),k)))*w[0]^3/beta=abs(w[0]^3/beta)/signum
(diff(r(k),k))}));
```

$$u_1(k) := - \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dk} r(k) \right| k c^2 (k-1) \left| \beta w_0 \right|$$

$$m_1(k) := \frac{1}{12} \frac{c^2 w_0^2 (-6 h_0 + 3 k^2 + 6 k + 6 \ln(k-1) + 2 k^3) \left| \frac{w_0}{\beta} \right|}{\text{signum} \left(\frac{d}{dk} r(k) \right)}$$

De uitdrukking voor $r(k)$ kan vereenvoudigd worden omdat $\frac{dr}{dk}(k)$ reëel is en dus

$$\left| \frac{dr}{dk}(k) \right|^2 = \left(\frac{dr}{dk}(k) \right)^2.$$

```
> simplify(op([1,2,2,1,1],OPL_G[1][1])) assuming _b(_a)::real;
dsolve(%);
r(_a)=op([1,2,1],OPL_G[1][1]);
simplify(value(subs(%,%)));
r(k):=rhs(simplify(expand(subs({_a=k,_C1=B[0]/A[0],_C2=ln(-A
[0]),%},{ln(k-1)-ln(k)=ln(1-1/k)}))));
```

$$\frac{d}{d_a} b(_a) = - \frac{-2 + 2 b(_a) _a + _a^2 b(_a)^2 - b(_a)^2 _a - b(_a)}{_a (_a - 1)}$$

$$b(_a) = \frac{(-2 _a^2 \ln(_a) - 2 _a^2 _C1 + 2 _a^2 \ln(_a - 1) + 2 \ln(_a) _a + 2 _a - 2 \ln(_a - 1) _a + 2 _C1 _a - 1) / ((-2 _C1 _a + _C1 + 2 \ln(_a - 1) _a - \ln(_a - 1) - 2 \ln(_a) _a + \ln(_a) + 2) (_a - 1) _a)}{}$$

$$r(_a) = e^{\int b(_a) d_a + _C2}$$

$$r(_a) = \frac{1}{2} (-2 _C1 _a + _C1 + 2 \ln(_a - 1) _a - \ln(_a - 1) - 2 \ln(_a) _a + \ln(_a) + 2) e^{-C2}$$

$$r(k) := B_0 k - \frac{1}{2} B_0 - A_0 + \frac{1}{2} (A_0 - 2 k A_0) \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

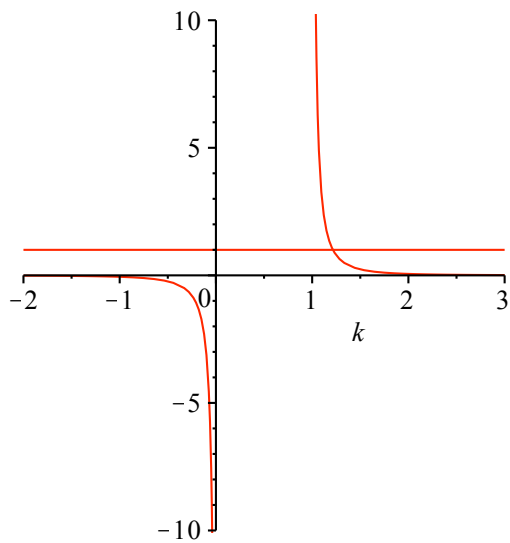
$\frac{dr}{dk}$ mag nooit gelijk worden aan 0. Het feit dat de onderstaande twee functies elkaar snijden

betekent dat $\frac{dr}{dk} = 0$ voor een zekere $k > 1$ wanneer $\text{sgn}(A_0) = \text{sgn}(B_0)$. Daarom moet dus

$\text{sgn}(A_0) \neq \text{sgn}(B_0)$ gelden.

```
> 'diff(r(k),k)'=diff(r(k),k);
plot(ln(1-1/k)-(1/2)*(1-2*k)/(k^2*(1-1/k)),k=-2..3,y=-10..10)
:
plot(1,k=-2..3):
display(%,%);
```

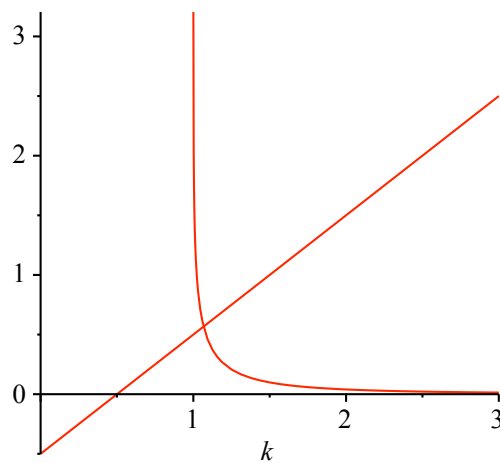
$$\frac{d}{dk} r(k) = B_0 - A_0 \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{A_0 - 2 k A_0}{k^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right)}$$



Het feit dat de onderstaande twee functies elkaar snijden betekent dat $r(k)$ voor $\text{sgn}(A_0) \neq \text{sgn}(B_0)$ altijd een nulpunt $k_0 > 1$ zal hebben.

```
> 'r(k)'=A[0]*(-1-(k-1/2)*ln(1-1/k))+B[0]*(k-(1/2));
plot(-(k-1/2)*ln(1-1/k)-1,k=0..3):
plot(k-1/2,k=0..3):
display(%,%);
```

$$r(k) = A_0 \left(-1 - \left(k - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right) + B_0 \left(k - \frac{1}{2} \right)$$



Het regime waar r tussen $+\infty$ en 0 zit, is het interessante regime.

```
> 'limit(r(k),k=infinity)'=limit(r(k),k=infinity);
'limit(r(k),k=1)'=limit(r(k),k=1);
```

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \text{signum}(B_0) \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} r(k) = \text{signum}(A_0) \infty$$

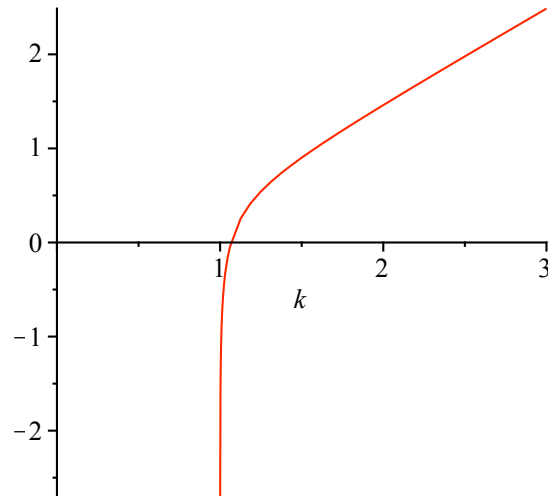
Voor $B_0 > 0$ en $A_0 < 0$ kijken we dus naar $k \in [k_0, \infty[$.

Voor $A_0 > 0$ en $B_0 < 0$ kijken we naar $k \in]1, k_0]$.

Voor $A_0 < 0, B_0 > 0$ en $k \in [k_0, \infty[$ divergeert $\frac{m^{(1)}(k)}{r(k)}$ voor grote k (en dus grote r).

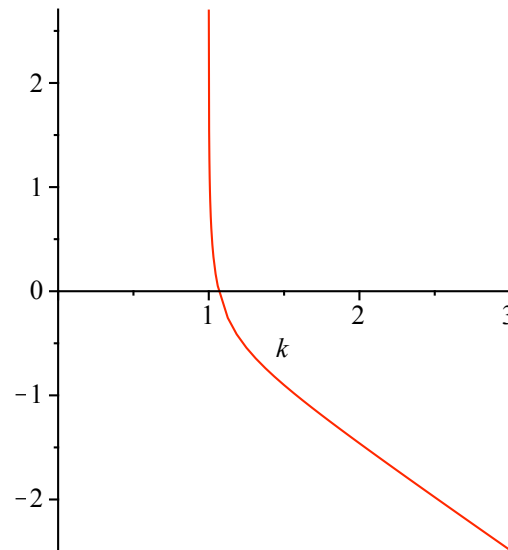
⇒ geen fysische oplossing

```
> A[0]:=-1: B[0]:=1:
  plot(r(k), k=0..3);
```



Het geval $A_0 > 0, B_0 < 0$ en $k \in]1, k_0]$: "Logarithmic Branch".

```
> A[0]:=1: B[0]:=-1:
  plot(r(k), k=0..3);
```



De rotatiesnelheid $v(r)$ tot op eerste orde in $\frac{1}{l^2}$.

```
> A:='A': B:='B':
  SignEQNS:={abs(diff(r(k),k))=-(diff(r(k),k)), signum(-diff(r
(k),k))=1}:
  m[1](k):=subs(SignEQNS,eval(m[1](k)));
  u[1](k):=subs(SignEQNS,eval(u[1](k)));
```


$$m_1(k) := -\frac{1}{12} c^2 w_0^2 \left(-6 h_0 + 3 k^2 + 6 k + 6 \ln(k-1) + 2 k^3 \right) \left| \frac{w_0}{\beta} \right|$$

$$u_1(k) := -\frac{1}{2} \left(-B_0 + A_0 \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2} \frac{A_0 - 2 k A_0}{k^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \right) k c^2 (k-1) |\beta w_0|$$

> **v:=unapply(simplify(inv_l*sqrt(u[1](k)+m[1](k)/r(k)),k):**
v:=k

$$\rightarrow \frac{1}{6} \text{inv_l} \sqrt{3}$$

$$\left(\left(\left(18 |\beta w_0| B_0^2 k^2 - 12 |\beta w_0| B_0^2 k^3 - 6 |\beta w_0| B_0^2 k - 12 |\beta w_0| k A_0^2 + 3 |\beta w_0| A_0 B_0 \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + 6 |\beta w_0| A_0^2 - 3 |\beta w_0| A_0^2 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + 24 |\beta w_0| B_0 k^2 A_0 - 24 |\beta w_0| B_0 k A_0 - 24 |\beta w_0| \right. \right.$$

$$\left. \left. A_0^2 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) k^2 + 18 |\beta w_0| A_0^2 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 k^2 - 12 |\beta w_0| A_0^2 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 k^3 + 24 |\beta w_0| \right. \right.$$

$$\left. \left. A_0^2 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) k - 6 |\beta w_0| A_0^2 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 k - 36 |\beta w_0| B_0 k^2 A_0 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + 24 |\beta w_0| B_0 k^3 A_0 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + 12 |\beta w_0| B_0 k A_0 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) - 12 w_0^2 \left| \frac{w_0}{\beta} \right| h_0 + 6 \right. \right.$$

$$\left. \left. w_0^2 \left| \frac{w_0}{\beta} \right| k^2 + 12 w_0^2 \left| \frac{w_0}{\beta} \right| k + 12 w_0^2 \left| \frac{w_0}{\beta} \right| \ln(k-1) + 4 w_0^2 \left| \frac{w_0}{\beta} \right| k^3 \right) c^2 \Bigg) / \left(-2 B_0 k + B_0 \right.$$

$$\left. \left. \frac{1}{2} \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 A_0 - A_0 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + 2 A_0 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) k \right) \right)$$

De rotatiesnelheid heeft een eindige limiet voor $r \rightarrow \infty$:

> **v_inf_kwadr:=simplify(limit(v(k)^2,k=1));**

$$v_inf_kwadr := -\frac{1}{4} \frac{c^2 \text{inv_l}^2 \left(-4 w_0^2 + \beta^2 A_0^2 \right) \left| \frac{w_0}{\beta} \right|}{A_0}$$

Dit is enkel positief als $\beta^2 A_0^2 - 4 w_0^2 < 0$, want $A_0 > 0$ verondersteld.

Druk B_0 uit in functie van de parameter k_0 , de waarde van k waarvoor $r(k) = 0$:

> **eval(r(k),k=k[0])=0;**
B[0]:=solve(%,B[0]);

$$B_0 k_0 - \frac{1}{2} B_0 - A_0 + \frac{1}{2} (A_0 - 2 k_0 A_0) \ln\left(1 - \frac{1}{k_0}\right) = 0$$

$$B_0 := \frac{A_0 \left(2 - \ln\left(1 - \frac{1}{k_0}\right) + 2 \ln\left(1 - \frac{1}{k_0}\right) k_0 \right)}{2 k_0 - 1}$$

Gebruik randvoorwaarden om ook A_0 en h_0 in functie van k_0 te schrijven:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m^{(1)}}{r} \neq \infty \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow k_0} \frac{m^{(1)}(k)}{r(k)} \neq \infty \Leftrightarrow m^{(1)}(k_0) = 0$$

> **eval(m[1](k),k=k[0])=0;**

```
h[0]:=solve(%,h[0]);
```

$$-\frac{1}{12} c^2 w_0^2 (-6 h_0 + 3 k_0^2 + 6 k_0 + 6 \ln(k_0 - 1) + 2 k_0^3) \left| \frac{w_0}{\beta} \right| = 0$$

$$h_0 := \frac{1}{2} k_0^2 + k_0 + \ln(k_0 - 1) + \frac{1}{3} k_0^3$$

$$\lim_{k \rightarrow k_0} \left(u^{(1)}(k) + \frac{m^{(1)}(k)}{r(k)} \right) = 0 \Leftrightarrow m^{(1)}(k_0) = 0 \text{ en } u^{(1)}(k_0) + \lim_{k \rightarrow k_0} \frac{\frac{d}{dk} m^{(1)}(k)}{\frac{d}{dk} r(k)} = 0, \text{ want}$$

$r(k_0) = 0$ per definitie.

```
> opl:=simplify({solve(eval(eval(u[1](k),k=k[0])+eval(diff(m[1](k),k)/diff(r(k),k),k=k[0]))=0,A[0]))});
```

$$opl := \left\{ -\frac{2 w_0 (2 k_0 - 1) k_0^2}{|\beta|}, \frac{2 w_0 (2 k_0 - 1) k_0^2}{|\beta|} \right\}$$

De eindige limiet van de rotatiesnelheid uitgedrukt in functie van k_0 :

```
> A[0]:=opl[1];
simplify(v_inf_kwadr);
A[0]:=opl[2];
simplify(v_inf_kwadr);
```

$$A_0 := -\frac{2 w_0 (2 k_0 - 1) k_0^2}{|\beta|}$$

$$\frac{1}{2} \frac{c^2 \text{inv}_l^2 w_0 (-1 + 4 k_0^6 - 4 k_0^5 + k_0^4) |w_0|}{(2 k_0 - 1) k_0^2}$$

$$A_0 := \frac{2 w_0 (2 k_0 - 1) k_0^2}{|\beta|}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{c^2 \text{inv}_l^2 w_0 (-1 + 4 k_0^6 - 4 k_0^5 + k_0^4) |w_0|}{(2 k_0 - 1) k_0^2}$$

v_∞^2 is steeds negatief, want $A_0 > 0$ moet gelden en dat is in het eerste geval enkel zo als $w_0 < 0$ (want $k_0 > 1$) en in het tweede geval als $w_0 > 0$. De voorwaarde

$$\beta^2 A_0^2 - 4 w_0^2 < 0 \Leftrightarrow \beta^2$$

$$\left(\pm \frac{2 w_0 k_0^2 (2 k_0 - 1)}{|\beta|} \right)^2 < 4 w_0^2 \Leftrightarrow 4 w_0^2 k_0^4 (4 k_0^2 - 4 k_0 + 1) < 4 w_0^2 \Leftrightarrow k_0^4 (4 k_0^2 - 4 k_0 + 1) < 1$$

is namelijk nooit voldaan voor $k_0 > 1$.

Document A.5: Maple code en output voor het berekenen van de oplossingen van de eerste orde veldvergelijkingen, zoals in document A.4 berekend, maar met $\frac{dk}{dr} > 0$, in functie van r en voor het berekenen van de corresponderende massadichtheid.

```
> restart;
> EQN1:=diff(m[1](r),r)*(1-1/k(r))-w[0]^3*c^2/(2*beta)*k(r)^2*diff(k(r),r)=0;
EQN2:=beta*c^2*w[0]*k(r)^2*(1-1/k(r))+2*diff(k(r),r)*u[1]=0;
EQN3:=diff(u[1](r),r)+beta*c^2*w[0]*r*diff(k(r),r)=0;
EQNS:=EQN1,EQN2,EQN3;
```

$$EQN1 := \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) \left(1 - \frac{1}{k(r)} \right) - \frac{1}{2} \frac{w_0^3 c^2 k(r)^2 \left(\frac{d}{dr} k(r) \right)}{\beta} = 0$$

$$EQN2 := \beta c^2 w_0 k(r)^2 \left(1 - \frac{1}{k(r)} \right) + 2 \left(\frac{d}{dr} k(r) \right) u_1 = 0$$

$$EQN3 := \frac{d}{dr} u_1(r) + \beta c^2 w_0 r \left(\frac{d}{dr} k(r) \right) = 0$$

Vindt de algemene oplossing van bovenstaand stelsel (zonder beginvoorwaarden), gebruik makend van machtsontwikkeling.

```
> Order:=2;
opl:=dsolve({EQNS},{k(r),u[1](r),m[1](r)},series);
k(r):=value(rhs(opl[1]));
m[1](r):=rhs(opl[2]);
u[1](r):=rhs(opl[3]);
```

$$k(r) := k(0) - \frac{1}{2} \frac{\beta c^2 w_0 k(0)^2 \left(1 - \frac{1}{k(0)} \right)}{u_1(0)} r + O(r^2)$$

$$m_1(r) := m_1(0) - \frac{1}{4} \frac{w_0^4 c^4 k(0)^4}{u_1(0)} r + O(r^2)$$

$$u_1(r) := u_1(0) + O(r^2)$$

Gebruik de beginvoorwaarden om de waarden voor $m(0)$ en $u(0)$ te vinden:

```
> k(0):=k[0];
m[1](0):=0;
u[1](0):=eval(solve(u[1](0)=eval(-diff(m[1](r),r),r=0),u[1](0))[1]);
```

$$k(0) := k_0$$

$$m_1(0) := 0$$

$$u_1(0) := \frac{1}{2} w_0^2 c^2 k_0^2$$

```
> 'k(r)' = factor(eval(k(r)));
'm[1](r)' = eval(m[1](r));
'u[1](r)' = eval(u[1](r));
```

$$k(r) = k_0 - \frac{\beta (k_0 - 1)}{w_0 k_0} r + O(r^2)$$

$$m_1(r) = -\frac{1}{2} w_0^2 c^2 k_0^2 r + O(r^2)$$

$$u_1(r) = \frac{1}{2} w_0^2 c^2 k_0^2 + O(r^2)$$

Berekening van de Laplaciaan van de Newtoniaanse potentiaal. Hiervoor worden de oplossingen net iets accurater berekend.

```
> Order:=3;
```

```

k(r):='k(r)';u[1](r):='u[1](r)';m[1](r):='m[1](r)';
opl:=dsolve({EQN1,EQN2,EQN3},{k(r),u[1](r),m[1](r)},series):
> k(r):=convert(rhs(opl[1]),polynom):
m[1](r):=convert(rhs(opl[2]),polynom):
u[1](r):=convert(rhs(opl[3]),polynom):
> afg_Phi(r):=1/l^2*(u[1](r)/r+m[1](r)/r^2):
> 4*Pi*G*rho(r)=simplify(series(1/r^2*diff(r^2*afg_Phi(r),r),r));

```

$$4 \pi G \rho(r) = \frac{2 w_0 c^2 \beta (k_0 - 1)}{l^2 r} + \frac{3}{2} \frac{\beta^2 c^2 (k_0 - 1)}{l^2 k_0}$$

Document A.6: Maple code en output voor het berekenen van de oplossingen van de eerste orde veldvergelijkingen, zoals in document A.4 berekend, maar met $\frac{dk}{dr} > 0$, in functie van k .

```

> restart:
Berekenen van de oplossingen van de eerste orde veldvergelijkingen in functie van k
> ODE1:=diff(m[1](k),k)*(1-1/k)-w[0]^3*c^2*k^2/(2*beta)=0;
ODE2:=beta*c^2*w[0]*k^2*(1-1/k)*diff(r(k),k)+2*u[1](k)=0;
ODE3:=diff(u[1](k),k)+beta*c^2*w[0]*r(k)=0;

```

$$ODE1 := \left(\frac{d}{dk} m_1(k) \right) \left(1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{2} \frac{w_0^3 c^2 k^2}{\beta} = 0$$

$$ODE2 := \beta c^2 w_0 k^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(\frac{d}{dk} r(k) \right) + 2 u_1(k) = 0$$

$$ODE3 := \frac{d}{dk} u_1(k) + \beta c^2 w_0 r(k) = 0$$

```

> opl:=dsolve({ODE1,ODE2,ODE3}):
sideRel:=-C1=-1/4*A[0]*(beta*w[0]*c^2),_C2=-B[0]/2*beta*c^2*w[0],
ln(k-1)-ln(k)=ln(1-1/k):
m[1](k):=factor(simplify(rhs(opl[2]),{_C3=-w[0]^3*c^2/(2*beta)*h
[0]}));
r(k):=expand(simplify(rhs(opl[1]),{sideRel}));
u[1](k):=simplify(rhs(opl[3]),{sideRel});

```

$$m_1(k) := \frac{1}{12} \frac{c^2 w_0^3 (3 k^2 + 6 k + 6 \ln(k-1) + 2 k^3 - 6 h_0)}{\beta}$$

$$r(k) := -A_0 + B_0 k - \frac{1}{2} B_0 - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) A_0 k + \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) A_0$$

$$u_1(k) := \frac{1}{4} (2 k - 1) A_0 \beta c^2 w_0 + \frac{1}{4} (-2 k^2 + 2 k) B_0 \beta c^2 w_0 + \frac{1}{4} (2 k^2 - 2 k) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) A_0 \beta c^2 w_0$$

```

>

```

```
> restart:
> with(plots):
> r:=k->A[0]*(-(k-1/2)*ln(1-1/k)-1)+B[0]*(k-1/2);
u[1]:=k->1/2*beta*c^2*w[0]*(A[0]*(k^2*(1-1/k)*ln(1-1/k)+k-1/2)-B
[0]*(k^2-k));
m[1]:=k->w[0]^3*c^2/(2*beta)*(1/3*k^3+1/2*k^2+k+ln(k-1)-h[0]);
r:=k->A_0*(-(k-1/2)*ln(1-1/k)-1)+B_0*(k-1/2)
u_1:=k->1/2*beta*c^2*w_0*(A_0*(k^2*(1-1/k)*ln(1-1/k)+k-1/2)-B_0*(k^2-k))
m_1:=k->1/2*w_0^3*c^2*(1/3*k^3+1/2*k^2+k+ln(k-1)-h_0)/beta
```

Definitie van de rotatiesnelheid en de asymptotische waarde v_∞^2 :

```
> v:=k->sqrt(1/l^2*(u[1](k)+m[1](k)/r(k)));
v_inf_kwadr:=factor(limit(v(k)^2,k=1));
```

$\lim_{k \rightarrow k_0} \left(u^{(1)}(k) + \frac{m^{(1)}(k)}{r(k)} \right) = 0 \Leftrightarrow m^{(1)}(k_0) = 0$ en $u^{(1)}(k_0) + \lim_{k \rightarrow k_0} \frac{\frac{d}{dk} m^{(1)}(k)}{\frac{d}{dk} r(k)} = 0$, want

$r(k_0) = 0$ per definitie.

```
> B[0]:=solve(r(k[0])=0,B[0]):
h[0]:=solve(m[1](k[0])=0,h[0]):
A[0]:=solve(u[1](k[0])+D(m[1])(k[0])/D(r)(k[0])=0,A[0]):
A[0]:=A[0][1]:
B[0]:=B[0]:
```

$$h_0 := \frac{1}{3} k_0^3 + \frac{1}{2} k_0^2 + k_0 + \ln(k_0 - 1)$$

$$A_0 := \frac{2 w_0 k_0^2 (2 k_0 - 1)}{\beta}, - \frac{2 w_0 k_0^2 (2 k_0 - 1)}{\beta}$$

$$B_0 := \frac{2 w_0 k_0^2 \left(2 \ln \left(1 - \frac{1}{k_0} \right) k_0 - \ln \left(1 - \frac{1}{k_0} \right) + 2 \right)}{\beta}$$

De rotatiesnelheden horend bij een systeem gaan naar een eindige waarde voor $k \rightarrow 1$:

```
> 'v_inf_kwadr' = simplify(expand(numer(v_inf_kwadr))/denom
(v_inf_kwadr));
```

$$v_inf_kwadr = \frac{1}{2} \frac{c^2 w_0^2 (4 k_0^6 - 4 k_0^5 + k_0^4 - 1)}{k_0^2 (2 k_0 - 1) l^2}$$

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> with(IntegrationTools):
> with(PDETools):
> read "Procedures":
```

Begincondities

De componenten van de g - en q -tensoren tot op tweede orde in ϵ .

```
> g[0,0] := -(1-x[1]^2*Lambda/3+epsilon*a_1(x[1])+epsilon^2*a_2(x[1]));
g[1,1] := (1-x[1]^2*Lambda/3+epsilon*b_1(x[1])+epsilon^2*b_2(x[1]))^(-1);
g[2,2] := x[1]^2;
g[3,3] := x[1]^2*sin(x[2])^2;

q[0,0]:=-(ga*(1-x[1]^2*Lambda/3)+epsilon*c_1(x[1])+epsilon^2*c_2(x[1]));
q[1,1]:=(ga^(-1)*(1-x[1]^2*Lambda/3)+epsilon*d_1(x[1])+epsilon^2*d_2(x[1]))^(-1);
q[2,2]:=(ga+epsilon*e_1(x[1])+epsilon^2*e_2(x[1]))*x[1]^2;
q[3,3]:=(ga+epsilon*e_1(x[1])+epsilon^2*e_2(x[1]))*x[1]^2*sin(x[2])^2;
```

$$g_{0,0} := -1 + \frac{1}{3} x_1^2 \Lambda - \epsilon a_{-1}(x_1) - \epsilon^2 a_{-2}(x_1)$$

$$g_{1,1} := \frac{1}{1 - \frac{1}{3} x_1^2 \Lambda + \epsilon b_{-1}(x_1) + \epsilon^2 b_{-2}(x_1)}$$

$$g_{2,2} := x_1^2$$

$$g_{3,3} := x_1^2 \sin(x_2)^2$$

$$q_{0,0} := -ga \left(1 - \frac{1}{3} x_1^2 \Lambda \right) - \epsilon c_{-1}(x_1) - \epsilon^2 c_{-2}(x_1)$$

$$q_{1,1} := \frac{1}{\frac{1}{ga} + \epsilon d_{-1}(x_1) + \epsilon^2 d_{-2}(x_1)}$$

$$q_{2,2} := (ga + \epsilon e_{-1}(x_1) + \epsilon^2 e_{-2}(x_1)) x_1^2$$

$$q_{3,3} := (ga + \epsilon e_{-1}(x_1) + \epsilon^2 e_{-2}(x_1)) x_1^2 \sin(x_2)^2$$

```
> assume(alpha::real, inv_1::real, ga::real, Lambda::real):
```

Voorbereiding

```
> interface(showassumed=0):
alias(1/l=inv_l):
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    if i<>j then
      g[i,j] := 0: gu[i,j] := 0:
      q[i,j] := 0: qu[i,j] := 0:
    else
      g[i,i]:=convert(series(g[i,i],epsilon,3),polynom):
      q[i,i]:=convert(series(q[i,i],epsilon,3),polynom):
    end if:
  end do:
end do:
```

De coëfficiënten van de inverse tensoren $g^{\mu\nu}$ en $q^{\mu\nu}$

```
> for i from 0 to 3 do
  gu[i,i]:=1/g[i,i]:
  qu[i,i]:=1/q[i,i]:
end do:
```

Berekenen van de energietensor a.d.h.v. de viersnelheid U .

```
> U:=((-g[0,0])^(1/2),0,0,0);
      U :=  $\left[ \sqrt{1 - \frac{1}{3} x_1^2 \Lambda + \epsilon a_{-1}(x_1) + \epsilon^2 a_{-2}(x_1)}, 0, 0, 0 \right]$ 
> U_u:=(add(gu[0,n-1]*U[n],n=1..4),add(gu[1,n-1]*U[n],n=1..4),
      add(gu[2,n-1]*U[n],n=1..4),add(gu[3,n-1]*U[n],n=1..4));
      U_u :=  $\left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{3} x_1^2 \Lambda + \epsilon a_{-1}(x_1) + \epsilon^2 a_{-2}(x_1)}}{-1 + \frac{1}{3} x_1^2 \Lambda - \epsilon a_{-1}(x_1) - \epsilon^2 a_{-2}(x_1)}, 0, 0, 0 \right]$ 
> simplify(add(U[m]*U_u[m],m=1..4));
      -1
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    T[i,j]:=(epsilon*rho[1](x[1])+epsilon*p_1(x[1])+
    epsilon^2*p_2(x[1]))*U[i+1]*U[j+1]+(epsilon*p_1(x[1])+
    epsilon^2*p_2(x[1]))*g[i,j]:
    Tu[i,j]:=add(add(gu[i,a]*gu[j,b]*T[i,j],a=0..3),b=0..3):
  end do:
end do:
```

Behoud van baryonische energie levert een uitdrukking voor $p(r)$ op.

```
> Gamma_u:= Christoffel_u(g,gu,bla);
      Gamma_u := Gamma_u
> CovT:=covDerivative(Tu,Gamma_u,[x[0],x[1],x[2],x[3]]);
      CovT :=  $(n, r, m) \rightarrow \frac{\partial}{\partial [x_0, x_1, x_2, x_3]_{m+1}} Tu_{n,r} + \text{add}(Gamma_{u_{n,m,k}} Tu_{k,r}, k=0..3)$ 
      +  $\text{add}(Gamma_{u_{r,m,k}} Tu_{n,k}, k=0..3)$ 
> add(CovT(m,0,m),m=0..3)=0;
EQ_p:=dchange(x[1]=r,simplify(add(CovT(m,1,m),m=0..3)=0));
add(CovT(m,2,m),m=0..3)=0;
add(CovT(m,3,m),m=0..3)=0;
```

0 = 0

$$EQ_p := -\frac{1}{6} \left(\epsilon (-3 + r^2 \Lambda)^3 \left(-2 r \Lambda p_{-1}(r) - 2 r \Lambda \epsilon p_{-2}(r) + 3 \epsilon \left(\frac{d}{dr} a_{-1}(r) \right) p_{-1}(r) \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \epsilon^2 \left(\frac{d}{dr} a_{-1}(r) \right) p_{-2}(r) + 3 \epsilon^2 \left(\frac{d}{dr} a_{-2}(r) \right) p_{-1}(r) + 3 \epsilon^3 \left(\frac{d}{dr} a_{-2}(r) \right) p_{-2}(r) \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \rho_1(r) r \Lambda + 3 \rho_1(r) \epsilon \left(\frac{d}{dr} a_{-1}(r) \right) + 3 \rho_1(r) \epsilon^2 \left(\frac{d}{dr} a_{-2}(r) \right) + 6 \left(\frac{d}{dr} p_{-1}(r) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left(\frac{d}{dr} p_{-1}(r) \right) r^2 \Lambda + 6 \left(\frac{d}{dr} p_{-1}(r) \right) \epsilon a_{-1}(r) + 6 \left(\frac{d}{dr} p_{-1}(r) \right) \epsilon^2 a_{-2}(r) \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \epsilon \left(\frac{d}{dr} p_{-2}(r) \right) - 2 \epsilon \left(\frac{d}{dr} p_{-2}(r) \right) r^2 \Lambda + 6 \epsilon^2 \left(\frac{d}{dr} p_{-2}(r) \right) a_{-1}(r) \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \epsilon^3 \left(\frac{d}{dr} p_{-2}(r) \right) a_{-2}(r) \right) \right) / \left((3 - r^2 \Lambda + 3 \epsilon a_{-1}(r) + 3 \epsilon^2 a_{-2}(r)) (9 - 6 r^2 \Lambda \right. \right. \\ \left. \left. + r^4 \Lambda^2 - 9 \epsilon b_{-1}(r) + 3 b_{-1}(r) \epsilon r^2 \Lambda - 9 \epsilon^2 b_{-2}(r) + 3 \epsilon^2 b_{-2}(r) r^2 \Lambda + 9 \epsilon^2 b_{-1}(r)^2 \right) \right) = 0$$

0 = 0

0 = 0

De coëfficiënten van de inverse tensoren $g^{\mu\nu}$ en $q^{\mu\nu}$ ontwikkeld volgens e.

```
> for i from 0 to 3 do
  gu[i,i]:=convert(series(1/g[i,i],epsilon,3),polynom):
  qu[i,i]:=convert(series(1/q[i,i],epsilon,3),polynom):
end do:
```


Opstellen van de op te lossen vergelijkingen

Berekening van de kromingstensor $K_{\mu\nu}$ in de q -ruimte en de Einsteintensor $G_{\mu\nu}$

```
> K:=Ricci(q,qu):
G:=Einstein(g,gu):
for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    G[i,j]:=series(G[i,j],epsilon,3):
    K[i,j]:=series(K[i,j],epsilon,3):
  end do:
end do:
```

De nulde orde vergelijkingen

```
> EQNS_G[0]:=banadosPertG(G,g,qu,T,epsilon,0):
EQNS_K[0]:=banadosPertK(K,g,q,epsilon,0):
```

Uit de nulde orde veldvergelijkingen halen we de reeds theoretisch bepaalde waarden voor γ en Λ

```
> opl:=solve({op(EQNS_G[0]),op(EQNS_K[0])},{ga,Lambda});
ga:=rhs(opl[1]):
Lambda:=rhs(opl[2]):
```

[Warning, solve may be ignoring assumptions on the input variables.](#)

$$opl := \left\{ ga = -\frac{1}{-1 + \alpha}, \Lambda = -\frac{\left(\frac{1}{T}\right)^2}{-1 + \alpha} \right\}$$

De vergelijkingen voor eerste orde in ϵ

```
> for i from 0 to 3 do
  for j from 0 to 3 do
    G[i,j]:=simplify(G[i,j]):
    K[i,j]:=simplify(K[i,j]):
    g[i,j]:=simplify(g[i,j]):
    gu[i,j]:=simplify(gu[i,j]):
    q[i,j]:=simplify(q[i,j]):
    qu[i,j]:=simplify(qu[i,j]):
  end do:
end do:
EQNS_G[1]:=dchange({x[1]=r,x[2]=theta},banadosPertG(G,g,qu,T,
epsilon,1)):
EQNS_K[1]:=dchange({x[1]=r,x[2]=theta},banadosPertK(K,g,q,
epsilon,1)):
EQNS_p[1]:=dchange({x[1]=r,x[2]=theta},pertEQNS([EQ_p],
epsilon,1,"no")):
```

De vergelijkingen voor tweede orde in ϵ

```
> EQNS_G[2]:=dchange({x[1]=r,x[2]=theta},banadosPertG(G,g,qu,T,
epsilon,2)):
EQNS_K[2]:=dchange({x[1]=r,x[2]=theta},banadosPertK(K,g,q,
epsilon,2)):
EQNS_p[2]:=dchange({x[1]=r,x[2]=theta},pertEQNS([EQ_p],
epsilon,2,"no")):
```

Alle vergelijkingen worden ook nog eens geperturbeerd volgens $\frac{1}{l^2}$

```
> a_1:=r->a[1,0](r)+inv_l^2*a[1,1](r)+inv_l^4*a[1,2](r):
b_1:=r->b[1,0](r)+inv_l^2*b[1,1](r)+inv_l^4*b[1,2](r):
c_1:=r->c[1,0](r)+inv_l^2*c[1,1](r)+inv_l^4*c[1,2](r):
d_1:=r->d[1,0](r)+inv_l^2*d[1,1](r)+inv_l^4*d[1,2](r):
e_1:=r->e[1,0](r)+inv_l^2*e[1,1](r)+inv_l^4*e[1,2](r):
p_1:=r->p[1,0](r)+inv_l^2*p[1,1](r)+inv_l^4*p[1,2](r):
> a_2:=r->a[2,0](r)+inv_l^2*a[2,1](r)+inv_l^4*a[2,2](r):
b_2:=r->b[2,0](r)+inv_l^2*b[2,1](r)+inv_l^4*b[2,2](r):
c_2:=r->c[2,0](r)+inv_l^2*c[2,1](r)+inv_l^4*c[2,2](r):
d_2:=r->d[2,0](r)+inv_l^2*d[2,1](r)+inv_l^4*d[2,2](r):
e_2:=r->e[2,0](r)+inv_l^2*e[2,1](r)+inv_l^4*e[2,2](r):
p_2:=r->p[2,0](r)+inv_l^2*p[2,1](r)+inv_l^4*p[2,2](r):
> for i from 1 to 2 do
  for j from 0 to 2 do
    eqns_G[i,j]:=pertEQNS(EQNS_G[i],inv_l,j*2,"no"):
    eqns_K[i,j]:=pertEQNS(EQNS_K[i],inv_l,j*2,"no"):
    eqns_p[i,j]:=pertEQNS(EQNS_p[i],inv_l,j*2,"no"):
```

```

end do:
end do:

```

▼ Bereken de oplossing tot op eerste orde in ϵ

▼ Zoek de oplossing tot op nulde orde in $\frac{1}{l^2}$

```

> G:='G': alias(G=G_c):
Voor niet-relativistische materie moet het (1,0)-deel van p(r) nul zijn.
> eqns_p[1,0][1];
p[1,0]:=unapply(subs(_C1=Cp[1,0],rhs(dsolve(eqns_p[1,0])[1]
)),r);
Cp[1,0]:=0;

```

$$\frac{d}{dr} p_{1,0}(r) = 0$$

$$p_{1,0} := r \rightarrow Cp_{1,0}$$

$$Cp_{1,0} := 0$$

De (1,0)-vergelijkingen corresponderend met $G_{\mu\nu}$

```

> for i from 1 to 4 do print(eqns_G[1,0][i]) end do:

```

$$r \left(\frac{d}{dr} b_{1,0}(r) \right) + b_{1,0}(r) = 8 \pi G \rho_1(r)$$

$$\frac{b_{1,0}(r) + r \left(\frac{d}{dr} a_{1,0}(r) \right)}{r^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} r \left(\frac{d}{dr} a_{1,0}(r) + \frac{d}{dr} b_{1,0}(r) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} a_{1,0}(r) \right) \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} r \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dr} a_{1,0}(r) + \frac{d}{dr} b_{1,0}(r) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} a_{1,0}(r) \right) \right) = 0$$

De (1,0)-vergelijkingen corresponderend met $K_{\mu\nu}$. Er is eigenlijk nog een vierde vergelijking berekend, maar die is evenredig met de derde, net als hierboven.

```

> for i from 1 to 3 do print(convert(eqns_K[1,0][i]/
(alpha-1),parfrac,alpha)) end do:

```

$$-\frac{1}{2} \frac{2 \left(\frac{d}{dr} c_{1,0}(r) \right) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} c_{1,0}(r) \right)}{r} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} e_{1,0}(r) \right) + 4 \left(\frac{d}{dr} e_{1,0}(r) \right) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} c_{1,0}(r) \right) + \frac{d}{dr} d_{1,0}(r)}{(-1 + \alpha)^2 r} = 0$$

$$2 r \left(\frac{d}{dr} e_{1,0}(r) \right) + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} e_{1,0}(r) \right) + \frac{1}{2} r \left(\frac{d}{dr} c_{1,0}(r) \right) + e_{1,0}(r)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{r \left(\frac{d}{dr} d_{1,0}(r) \right) + 2 d_{1,0}(r)}{(-1 + \alpha)^2} = 0$$

De definitie van $m^{(1)}(r)$ geeft elegantere oplossingen. Merk op dat de oplossingen voor $a^{(1,0)}$ en $b^{(1,0)}$ zeer sterk lijken op de Schwarzschildoplossing.

```

> rho[1](r):=1/4/Pi/r^2*diff(m[1](r),r);
OPL[1,0]:=dsolve({op(eqns_G[1,0]),op(eqns_K[1,0])},{a[1,0]
(r),b[1,0](r),c[1,0](r),d[1,0](r),e[1,0](r)}):
OPL[1,0]:=subs({_C1=C[1],_C2=C[2],_C3=C[3],_C4=C[4]},OPL[1,
0]);

```

aant_int_cst:=4;

$$\rho_1(r) := \frac{1}{4} \frac{d}{dr} m_1(r)$$

$$OPL_{1,0} := \left\{ \begin{aligned} a_{1,0}(r) &= \int \frac{2 G m_1(r) - C_2}{r^2} dr + C_1, b_{1,0}(r) = -\frac{2 G m_1(r) - C_2}{r}, c_{1,0}(r) = C_3 \\ &+ \frac{C_4}{r}, d_{1,0}(r) = -\frac{(-1 + \alpha)^2 \left(-C_4 + r^2 \left(\frac{d}{dr} e_{1,0}(r) \right) + e_{1,0}(r) r \right)}{r}, e_{1,0}(r) \\ &= e_{1,0}(r) \end{aligned} \right\}$$

aant_int_cst:=4

Randvoorwaarden bepalen C_2 en C_4 .

$$b_{(0)}^{(1)}(0) \neq \infty \Leftrightarrow C_2 = 2 G m_1(0) = 0$$

$$c_{(0)}^{(1)}(0) \neq \infty \Leftrightarrow C_4 = 0$$

> OPL[1,0]:=subs({C[2]=0,C[4]=0},OPL[1,0]);

$$OPL_{1,0} := \left\{ \begin{aligned} a_{1,0}(r) &= \int \frac{2 G m_1(r)}{r^2} dr + C_1, b_{1,0}(r) = -\frac{2 G m_1(r)}{r}, c_{1,0}(r) = C_3, d_{1,0}(r) = \\ &-\frac{(-1 + \alpha)^2 \left(r^2 \left(\frac{d}{dr} e_{1,0}(r) \right) + e_{1,0}(r) r \right)}{r}, e_{1,0}(r) = e_{1,0}(r) \end{aligned} \right\}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} d_{(0)}^{(1)}(r) = -(\alpha - 1)^2 e_{(0)}^{(1)}(0)$$

> a[1,0]:=unapply(rhs(OPL[1,0][1]),r):
 b[1,0]:=unapply(rhs(OPL[1,0][2]),r):
 c[1,0]:=unapply(rhs(OPL[1,0][3]),r):
 d[1,0]:=unapply(rhs(OPL[1,0][4]),r):

▼ Zoek de oplossing tot op eerste orde in $\frac{1}{l^2}$

Berekening van $p^{(1,1)}(r)$ met het behoud van baryonische energie.

> rho:='rho':
 convert(eqns_p[1,1][1],parfrac,alpha);
 p[1,1]:=unapply(subs(_C1=Cp[1,1],rhs(dsolve(eqns_p[1,1],p[1,1](r))[1])),r);

$$\frac{d}{dr} p_{1,1}(r) + \frac{1}{3} \frac{\rho_1(r) r}{-1 + \alpha} = 0$$

$$p_{1,1} := r \rightarrow \left(-\frac{1}{3} \frac{\rho_1(r) r}{-1 + \alpha} \right) dr + C p_{1,1}$$

De (1,1)-vergelijkingen corresponderend met $G_{\mu\nu}$.

> rho[1](r):=1/4/Pi/r^2*diff(m[1](r),r):
 for i from 1 to 3 do print(convert(simplify(eqns_G[1,1][i]),parfrac,alpha)) end do:

$$-\frac{b_{1,1}(r) + r \left(\frac{d}{dr} b_{1,1}(r) \right)}{r^2} + \frac{1}{3} \frac{2 G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) - 3 C_1 - 6 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right)}{-1 + \alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} e_{1,0}(r) - \frac{1}{2} C_3 + \frac{1}{2} r \left(\frac{d}{dr} e_{1,0}(r) \right) \\
&+ \frac{1}{6} \frac{4 G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r - 9 C_1 r - 18 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) r + 6 G m_1(r)}{(-1 + \alpha) r} \\
\frac{b_{1,1}(r) + r \left(\frac{d}{dr} a_{1,1}(r) \right)}{r^2} + \frac{1}{3} \frac{-4 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) r + 2 G m_1(r) - 2 C_1 r}{(-1 + \alpha) r} = \\
&-\frac{1}{2} e_{1,0}(r) + \frac{1}{2} r \left(\frac{d}{dr} e_{1,0}(r) \right) + 8 G C p_{1,1} \pi - \frac{1}{2} C_3 \\
&+ \frac{1}{6} \frac{-3 C_1 r + 18 G m_1(r) - 6 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) r - 4 r G \left(\int \frac{d}{dr} \frac{m_1(r)}{r} dr \right)}{(-1 + \alpha) r} \\
\frac{1}{2} r \left(r \left(\frac{d^2}{dr^2} a_{1,1}(r) \right) + \frac{d}{dr} b_{1,1}(r) + \frac{d}{dr} a_{1,1}(r) \right) \\
&-\frac{1}{3} \frac{r \left(4 G m_1(r) + 4 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) r + G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r + 2 C_1 r \right)}{-1 + \alpha} = \frac{1}{2} r^2 \left(\right. \\
&-e_{1,0}(r) - r \left(\frac{d}{dr} e_{1,0}(r) \right) + 16 G C p_{1,1} \pi - C_3 \left. \right) \\
&-\frac{1}{6} \frac{r \left(3 C_1 r + 6 G m_1(r) + 6 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) r + 4 r G \left(\int \frac{d}{dr} \frac{m_1(r)}{r} dr \right) \right)}{-1 + \alpha}
\end{aligned}$$

Bereken de oplossing voor $a^{(1,1)}$, $b^{(1,1)}$ en $e^{(1,0)}$.

```

> OPL_G[1,1]:=simplify(dsolve({op(eqns_G[1,1])}, {a[1,1](r), b
[1,1](r), e[1,0](r)}));
OPL_G[1,1]:=subs({_C1=C[aant_int_cst+1], _C2=C
[aant_int_cst+2], _C3=C[aant_int_cst+3], _C4=C
[aant_int_cst+4]}, OPL_G[1,1]);
aant_int_cst:=aant_int_cst+4;
aant_int_cst:=8

```

```

> a[1,1]:=unapply(Combine(convert(simplify(value(Expand(rhs
(OPL_G[1,1][1]))), parfrac, alpha)), r);
b[1,1]:=unapply(Combine(convert(simplify(value(Expand(rhs
(OPL_G[1,1][2]))), parfrac, alpha)), r);
e[1,0]:=unapply(Combine(convert(simplify(value(Expand(rhs
(OPL_G[1,1][3]))), parfrac, alpha)), r);

```

$a_{1,1} := r \rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2}{3} \frac{1}{-1 + \alpha} \left(G \left(\frac{\int \left(\int \left(-\frac{3 \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right)}{r} \right) dr \right) r^2 dr}{r^2} + \frac{\int \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r^2 dr}{r^2} \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\int 6 r m_1(r) dr}{r^2} \right) \right) dr + \frac{1}{3} \frac{-r^3 C_3 - 3 C_5 + 12 r^3 G C p_{1,1} \pi + 3 C_6 r}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{1,1} := r \rightarrow & \frac{1}{6} \frac{1}{(-1+\alpha)r} \left(\int \left(\int \left(\frac{12G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right)}{r} dr \right) r^2 - 4G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 24rGm_1(r) \right) dr + \left(\int \left(-\frac{4G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right)}{r} \right) dr \right) r^3 + \left(\int \frac{8Gm_1(r)}{r^2} dr \right) r^3 \right. \\
& \left. + 8Gm_1(r)r^2 + r^3 C_1 \right) + \frac{1}{6} \frac{4C_7 - 6C_5 + r^3 C_3 - 3C_8 r^3}{r} \\
e_{1,0} := r \rightarrow & \int \left(-\frac{2m_1(r)G}{r^2(-1+\alpha)} \right) dr + \frac{1}{3} \frac{-C_7 + 3C_8 r^3}{r^3}
\end{aligned}$$

De (1,1)-vergelijkingen corresponderend met $K_{\mu\nu}$:

> for i from 1 to 3 do print(convert(simplify(value(eqns_K[1, 1][i]))/(alpha-1),parfrac,alpha)) end do:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{r \left(\frac{d^2}{dr^2} c_{1,1}(r) \right) + 2 \left(\frac{d}{dr} c_{1,1}(r) \right)}{r} + \frac{C_8}{-1+\alpha} \\
& -\frac{1}{3} \frac{G \left(4m_1(r) + \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r + 6r \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) \right)}{(-1+\alpha)^2 r} = -C_3 \\
& + \frac{-2G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) - C_1 - C_3}{-1+\alpha} \\
& \frac{1}{2} \frac{4 \left(\frac{d}{dr} e_{1,1}(r) \right) + 2r \left(\frac{d^2}{dr^2} e_{1,1}(r) \right) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} c_{1,1}(r) \right)}{r} \\
& + \frac{1}{9} \frac{4C_7 + 6C_8 r^3 - 3r^3 C_3}{(-1+\alpha)r^3} \\
& + \frac{1}{3} \frac{-G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r + 3 \left(\frac{d}{dr} d_{1,1}(r) \right) - 6Gm_1(r) - 4rG \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right)}{(-1+\alpha)^2 r} \\
& = \frac{1}{3} \frac{2C_7 + 3C_8 r^3}{r^3} + \frac{1}{3} \frac{2C_7 + 3C_8 r^3 - 6r^3 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right)}{(-1+\alpha)r^3} \\
& - \frac{2G \left(m_1(r) + r \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) \right)}{(-1+\alpha)^2 r} \\
& e_{1,1}(r) + 2r \left(\frac{d}{dr} e_{1,1}(r) \right) + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} e_{1,1}(r) \right) + \frac{1}{2} r \left(\frac{d}{dr} c_{1,1}(r) \right) \\
& + \frac{1}{9} \frac{-3r^3 C_3 - 2C_7 + 6C_8 r^3}{(-1+\alpha)r} + \frac{1}{6} \frac{1}{(-1+\alpha)^2} \left(-4rGm_1(r) \right. \\
& \left. - 2G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r^2 - 8r^2 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) + 6d_{1,1}(r) + 3r \left(\frac{d}{dr} d_{1,1}(r) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{-C_7 + 3 C_8 r^3}{r} + \frac{1}{3} \frac{-6 r^3 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) - C_7 + 3 C_8 r^3}{(-1 + \alpha) r}$$

$$- \frac{2 r^2 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right)}{(-1 + \alpha)^2}$$

Bereken de oplossing voor $c^{(1,1)}$ en $d^{(1,1)}$ in functie van $e^{(1,1)}$.

```
> simplify(dsolve({eqns_K[1,1][1],eqns_K[1,1][2],eqns_K[1,1][3]},{c[1,1](r),d[1,1](r),e[1,1](r)})):
OPL_K[1,1]:=subs({C1=C[aant_int_cst+1],C2=C[aant_int_cst+2],C3=C[aant_int_cst+3]},%):
aant_int_cst:=aant_int_cst+3;
warning, it is required that the numerator of the given ODE depends on the highest derivative. Returning NULL.
aant_int_cst := 11
```

```
> isolate(OPL_K[1,1][2],m[1]);
c[1,1]:=unapply(Combine(convert(simplify(value(Expand(rhs(OPL_K[1,1][1]))),parfrac,alpha)),r);
d[1,1]:=unapply(Combine((alpha-1)^2*convert(simplify(value(Expand(rhs(OPL_K[1,1][3]))),parfrac,alpha)),r);
```

0 = 0

$$c_{1,1} := r \rightarrow \left(-\frac{2}{3} \frac{G \left(\frac{\int \left(\int \frac{6 m_1(r)}{r^2} dr \right) r^2 dr}{r^2} + \frac{\int \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r^2 dr}{r^2} + \frac{\int 4 r m_1(r) dr}{r^2} \right)}{(-1 + \alpha)^2} \right)$$

$$dr + \frac{1}{3} \frac{\int \left(\int \frac{12 G m_1(r)}{r^2} dr \right) r^2 dr}{-1 + \alpha} + C_8 r^2 + C_3 r^2 + r^2 C_1$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{-3 C_9 + r^3 C_3 + 3 C_{10} r}{r}$$

$d_{1,1} := r$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{3} \frac{1}{(-1 + \alpha)^2 r} \left(\left(\int \left(\int \frac{6 m_1(r)}{r^2} dr \right) r^2 + \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r^2 + 4 r m_1(r) \right) dr \right.$$

$$\left. + \left(\int \left(-\frac{2 m_1(r)}{r^2} \right) dr \right) r^3 \right) G$$

$$- \frac{1}{6} \frac{6 e_{1,1}(r) r + r^3 C_3 + 6 r^2 \left(\frac{d}{dr} e_{1,1}(r) \right) + 6 C_9 - 3 C_8 r^3 + 4 C_7}{r}$$

$$+ \frac{1}{18} \frac{\int \left(\int \left(-\frac{72 G m_1(r)}{r^2} \right) dr \right) r^2 dr - 3 r^3 C_1 - 4 C_7}{(-1 + \alpha) r} \right) (-1 + \alpha)^2$$

▼ Bereken de oplossing tot op tweede orde in ε

▼ Zoek de oplossing tot op nulde orde in $\frac{1}{l^2}$

Berekening van $p^{(2,0)}(r)$ met het behoud van baryonische energie.

```
> rho:='rho';
eqns_p[2,0][1];
p[2,0]:=unapply(subs(_C1=Cp[2,0],rhs(dsolve(eqns_p[2,0],p
[2,0](r))[1])),r);
```

$$\frac{\rho_1(r) G m_1(r)}{r^2} + \frac{d}{dr} p_{2,0}(r) = 0$$

$$p_{2,0} := r \rightarrow \int \left(-\frac{\rho_1(r) G m_1(r)}{r^2} \right) dr + C p_{2,0}$$

De (2,0)-vergelijkingen corresponderend met $G_{\mu\nu}$

```
> rho[1](r):=1/4/Pi/r^2*diff(m[1](r),r):
eqns_G[2,0]:=simplify(eqns_G[2,0]):
for i from 1 to 3 do if i=i then print(isolate(eqns_G[2,0]
[i],m)) else print(eqns_G[2,0][i]) end if end do:
```

$$-\frac{b_{2,0}(r) + r \left(\frac{d}{dr} b_{2,0}(r) \right)}{r^2} = 0$$

$$-\frac{1}{r^4} \left(4 r G^2 m_1(r) \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) + 2 r G m_1(r) C_1 + 4 G^2 m_1(r)^2 - r^3 \left(\frac{d}{dr} a_{2,0}(r) \right) - r^2 b_{2,0}(r) \right) = -2 G \left(G \left(\int \frac{\left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) m_1(r)}{r^4} dr \right) - 4 C p_{2,0} \pi \right)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(-4 G^2 m_1(r)^2 + 6 G^2 m_1(r) \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r - r^3 \left(\frac{d}{dr} a_{2,0}(r) \right) - 4 r G^2 m_1(r) \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) - 2 r G m_1(r) C_1 + 4 G^2 r^2 \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) + 2 G r^2 \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) C_1 - r^4 \left(\frac{d^2}{dr^2} a_{2,0}(r) \right) - r^3 \left(\frac{d}{dr} b_{2,0}(r) \right) \right) = -2 r^2 G \left(G \left(\int \frac{\left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) m_1(r)}{r^4} dr \right) - 4 C p_{2,0} \pi \right)$$

Bereken de oplossing voor $a^{(2,0)}$ en $b^{(2,0)}$.

```
> OPL_G[2,0]:=dsolve({eqns_G[2,0][1],eqns_G[2,0][2],eqns_G[2,0]
[3]},{a[2,0](r),b[2,0](r)}):
OPL_G[2,0]:=subs({_C1=C[aant_int_cst+1],_C2=C[aant_int_cst+2],_C3=C[aant_int_cst+3]},OPL_G[2,0]):
aant_int_cst:=aant_int_cst+3;
aant_int_cst:=14
```

```
> a[2,0]:=unapply(rhs(OPL_G[2,0][1]),r);
b[2,0]:=unapply(rhs(OPL_G[2,0][2]),r);
```

$$a_{2,0} := r \rightarrow \int \frac{1}{r^3} \left(4 r G^2 m_1(r) \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) + 2 r G m_1(r) C_1 + 4 G^2 m_1(r)^2 - r C_{13} \right)$$

$$-2 G^2 r^4 \left(\int \frac{\left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) m_1(r)}{r^4} dr \right) + 8 G r^4 C_{p_{2,0}} \pi \int dr + C_{12}$$

$$b_{2,0} := r \rightarrow \frac{C_{13}}{r}$$

De (2,0)-vergelijkingen corresponderend met $K_{\mu\nu}$.

```
> eqns_K[2,0]:=simplify(eqns_K[2,0]):
for i from 1 to 3 do print(convert(eqns_K[2,0][i]/(alpha-1)
^2,parfrac,alpha)) end do:
```

$$\frac{1}{2} \frac{-r \left(\frac{d^2}{dr^2} c_{2,0}(r) \right) - 2 \left(\frac{d}{dr} c_{2,0}(r) \right)}{(-1 + \alpha) r} = 0$$

$$-\frac{1}{6} \frac{C_7 (24 C_8 r^3 + 7 C_7)}{r^8} + \frac{\frac{d}{dr} d_{2,0}(r)}{(-1 + \alpha)^3 r} + \frac{1}{6} \frac{1}{(-1 + \alpha) r^6} \left(48 r G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) C_7 \right.$$

$$- 10 r G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) C_7 + 24 C_7 G m_1(r) + 12 \left(\frac{d}{dr} e_{2,0}(r) \right) r^5$$

$$+ 6 r^6 \left(\frac{d^2}{dr^2} e_{2,0}(r) \right) + 3 r^6 \left(\frac{d^2}{dr^2} c_{2,0}(r) \right) - 24 C_8 r^4 G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) \left. \right)$$

$$+ \frac{2 G^2 \left(3 m_1(r) \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r + m_1(r)^2 + 4 r^2 \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) \right)}{(-1 + \alpha)^2 r^4} = 0$$

$$\frac{1}{18} \frac{-7 C_7^2 - 12 C_8 r^3 C_7 + 18 C_8^2 r^6}{r^6} + \frac{1}{2} \frac{r \left(\frac{d}{dr} d_{2,0}(r) \right) + 2 d_{2,0}(r)}{(-1 + \alpha)^3}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{1}{(-1 + \alpha) r^4} \left(2 C_7 G m_1(r) + 6 e_{2,0}(r) r^4 + 3 r^5 \left(\frac{d}{dr} c_{2,0}(r) \right) \right.$$

$$- 5 r G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) C_7 - 24 r^4 G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) C_8 - 12 C_8 r^4 G \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right)$$

$$+ 12 \left(\frac{d}{dr} e_{2,0}(r) \right) r^5 - 24 C_8 r^3 G m_1(r) + 3 r^6 \left(\frac{d^2}{dr^2} e_{2,0}(r) \right) + 8 r G \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2}$$

$$dr \right) C_7 \left. \right) + \frac{1}{(-1 + \alpha)^2 r^2} \left(G^2 \left(3 m_1(r) \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r + 4 m_1(r)^2 + 4 r^2 \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + 8 r \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right) m_1(r) + 4 r^2 \left(\int \frac{m_1(r)}{r^2} dr \right)^2 \right) \right) = 0$$

Bereken de oplossing voor $c^{(2,0)}$ en $d^{(2,0)}$ in functie van $e^{(2,0)}$.

```
> dsolve({eqns_K[2,0][1],eqns_K[2,0][2],eqns_K[2,0][3]},{d[2,0](r),c[2,0](r),e[2,0](r)}):
OPL_K[2,0]:=subs({_C1=C[aant_int_cst+1],_C2=C[aant_int_cst+2],_C3=C[aant_int_cst+3]},%):
aant_int_cst:=aant_int_cst+3;
```

Warning, it is required that the numerator of the given ODE depends on the highest derivative. Returning NULL.
Warning, it is required that the numerator of the given ODE depends on the highest derivative. Returning NULL.

aant_int_cst := 17

```
> isolate(OPL_K[2,0][2],m[1]);
c[2,0]:=unapply(rhs(OPL_K[2,0][1]),r);
```



```
d[2,0]:=unapply(Combine((alpha-1)^2*convert(simplify(value
(Expand(rhs(OPL_K[1,1][3])))))/(alpha-1)^2,parfrac,alpha)),
r);
```

$$0 = 0$$

$$e_{2,0} := r \rightarrow C_{15} + \frac{C_{16}}{r}$$

$$d_{2,0} := r$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(\frac{2}{3} \frac{1}{(-1 + \alpha)^2 r} \left(\left(\int \left(\int \left(\int \left(\frac{6 m_1(r)}{r^2} dr \right) r^2 + \left(\frac{d}{dr} m_1(r) \right) r^2 + 4 r m_1(r) \right) dr \right. \right. \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left(\int \left(-\frac{2 m_1(r)}{r^2} \right) dr \right) r^3 \right) G \right) \\ &- \frac{1}{6} \frac{6 e_{1,1}(r) r + r^3 C_3 + 6 r^2 \left(\frac{d}{dr} e_{1,1}(r) \right) + 6 C_9 - 3 C_8 r^3 + 4 C_7}{r} \\ &+ \frac{1}{18} \frac{\int \left(\int \left(\int \left(-\frac{72 G m_1(r)}{r^2} \right) dr \right) r^2 dr - 3 r^3 C_1 - 4 C_7 \right)}{(-1 + \alpha) r} \right) (-1 + \alpha)^2 \end{aligned}$$

Document A.9: Maple document dat de perturbatief berekende oplossing voor een massief scalair veld dat koppelt aan materie vergelijkt met de exacte oplossing om meer te weten te komen over de in de perturbatieve methode vrij gelaten integratieconstanten.

Exacte oplossing

De exacte oplossing van een massief scalair veld dat koppelt aan materie. Deze wordt tot slot ontwikkeld volgens m om een vergelijking mogelijk te maken met de perturbatieve oplossing.

> restart

> ODE := diff($\phi(r), r, r$) + $\frac{2}{r}$ diff($\phi(r), r$) - $m^2\phi(r) = 4 \pi G \rho(r)$;

$$ODE := \frac{d^2}{dr^2} \phi(r) + \frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) - m^2 \phi(r) = 4 \pi G \rho(r)$$

> $\phi_{in} := r \rightarrow c_1 \frac{\exp(-m r)}{r} + \frac{c_2 \exp(m r)}{r} - \frac{4 \pi G \rho_0}{m^2}$;

$\phi_{out} := r \rightarrow \frac{d_1 \exp(-m r)}{r} + \frac{d_2 \exp(m r)}{r}$;

$$\phi_{in} := r \rightarrow \frac{c_1 e^{-m r}}{r} + \frac{c_2 e^{m r}}{r} - \frac{4 \pi G \rho_0}{m^2}$$

$$\phi_{out} := r \rightarrow \frac{d_1 e^{-m r}}{r} + \frac{d_2 e^{m r}}{r}$$

Berekening van de integratieconstanten uit de randvoorwaarden.

> RVW := $\phi_{in}(r0) = \phi_{out}(r0)$, $D(\phi_{in})(r0) = D(\phi_{out})(r0)$, $op([2, 1], \text{limit}(D(\phi_{in})(r), r = 0)) = 0$

$$RVW := \frac{c_1 e^{-m r0}}{r0} + \frac{c_2 e^{m r0}}{r0} - \frac{4 \pi G \rho_0}{m^2} = \frac{d_1 e^{-m r0}}{r0} + \frac{d_2 e^{m r0}}{r0}, -\frac{c_1 m e^{-m r0}}{r0} - \frac{c_1 e^{-m r0}}{r0^2} + \frac{c_2 m e^{m r0}}{r0} - \frac{c_2 e^{m r0}}{r0^2} = -\frac{d_1 m e^{-m r0}}{r0} - \frac{d_1 e^{-m r0}}{r0^2} + \frac{d_2 m e^{m r0}}{r0} - \frac{d_2 e^{m r0}}{r0^2}, c_1 + c_2 = 0$$

> opl := solve({RVW}, {c1, c2, d1});

$c_1 := \text{expand}(\text{rhs}(\text{opl}[1]))$;

$c_2 := \text{expand}(\text{rhs}(\text{opl}[2]))$;

$d_1 := \text{expand}(\text{rhs}(\text{opl}[3]))$;

$$opl := \left\{ c_1 = -\frac{d_2 m^3 e^{m r0} + 2 m \pi G \rho_0 r0 + 2 \pi G \rho_0}{m^3 e^{m r0}}, c_2 \right.$$

$$= \frac{d_2 m^3 e^{m r0} + 2 m \pi G \rho_0 r0 + 2 \pi G \rho_0}{m^3 e^{m r0}}, d_1 =$$

$$-\frac{1}{e^{-m r0} m^3 e^{m r0}} \left(2 e^{m r0} m \pi G \rho_0 r0 - 2 e^{m r0} \pi G \rho_0 + e^{-m r0} d_2 m^3 e^{m r0} + 2 e^{-m r0} m \pi G \rho_0 r0 + 2 e^{-m r0} \pi G \rho_0 \right)$$

$$c_1 := -d_2 - \frac{2 \pi G \rho_0 r0}{m^2 e^{m r0}} - \frac{2 \pi G \rho_0}{m^3 e^{m r0}}$$

$$c_2 := d_2 + \frac{2 \pi G \rho_0 r0}{m^2 e^{m r0}} + \frac{2 \pi G \rho_0}{m^3 e^{m r0}}$$

$$d_1 := -\frac{2 e^{m r0} \pi G \rho_0 r0}{m^2} + \frac{2 e^{m r0} \pi G \rho_0}{m^3} - d_2 - \frac{2 \pi G \rho_0 r0}{m^2 e^{m r0}} - \frac{2 \pi G \rho_0}{m^3 e^{m r0}}$$

> limit(expand(simplify($\phi_{out}(r)$)), $r = \infty$) = 0;

$$d_2 := 0;$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{2 e^{m r_0} \pi G \rho_0 r_0}{m^2 r e^{m r}} + \frac{2 e^{m r_0} \pi G \rho_0}{m^3 r e^{m r}} - \frac{d_2}{r e^{m r}} - \frac{2 \pi G \rho_0 r_0}{m^2 r e^{m r} e^{m r_0}} - \frac{2 \pi G \rho_0}{m^3 r e^{m r} e^{m r_0}} + \frac{d_2 e^{m r}}{r} \right) = 0$$

$$d_2 := 0$$

Ontwikkeling volgens m ter vergelijking met de perturbatieve oplossing.

$$\begin{aligned} &> \text{expand}(\text{series}(\phi_{\text{in}}(r), m, 8)); \\ &\frac{2}{3} \pi G \rho_0 r^2 - 2 r_0^2 \pi G \rho_0 + \frac{4}{3} r_0^3 \pi G \rho_0 m + \left(-\frac{1}{3} r_0^2 \pi G \rho_0 r^2 - \frac{1}{2} r_0^4 \pi G \rho_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{30} \pi G \rho_0 r^4 \right) m^2 + \left(\frac{2}{9} r_0^3 \pi G \rho_0 r^2 + \frac{2}{15} r_0^5 \pi G \rho_0 \right) m^3 + \left(\frac{1}{1260} \pi G \rho_0 r^6 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} r_0^4 \pi G \rho_0 r^2 - \frac{1}{36} r_0^6 \pi G \rho_0 - \frac{1}{60} r_0^2 \pi G \rho_0 r^4 \right) m^4 + O(m^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &> \text{expand}(\text{series}(\phi_{\text{out}}(r), m, 8)); \\ &-\frac{4}{3} \frac{r_0^3 \pi G \rho_0}{r} + \frac{4}{3} r_0^3 \pi G \rho_0 m + \left(-\frac{2}{3} r_0^3 \pi G \rho_0 r - \frac{2}{15} \frac{r_0^5 \pi G \rho_0}{r} \right) m^2 \\ &\quad + \left(\frac{2}{9} r_0^3 \pi G \rho_0 r^2 + \frac{2}{15} r_0^5 \pi G \rho_0 \right) m^3 + \left(-\frac{1}{18} r_0^3 \pi G \rho_0 r^3 - \frac{1}{15} r_0^5 \pi G \rho_0 r \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{210} \frac{r_0^7 \pi G \rho_0}{r} \right) m^4 + O(m^5) \end{aligned}$$

▼ Perturbatieve oplossing tot op eerste orde in m^2

> restart

Opsplitsing van de nulde orde differentiaalvergelijking in het geval voor $r < r_0$ en dat voor $r > r_0$.

> $\rho := r \rightarrow \rho_0;$

$$\rho := r \rightarrow \rho_0$$

> ODE1 := $\text{diff}(\phi_{\text{in}}(r), r, r) + \frac{2}{r} \text{diff}(\phi_{\text{in}}(r), r) = 4 \pi G \rho(r)$

$$\text{ODE1} := \frac{d^2}{dr^2} \phi_{\text{in}}(r) + \frac{2 \left(\frac{d}{dr} \phi_{\text{in}}(r) \right)}{r} = 4 \pi G \rho_0$$

> $\rho := r \rightarrow 0;$

$$\rho := r \rightarrow 0$$

> ODE2 := $\text{diff}(\phi_{\text{out}}(r), r, r) + \frac{2}{r} \text{diff}(\phi_{\text{out}}(r), r) = 4 \pi G \rho(r)$

$$\text{ODE2} := \frac{d^2}{dr^2} \phi_{\text{out}}(r) + \frac{2 \left(\frac{d}{dr} \phi_{\text{out}}(r) \right)}{r} = 0$$

> $\text{sol} := \text{dsolve}(\{ \text{ODE1}, \text{ODE2} \}, \{ \phi_{\text{in}}(r), \phi_{\text{out}}(r) \});$

$\phi_{\text{in}} := \text{unapply}(\text{rhs}(\text{sol}[1]), r);$

$\phi_{\text{out}} := \text{unapply}(\text{rhs}(\text{sol}[2]), r);$

$$\text{sol} := \left\{ \phi_{\text{in}}(r) = \frac{1}{3} \frac{2 \pi G \rho_0 r^3 - 3 _C1 + 3 _C2 r}{r}, \phi_{\text{out}}(r) = _C3 + \frac{_C4}{r} \right\}$$

$$\phi_{in} := r \rightarrow \frac{1}{3} \frac{2 \pi G \rho_0 r^3 - 3 _C1 + 3 _C2 r}{r}$$

$$\phi_{out} := r \rightarrow _C3 + \frac{C4}{r}$$

Berekening van de integratieconstanten uit de randvoorwaarden. $_C3$ blijft vrij.

> $R\dot{V}W := \phi_{in}(r0) = \phi_{out}(r0), D(\phi_{in})(r0) = D(\phi_{out})(r0), op([1, 1],$
 $limit(D(\phi_{in})(r), r = 0) = 0;$

$$R\dot{V}W := \frac{1}{3} \frac{2 \pi G \rho_0 r0^3 - 3 _C1 + 3 _C2 r0}{r0} = _C3 + \frac{C4}{r0}, \frac{1}{3} \frac{6 \pi G \rho_0 r0^2 + 3 _C2}{r0}$$

$$- \frac{1}{3} \frac{2 \pi G \rho_0 r0^3 - 3 _C1 + 3 _C2 r0}{r0^2} = - \frac{C4}{r0^2}, _C1 = 0$$

> $opl := solve(\{R\dot{V}W\}, \{_C1, _C2, _C3, _C4\});$

$$opl := \left\{ _C1 = 0, _C2 = _C3 - 2 \pi G \rho_0 r0^2, _C3 = _C3, _C4 = - \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r0^3 \right\}$$

> $sol := subs(opl, sol);$

$$\phi_{in} := unapply(rhs(sol[1]), r);$$

$$\phi_{out} := unapply(rhs(sol[2]), r);$$

$$sol := \left\{ \frac{1}{3} \frac{2 \pi G \rho_0 r^3 + 3 (_C3 - 2 \pi G \rho_0 r0^2) r}{r} \right.$$

$$= \frac{1}{3} \frac{2 \pi G \rho_0 r^3 + 3 (_C3 - 2 \pi G \rho_0 r0^2) r}{r}, _C3 - \frac{4}{3} \frac{\pi G \rho_0 r0^3}{r} = _C3$$

$$\left. - \frac{4}{3} \frac{\pi G \rho_0 r0^3}{r} \right\}$$

$$\phi_{in} := r \rightarrow \frac{1}{3} \frac{2 \pi G \rho_0 r^3 + 3 (_C3 - 2 \pi G \rho_0 r0^2) r}{r}$$

$$\phi_{out} := r \rightarrow _C3 - \frac{4}{3} \frac{\pi G \rho_0 r0^3}{r}$$

Opsplitsing van de eerste orde differentiaalvergelijking in het geval voor $r < r_0$ en dat voor $r > r_0$.

> $ODE1 := diff(\phi_{in}(r), r, r) + \frac{2}{r} diff(\phi_{in}(r), r) - \phi_{in}(r) = 0$

$$ODE1 := \frac{d^2}{dr^2} \phi_{in}(r) + \frac{2 \left(\frac{d}{dr} \phi_{in}(r) \right)}{r} - \frac{1}{3} \frac{2 \pi G \rho_0 r^3 + 3 (_C3 - 2 \pi G \rho_0 r0^2) r}{r} = 0$$

> $ODE2 := diff(\phi_{out}(r), r, r) + \frac{2}{r} diff(\phi_{out}(r), r) - \phi_{out}(r) = 0$

$$ODE2 := \frac{d^2}{dr^2} \phi_{out}(r) + \frac{2 \left(\frac{d}{dr} \phi_{out}(r) \right)}{r} - _C3 + \frac{4}{3} \frac{\pi G \rho_0 r0^3}{r} = 0$$

> $sol := dsolve(\{ODE1, ODE2\}, \{\phi_{in}(r), \phi_{out}(r)\});$

$$\phi_{in} := unapply(rhs(sol[1]), r);$$

$$\phi_{out} := unapply(rhs(sol[2]), r);$$

$$sol := \left\{ \phi_{in}(r) = \frac{1}{30} \frac{\pi G \rho_0 r^5 - 10 r^3 \pi G \rho_0 r0^2 + 5 r^3 _C3 - 30 _C4 + 30 _C5 r}{r}, \phi_{out}(r) = \right.$$

$$-\frac{1}{6} \frac{-r^3 _C3 + 6 _C6 + 4 \pi G \rho_0 r^3 r^2 - 6 _C7 r}{r}$$

$$\phi I_{in} := r \rightarrow \frac{1}{30} \frac{\pi G \rho_0 r^5 - 10 r^3 \pi G \rho_0 r^2 + 5 r^3 _C3 - 30 _C4 + 30 _C5 r}{r}$$

$$\phi I_{out} := r \rightarrow -\frac{1}{6} \frac{-r^3 _C3 + 6 _C6 + 4 \pi G \rho_0 r^3 r^2 - 6 _C7 r}{r}$$

Berekening van de integratieconstanten uit de randvoorwaarden. $_C7$ blijft vrij.

> $R VW := \phi I_{in}(r0) = \phi I_{out}(r0)$, $D(\phi I_{in})(r0) = D(\phi I_{out})(r0)$, $op([1, 1]$,
 $limit(D(\phi I_{in})(r), r = 0)) = 0$;

$$R VW := \frac{1}{30} \frac{-9 \pi G \rho_0 r0^5 + 5 r0^3 _C3 - 30 _C4 + 30 _C5 r0}{r0} =$$

$$-\frac{1}{6} \frac{-r0^3 _C3 + 6 _C6 + 4 \pi G \rho_0 r0^5 - 6 _C7 r0}{r0},$$

$$\frac{1}{30} \frac{-25 \pi G \rho_0 r0^4 + 15 r0^2 _C3 + 30 _C5}{r0}$$

$$-\frac{1}{30} \frac{-9 \pi G \rho_0 r0^5 + 5 r0^3 _C3 - 30 _C4 + 30 _C5 r0}{r0^2} =$$

$$-\frac{1}{6} \frac{-3 r0^2 _C3 + 8 \pi G \rho_0 r0^4 - 6 _C7}{r0}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{-r0^3 _C3 + 6 _C6 + 4 \pi G \rho_0 r0^5 - 6 _C7 r0}{r0^2}, _C4 = 0$$

> $opl := solve(\{R VW\}, \{_C3, _C4, _C5, _C6, _C7\})$;

$$opl := \left\{ _C3 = _C3, _C4 = 0, _C5 = _C7 - \frac{1}{2} \pi G \rho_0 r0^4, _C6 = \frac{2}{15} \pi G \rho_0 r0^5, _C7 = _C7 \right\}$$

> $\phi I_{in} := unapply(subs(opl, \phi I_{in}(r)), r)$;

$\phi I_{out} := unapply(subs(opl, \phi I_{out}(r)), r)$;

$$\phi I_{in} := r \rightarrow \frac{1}{30} \frac{\pi G \rho_0 r^5 - 10 r^3 \pi G \rho_0 r^2 + 5 r^3 _C3 + 30 \left(_C7 - \frac{1}{2} \pi G \rho_0 r^4 \right) r}{r}$$

$$\phi I_{out} := r \rightarrow -\frac{1}{6} \frac{-r^3 _C3 + \frac{4}{5} \pi G \rho_0 r^5 + 4 \pi G \rho_0 r^3 r^2 - 6 _C7 r}{r}$$

De gevonden oplossingen tot op eerste orde in m^2 . Vergelijking met de hierboven ontwikkelde exacte oplossing levert de exacte waarden voor $_C3$ en $_C7$ die niet konden worden bepaald met de perturbatieve methode. Ze blijken van de orde m te zijn.

> $expand(simplify(\phi I_{in}(r) + m^2 \phi I_{in}(r) + m^4 \phi I_{in}(r)))$;

$$series\left(expand\left(simplify\left(subs\left(\left\{ _C3 = \frac{4}{3} G \pi r_0^3 \rho_0 m, _C7 = \frac{2}{15} r_0^5 \pi G \rho_0 m \right\}, \%\right)\right)\right), m,$$

$$4\right);$$

$$\frac{2}{3} \pi G \rho_0 r^2 + _C3 - 2 \pi G \rho_0 r^2 + \frac{1}{30} m^2 \pi G \rho_0 r^4 - \frac{1}{3} m^2 r^2 \pi G \rho_0 r^2 + \frac{1}{6} m^2 r^2 _C3$$

$$+ m^2 _C7 - \frac{1}{2} m^2 \pi G \rho_0 r^4 + m^4 \phi I_{in}(r)$$

$$\frac{2}{3} \pi G \rho_0 r^2 - 2 \pi G \rho_0 r^2 + \frac{4}{3} G \pi r_0^3 \rho_0 m + \left(\frac{1}{30} \pi G \rho_0 r^4 - \frac{1}{3} r^2 \pi G \rho_0 r^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \pi G \rho_0 r \theta^4 \Big) m^2 + \left(\frac{2}{9} r^2 G \pi r_0^3 \rho_0 + \frac{2}{15} r_0^5 \pi G \rho_0 \right) m^3 + O(m^4) \\
& \text{> expand(simplify(} \phi_{out}(r) + m^2 \phi_{out}(r) + m^4 \phi_{out}(r) \Big)); \\
& \text{series(expand(simplify(subs(\{ -C3 = } \frac{4}{3} G \pi r_0^3 \rho_0 m, -C7 = } \frac{2}{15} r_0^5 \pi G \rho_0 m \Big\}, \% \Big) \Big)), m, \\
& \quad 4); \\
& -C3 - \frac{4}{3} \frac{\pi G \rho_0 r \theta^3}{r} + \frac{1}{6} m^2 r^2 -C3 - \frac{2}{15} \frac{m^2 \pi G \rho_0 r \theta^5}{r} - \frac{2}{3} r m^2 \pi G \rho_0 r \theta^3 + m^2 -C7 \\
& \quad + m^4 \phi_{out}(r) \\
& -\frac{4}{3} \frac{\pi G \rho_0 r \theta^3}{r} + \frac{4}{3} G \pi r_0^3 \rho_0 m + \left(-\frac{2}{15} \frac{\pi G \rho_0 r \theta^5}{r} - \frac{2}{3} \pi G \rho_0 r \theta^3 r \right) m^2 + \left(\frac{2}{9} r^2 G \pi \right. \\
& \quad \left. r_0^3 \rho_0 + \frac{2}{15} r_0^5 \pi G \rho_0 \right) m^3 + O(m^4) \\
& \text{>}
\end{aligned}$$

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> with(PDEtools):
> read "Procedures":
```

► Begincondities

► Voorbereiding

► Opstellen van de op te lossen vergelijkingen

► Berekenen van de randvoorwaarden van de verschillende op te lossen stelsels

Hieronder de bepaling van de randvoorwaarden die er voor zorgen dat er, bij het gebruik van een stuksgewijze functie als massaverdeling, geen Dirac- δ -distributies (en afgeleiden) te voorschijn komen. Om de oplossingen te vinden schrijven we namelijk elke functie, $f^{(i,j)}$ ook als een stuksgewijze functie: $f^{(i,j)}(r) = f_s^{(i,j)}(r) H(r_0 - r) + f_b^{(i,j)}(r) H(r - r_0)$. Om de hierdoor verschijnende distributies weg te werken, worden de coëfficiënten van $\delta(r - r_0)$ en $\delta'(r - r_0)$ nul gesteld in r_0 . Dit komt er op neer dat alle correcties goed moeten gedefinieerd zijn in r_0 ($f_s^{(i,j)}(r_0) = f_b^{(i,j)}(r_0)$) en ook een aantal

afgeleiden van correcties moeten dat zijn in r_0 ($\frac{df_s^{(i,j)}}{dr}(r_0) = \frac{df_b^{(i,j)}}{dr}(r_0)$). De uitdrukkingen voor $f_s^{(i,j)}(r)$ en $f_b^{(i,j)}(r)$ die hiervoor nodig zijn, zijn te vinden door de (i,j) -vergelijkingen op te lossen voor $r < r_0$ en $r > r_0$ afzonderlijk.

```
> assume(rho0>0,0<r_s,r_s<r0,r0<r,b):
rho[i](r)=piecewise(r<r0,rho0,r>r0,0);
```

$$\rho_1(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < r_0 \\ 0 & r_0 < r \end{cases}$$

```
> for i from 1 to 2 do
  for j from 0 to 2 do
    a:=a': b:=b': c:=c': d:=d': e:=e': p:=p':
    a[i,j]:=r->a_s[i,j](r)*Heaviside(r0-r)+a_b[i,j](r)*Heaviside(r-r0):
    b[i,j]:=r->b_s[i,j](r)*Heaviside(r0-r)+b_b[i,j](r)*Heaviside(r-r0):
    c[i,j]:=r->c_s[i,j](r)*Heaviside(r0-r)+c_b[i,j](r)*Heaviside(r-r0):
    d[i,j]:=r->d_s[i,j](r)*Heaviside(r0-r)+d_b[i,j](r)*Heaviside(r-r0):
    e[i,j]:=r->e_s[i,j](r)*Heaviside(r0-r)+e_b[i,j](r)*Heaviside(r-r0):
    p[i,j]:=r->p_s[i,j](r)*Heaviside(r0-r)+p_b[i,j](r)*Heaviside(r-r0):
    isolate(egns G[i,j][1],Dirac(r0-r)):
    RVW G[i,j]:=Eval(factor(denom(rhs(%))),r=r0)=0:
    isolate(egns G[i,j][2],Dirac(r0-r)):
    Eval(factor(denom(rhs(%))),r=r0)=0:
```

```

RVW_G[i,j]:=RVW_G[i,j],%
isolate(eqns_G[i,j][3],Dirac(r0-r));
Eval(factor(denom(rhs(%)),r=r0)=0;
RVW_G[i,j]:=RVW_G[i,j],%
isolate(eqns_G[i,j][3],Dirac(1,r0-r));
Eval(factor(denom(rhs(%)),r=r0)=0;
RVW_G[i,j]:=RVW_G[i,j],%
isolate(eqns_K[i,j][1],Dirac(r0-r));
RVW_K[i,j]:=Eval(factor(denom(rhs(%)),r=r0)=0;
isolate(eqns_K[i,j][2],Dirac(r0-r));
Eval(factor(denom(rhs(%)),r=r0)=0;
RVW_K[i,j]:=RVW_K[i,j],%
isolate(eqns_K[i,j][3],Dirac(r0-r));
Eval(factor(denom(rhs(%)),r=r0)=0;
RVW_K[i,j]:=RVW_K[i,j],%
isolate(eqns_K[i,j][1],Dirac(1,r0-r));
Eval(factor(denom(rhs(%)),r=r0)=0;
RVW_K[i,j]:=RVW_K[i,j],%
isolate(eqns_K[i,j][2],Dirac(1,r0-r));
Eval(factor(denom(rhs(%)),r=r0)=0;
RVW_K[i,j]:=RVW_K[i,j],%
isolate(eqns_K[i,j][3],Dirac(1,r0-r));
Eval(factor(denom(rhs(%)),r=r0)=0;
RVW_K[i,j]:=RVW_K[i,j],%
end do;
end do;

```

Als voorbeeld de randvoorwaarden voor de (1,0)-vergelijkingen:

```

> for i from 1 to 4 do print(RVW_G[1,0][i]) end do;
(r(b_{-s_{1,0}}(r) - b_{-1,0}(r))) |_{r=r0} = 0
(r(a_{-s_{1,0}}(r) - a_{-1,0}(r))) |_{r=r0} = 0
(b_{-s_{1,0}}(r) - b_{-1,0}(r) + 2 r (d/d r a_{-s_{1,0}}(r) - 2 r (d/d r a_{-1,0}(r) + a_{-s_{1,0}}(r) - a_{-1,0}(r))) |_{r=r0} = 0
(r(a_{-s_{1,0}}(r) - a_{-1,0}(r))) |_{r=r0} = 0

```

```

> for i from 1 to 6 do print(Eval(sort((alpha-1)^2*convert(simplify(op([1,1],RVW_K[1,0][i])))/
(alpha-1)^2,parfrac,alpha),r=r0)=0) end do;
((alpha-1) (-2 r (d/d r c_{-b_{1,0}}(r) + 2 r (d/d r c_{-s_{1,0}}(r) - 2 c_{-b_{1,0}}(r) + 2 c_{-s_{1,0}}(r))) |_{r=r0} = 0

```


$$\begin{aligned}
& 1 \left((\alpha - 1)^2 \left(-2r \left(\frac{d}{dr} c_{-1,0}(r) \right) + 2r \left(\frac{d}{dr} c_{-s_{1,0}}(r) \right) - 4r \left(\frac{d}{dr} e_{-1,0}(r) \right) + 4r \left(\frac{d}{dr} e_{-s_{1,0}}(r) \right) - 4e_{-1,0}(r) + 4e_{-s_{1,0}}(r) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{-2d_{-1,0}(r) + 2d_{-s_{1,0}}(r)}{(\alpha - 1)^2} \right) \Bigg|_{r=r_0} = 0 \\
& 1 \left((\alpha - 1)^2 \left(-2r \left(\frac{d}{dr} e_{-1,0}(r) \right) + 2r \left(\frac{d}{dr} e_{-s_{1,0}}(r) \right) - c_{-1,0}(r) + c_{-s_{1,0}}(r) - 4e_{-1,0}(r) + 4e_{-s_{1,0}}(r) \right) r \right. \\
& \quad \left. + \frac{(-d_{-1,0}(r) + d_{-s_{1,0}}(r))r}{(\alpha - 1)^2} \right) \Bigg|_{r=r_0} = 0 \\
& \quad \left((\alpha - 1) (-c_{-1,0}(r) + c_{-s_{1,0}}(r)) r \right) \Bigg|_{r=r_0} = 0 \\
& \left((\alpha - 1)^2 (-c_{-1,0}(r) + c_{-s_{1,0}}(r) - 2e_{-1,0}(r) + 2e_{-s_{1,0}}(r)) r \right) \Bigg|_{r=r_0} = 0 \\
& \left((\alpha - 1)^2 (-e_{-1,0}(r) + e_{-s_{1,0}}(r)) r^2 \right) \Bigg|_{r=r_0} = 0
\end{aligned}$$

Ook om behoud van baryonische energie te bekomen moeten de coëfficiënten van de distributies nul zijn in r_0 .

```

> a:='a': b:='b': c:='c': d:='d': e:='e': p:='p':
p_1:=r->p_1 s(r)*Heaviside(r0-r)+p_1 b(x)*Heaviside(r-r0):
isolate(EQNS_p[1],Dirac(r0-r)):
RVW_p:=Eval(factor(denom(rhs(%))),r=r0)=0;
p_1:='p_1':
p_2:=r->p_2 s(r)*Heaviside(r0-r)+p_2 b(x)*Heaviside(r-r0):
isolate(EQNS_p[2],Dirac(r0-r)):
Eval(factor(denom(rhs(%))),r=r0)=0;
RVW_p:=RVW_p,%:
p_2:='p_2':

```

$$\begin{aligned}
RVW_p & := \left((\alpha - 1) \left(-3 + 3\alpha + r^2 \left(\frac{1}{l} \right)^2 \right) (p_{-1s}(r) - p_{-1b}(r)) \right) \Bigg|_{r=r_0} = 0 \\
& \left(2(\alpha - 1)^4 \left(-3 + 3\alpha + r^2 \left(\frac{1}{l} \right)^2 \right)^5 (p_{-2s}(r) - p_{-2b}(r)) \right) \Bigg|_{r=r_0} = 0
\end{aligned}$$

Bepaal $p(r)$ met behulp van behoud van baryonische energie

Bepaling van $p^{(1)}(r)$

```
> rho[1]:=r->piecewise(r<r0,rho0,r>r0,0):
```

$p^{(1)}(r)$ is voor een compacte massa exact te bepalen. De oplossing is echter afhankelijk van $\frac{1}{l^2}$, wat betekent dat we $p^{(1)}$ zullen moeten ontwikkelen

rond $\frac{1}{l^2}$ om de afzonderlijke termen te kunnen gebruiken bij het oplossen van de stelsels.

```
> p_1:=r->p_1_s(r)*Heaviside(r0-r)+p_1_b(r)*Heaviside(r-r0):
> EQNS_p_s[1]:=eval(EQNS_p[1],r=r_s):
> EQNS_p_b[1]:=eval(EQNS_p[1],r=r_b):
> p_1_s:=unapply(subs(_C1=Cp_s[1],rhs(dsolve(EQNS_p_s[1],p_1_s(r_s))))),r_s);
> p_1_b:=unapply(subs(_C1=Cp_b[1],rhs(dsolve(EQNS_p_b[1],p_1_b(r_b))))),r_b);
```

$$p_{1_s} := r_s \rightarrow -\rho 0 + \frac{Cp_{s1}}{\sqrt{3\alpha - 3 + r_s^2 \left(\frac{1}{l}\right)^2}}$$

$$p_{1_b} := r_b \rightarrow \frac{Cp_{b1}}{\sqrt{3\alpha - 3 + r_b^2 \left(\frac{1}{l}\right)^2}}$$

Bepaal één van de twee constanten aan de hand van de randvoorwaarde $p_s^{(1)}(r_0) = p_b^{(1)}(r_0)$.

```
> value(RVW_p[1]);
> Cp_s[1]:=solve(%,Cp_s[1]);
```

$$(\alpha - 1) \left(-3 + 3\alpha + r_0^2 \left(\frac{1}{l} \right)^2 \right) \left(-\rho 0 + \frac{Cp_{s1}}{\sqrt{-3 + 3\alpha + r_0^2 \left(\frac{1}{l} \right)^2}} - \frac{Cp_{b1}}{\sqrt{-3 + 3\alpha + r_0^2 \left(\frac{1}{l} \right)^2}} \right) = 0$$

$$Cp_{s1} := \rho 0 \sqrt{-3 + 3\alpha + r_0^2 \left(\frac{1}{l} \right)^2} + Cp_{b1}$$

Buiten de compacte massa mag er geen baryonische druk te voelen zijn. Daarom moet $p_b^{(1)}(r) = 0$ en dus ook $p_b^{(1)}(r_0) = 0$.

```
> p_1_b(r0)=0;
> Cp_b[1]:=solve(%,Cp_b[1]);
```

$$\frac{Cp_b1}{\sqrt{-3+3\alpha+r0^2\left(\frac{1}{T}\right)^2}}=0$$

$$Cp_b1:=0$$

```
> p_s[1,0]:=unapply(coeff(series(p_1_s(r), inv_1), inv_1, 0), r);
p_b[1,0]:=r->0;
p_s[1,1]:=unapply(coeff(series(p_1_s(r), inv_1), inv_1, 2), r);
p_b[1,1]:=r->0;
p_s[1,2]:=unapply(coeff(series(p_1_s(r), inv_1), inv_1, 4), r);
p_b[1,2]:=r->0;
```

$$p_{-s,0}:=r\rightarrow 0$$

$$p_{-b,0}:=r\rightarrow 0$$

$$p_{-s,1}:=r\rightarrow \frac{1}{2} \frac{\rho 0 r 0^2}{-3+3 \alpha}-\frac{1}{2} \frac{r^2 \rho 0}{-3+3 \alpha}$$

$$p_{-b,1}:=r\rightarrow 0$$

$$p_{-s,2}:=r\rightarrow -\frac{1}{8} \frac{\rho 0 r 0^4}{(-3+3 \alpha)^2}+\frac{3}{8} \frac{r^4 \rho 0}{(-3+3 \alpha)^2}-\frac{1}{4} \frac{r^2 \rho 0 r 0^2}{(-3+3 \alpha)^2}$$

$$p_{-b,2}:=r\rightarrow 0$$

Bepaling van $p^{(2)}(r)$

```
> p_2:=r->p_2_s(r)*Heaviside(r0-r)+p_2_b(r)*Heaviside(r-r0);
> EONS_p_s[2]:=eval(EONS_p[2],r=r_s);
> EONS_p_b[2]:=eval(EONS_p[2],r=r_b);
```

Ook de exacte uitdrukking voor $p^{(2)}(r)$ moet ontwikkeld worden volgens $\frac{1}{l^2}$, maar wegens de $a^{(1)}$ -afhankelijkheid, kan dit pas gebeuren na het

bepalen van $a^{(1)}(r)$.

```
> p_2_s:=unapply(subs(_C1=Cp_s[2], rhs(dsolve(EONS_p_s[2], p_2_s(r_s))))), r_s);
> p_2_b:=unapply(subs(_C1=Cp_b[2], rhs(dsolve(EONS_p_b[2], p_2_b(r_b))))), r_b);
```

$$p_{-2_s}:=r_s \rightarrow \frac{Cp_{-s_2}}{\sqrt{3\alpha-3+r_{-s}^2\left(\frac{1}{T}\right)^2}}-\frac{3}{2} \frac{\sqrt{-3+3\alpha+r0^2\left(\frac{1}{T}\right)^2}}{\left(3\alpha-3+r_{-s}^2\left(\frac{1}{T}\right)^2\right)^{3/2}} \rho 0(\alpha-1)\left(a_{1,0}(r_s)+\left(\frac{1}{T}\right)^2 a_{1,1}(r_s)+\left(\frac{1}{T}\right)^4 a_{1,2}(r_s)\right)$$

```

> simplify(value(RVW_p[2])) :
Cp_s[2] := solve(%, Cp_s[2]);
Cp_s2 := 1/2 * 1/(-3 + 3*alpha + r0^2 * (1/T)^2) * (3 * sqrt(-3 + 3*alpha + r0^2 * (1/T)^2) * rho0 * alpha * a1,0(r0) + 3 * sqrt(-3 + 3*alpha + r0^2 * (1/T)^2) * rho0 * alpha * (1/T)^2 * a1,1(r0)
+ 3 * sqrt(-3 + 3*alpha + r0^2 * (1/T)^2) * rho0 * alpha * (1/T)^4 * a1,2(r0) - 3 * sqrt(-3 + 3*alpha + r0^2 * (1/T)^2) * rho0 * a1,0(r0)
- 3 * sqrt(-3 + 3*alpha + r0^2 * (1/T)^2) * rho0 * (1/T)^2 * a1,1(r0) - 3 * sqrt(-3 + 3*alpha + r0^2 * (1/T)^2) * rho0 * (1/T)^4 * a1,2(r0) - 6 * Cp_b2 + 6 * Cp_b2 * alpha
+ 2 * Cp_b2 * r0^2 * (1/T)^2)
> p_2_b(r0) = 0 :
Cp_b[2] := solve(%, Cp_b[2]);
Cp_b2 := 0

```

Bereken de oplossing tot op eerste orde in ϵ

Zoek de oplossing tot op nulde orde in $\frac{1}{T^2}$

```

Stuksgewijze definities van f^(1,0)(r) :
> a[1,0] := r -> a_s[1,0](r) * Heaviside(r0-r) + a_b[1,0](r) * Heaviside(r-r0) :
b[1,0] := r -> b_s[1,0](r) * Heaviside(r0-r) + b_b[1,0](r) * Heaviside(r-r0) :
c[1,0] := r -> c_s[1,0](r) * Heaviside(r0-r) + c_b[1,0](r) * Heaviside(r-r0) :
d[1,0] := r -> d_s[1,0](r) * Heaviside(r0-r) + d_b[1,0](r) * Heaviside(r-r0) :
e[1,0] := r -> e_s[1,0](r) * Heaviside(r0-r) + e_b[1,0](r) * Heaviside(r-r0) :
p[1,0] := r -> p_s[1,0](r) * Heaviside(r0-r) + p_b[1,0](r) * Heaviside(r-r0) :
Opsplitsen van het stelsel in één voor r < r0 en één voor r > r0 :
> eqns_G_s[1,0] := eval(eqns_G[1,0], r=r_s) :
eqns_G_b[1,0] := eval(eqns_G[1,0], r=r_b) :
eqns_K_s[1,0] := eval(eqns_K[1,0], r=r_s) :

```

```

eqns_K_b[1,0]:=eval(eqns_K[1,0],r=r_b):
> OPL_s[1,0]:=dsolve({op(eqns_G_s[1,0]),op(eqns_K_s[1,0])},{a_s[1,0](r_s),b_s[1,0](r_s),c_s[1,0](r_s),d_s[1,0](r_s),e_s[1,0](r_s)});
OPL_s[1,0]:=subs({c1=c_s[1],C2=C_s[2],C3=C_s[3],C4=C_s[4]},OPL_s[1,0]);
OPL_b[1,0]:=dsolve({op(eqns_G_b[1,0]),op(eqns_K_b[1,0])},{a_b[1,0](r_b),b_b[1,0](r_b),c_b[1,0](r_b),d_b[1,0](r_b),e_b[1,0](r_b)});
OPL_b[1,0]:=subs({_C1=C_b[1],_C2=C_b[2],_C3=C_b[3],_C4=C_b[4]},OPL_b[1,0]);
aant_int_cst:=4:

```

$$OPL_{s_{1,0}} := \left\{ a_{s_{1,0}}(r_s) = \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_s^2 + \frac{C_{s_2}}{r_s} + C_{s_1}, b_{s_{1,0}}(r_s) = -\frac{1}{3} \frac{8 \pi G \rho_0 r_s^3 - 3 C_{s_2}}{r_s}, c_{s_{1,0}}(r_s) = C_{s_3} + \frac{C_{s_4}}{r_s}, d_{s_{1,0}}(r_s) = \right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha - 1)^2 \left(e^{s_{1,0}(r_s)} r_s + r_s^2 \left(\frac{d}{dr_s} e^{s_{1,0}(r_s)} \right) - C_{s_4} \right)}{r_s}, e_{s_{1,0}}(r_s) = e_{s_{1,0}}(r_s) \right\}$$

$$OPL_{b_{1,0}} := \left\{ a_{b_{1,0}}(r_b) = \frac{C_{b_2}}{r_b} + C_{b_1}, b_{b_{1,0}}(r_b) = \frac{C_{b_2}}{r_b}, c_{b_{1,0}}(r_b) = C_{b_3} + \frac{C_{b_4}}{r_b}, d_{b_{1,0}}(r_b) = \right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha - 1)^2 \left(e_{b_{1,0}}(r_b) r_b + r_b^2 \left(\frac{d}{dr_b} e_{b_{1,0}}(r_b) \right) - C_{b_4} \right)}{r_b}, e_{b_{1,0}}(r_b) = e_{b_{1,0}}(r_b) \right\}$$

$e^{(1,0)}(r)$ blijft voorlopig onbepaald. In de volgende orde voor $\frac{1}{l^2}$ zal $e^{(1,0)}$ bepaald worden door het $G_{\mu\nu}$ -stelsel. Dit fenomeen zal voor

$e^{(i,j)}(r)$ steeds terugkomen (ook voor tweede orde in ϵ).

```

> a_s[1,0]:=unapply(rhs(OPL_s[1,0][1]),r_s):
a_b[1,0]:=unapply(rhs(OPL_b[1,0][1]),r_b):
b_s[1,0]:=unapply(rhs(OPL_s[1,0][2]),r_s):
b_b[1,0]:=unapply(rhs(OPL_b[1,0][2]),r_b):
c_s[1,0]:=unapply(rhs(OPL_s[1,0][3]),r_s):
c_b[1,0]:=unapply(rhs(OPL_b[1,0][3]),r_b):
d_s[1,0]:=unapply(rhs(OPL_s[1,0][4]),r_s):
d_b[1,0]:=unapply(rhs(OPL_b[1,0][4]),r_b):

```

De randvoorwaarden ter verdwijning van de distributiecoëfficiënten. De voorwaarden die iets vertellen over $e^{(1,0)}(r)$ (dus ook die in verband met $d^{(1,0)}(r)$) kunnen niet gebruikt worden, omdat $e^{(1,0)}(r)$ nog vrij is.

```

> RVW:=simplify(value({RVW_G[1,0],RVW_K[1,0][1],RVW_K[1,0][4]}));
RVW:=\{-2(\alpha-1)(-C_{s_3}+C_{b_3})=0, -(\alpha-1)(C_{b_3}r_0+C_{b_4}-C_{s_3}r_0-C_{s_4})=0, 4\pi G\rho_0r_0^2+C_{s_1}-C_{b_1}=0, -\frac{8}{3}\pi G\rho_0r_0^3
+C_{s_2}-C_{b_2}=0, \frac{4}{3}\pi G\rho_0r_0^3+C_{s_2}+C_{s_1}r_0-C_{b_2}-C_{b_1}r_0=0\}

```

Vier constanten kunnen a.d.h.v. deze randvoorwaarden worden bepaald.

```
> opl:=solve(RVW,{C_s[1],C_s[2],C_s[3],C_s[4]});
C_s[1]:=rhs(opl[1]);
C_s[2]:=rhs(opl[2]);
C_s[3]:=rhs(opl[3]);
C_s[4]:=rhs(opl[4]);
opl:= {C_s1 = -4 π G ρ0 r0^2 + C_b1, C_s2 = 8/3 π G ρ0 r0^3 + C_b2, C_s3 = C_b3, C_s4 = C_b4}
```

Met $\lim_{r \rightarrow 0} f^{(i,j)}(r) \neq \infty$ en $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{df^{(i,j)}}{dr}(r) = 0$ kunnen nog twee integratieconstanten worden bepaald.

```
> limit(diff(as[1,0](x),x),x=0)=0;
op([1,1],%)=0;
C_b[2]:=solve(% , C_b[2]);
limit(diff(bs[1,0](x),x),x=0)=0;
limit(diff(cs[1,0](x),x),x=0)=0;
op([1,2,1],%)=0;
C_b[4]:=solve(% , C_b[4]);
limit(as[1,0](x),x=0)<>infinity;
limit(bs[1,0](x),x=0)<>infinity;
limit(cs[1,0](x),x=0)<>infinity;
limit(ds[1,0](x),x=0)<>infinity;
signum(-8/3 π G ρ0 r0^3 - C_b2) ∞ = 0
-8/3 π G ρ0 r0^3 - C_b2 = 0
C_b2 := -8/3 π G ρ0 r0^3
0 = 0
-signum(C_b4) ∞ = 0
C_b4 = 0
C_b4 := 0
-4 π G ρ0 r0^2 + C_b1 ≠ ∞
0 ≠ ∞
C_b3 ≠ ∞
-(α-1)^2 e_-s1,0(0) ≠ ∞
```

Zoals wordt uitgelegd in hoofdstuk 3, zijn de overgebleven niet te bepalen constanten diegene die via $\lim_{r \rightarrow \infty} f^{(i)}(r) = 0$ en $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{df^{(i)}}{dr}(r) = 0$ hadder moeten vastgelegd worden. Wegens de redeneringen die daar ook worden uitgelegd is $a_{\infty}^{(1,0)} \sim \frac{GM}{l}$ en hetzelfde voor $c_{\infty}^{(1,0)}$. De in de uitdrukkingen hieronder gebruikte waarden van $a_{\infty}^{(1,0)}$ en $c_{\infty}^{(1,0)}$ zijn dus van de grootteorde 10^9 .

```
> alias(a[infinity][1,0]=a_inf[1,0]): alias(c[infinity][1,0]=c_inf[1,0]):
  c_b[1]:=a_inf[1,0]*inv_1*G_c_rho0*r0^3*4/3*pi;
  c_b[3]:=c_inf[1,0]*inv_1*G_c_rho0*r0^3*4/3*pi;
```

$$C_{-b_1} := \frac{4}{3} a_{\infty 1,0} \frac{1}{l} G \rho_0 r_0^3 \pi$$

$$C_{-b_3} := \frac{4}{3} c_{\infty 1,0} \frac{1}{l} G \rho_0 r_0^3 \pi$$

```
> a[1,0]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(a[1,0](x)),inv_1),piecewise,r)),r);
  b[1,0]:=unapply(simplify(convert(simplify(b[1,0](x)),piecewise,r)),r);
  c[1,0]:=unapply(convert(series(simplify(c[1,0](x)),inv_1),piecewise,r),r);
  a[1,0]:=unapply(piecewise(x<r0,eval(a[1,0](x_s),r_s=r),r>=r0,eval(a[1,0](x_b),r_b=r)),r);
  b[1,0]:=unapply(piecewise(x<r0,eval(b[1,0](x_s),r_s=r),r>=r0,eval(b[1,0](x_b),r_b=r)),r);
  c[1,0]:=unapply(piecewise(x<r0,eval(c[1,0](x_s),r_s=r),r>=r0,eval(c[1,0](x_b),r_b=r)),r);
  'a[1,0](x)'=a[1,0](x);
  'b[1,0](x)'=b[1,0](x);
  'c[1,0](x)'=c[1,0](x);
```

$$a_{1,0}(r) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 (r^2 - 3 r_0^2) + \frac{4}{3} \pi G \rho_0 a_{\infty 1,0} r_0^3 \frac{1}{l} & r < r_0 \\ -\frac{8}{3} \frac{\pi G \rho_0 r_0^3}{r} + \frac{4}{3} \pi G \rho_0 a_{\infty 1,0} r_0^3 \frac{1}{l} & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$b_{1,0}(r) = \begin{cases} -\frac{8}{3} \pi G \rho_0 r^2 & r < r_0 \\ -\frac{8}{3} \frac{\pi G \rho_0 r_0^3}{r} & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$c_{1,0}(r) = \begin{cases} \frac{4}{3} c_{\infty 1,0} G \rho_0 r_0^3 \pi \frac{1}{l} & r < r_0 \\ \frac{4}{3} c_{\infty 1,0} G \rho_0 r_0^3 \pi \frac{1}{l} & r_0 \leq r \end{cases}$$

Zoek de oplossing tot op eerste orde in $\frac{1}{r^2}$

Voor alle volgende ordes is de gebruikte Maple-code analoog aan de orde (1,0). Enkel de belangrijkste resultaten worden nog weergegeven.

```

> a[1,1]:=r->a_s[1,1](r)*Heaviside(x0-r)+b[1,1](r)*Heaviside(r-r0):
> b[1,1]:=r->b_s[1,1](r)*Heaviside(x0-r)+b_b[1,1](r)*Heaviside(r-r0):
> c[1,1]:=r->c_s[1,1](r)*Heaviside(x0-r)+c_b[1,1](r)*Heaviside(r-r0):
> d[1,1]:=r->d_s[1,1](r)*Heaviside(x0-r)+d_b[1,1](r)*Heaviside(r-r0):
> e[1,1]:=r->e_s[1,1](r)*Heaviside(x0-r)+e_b[1,1](r)*Heaviside(r-r0):
> p[1,1]:=r->p_s[1,1](r)*Heaviside(x0-r)+p_b[1,1](r)*Heaviside(r-r0):
> eqns_G_s[1,1]:=eval(eqns_G[1,1],r=r_b):
> eqns_G_b[1,1]:=eval(eqns_G[1,1],r=r_b):
> eqns_K_s[1,1]:=eval(eqns_K[1,1],r=r_b):
> eqns_K_b[1,1]:=eval(eqns_K[1,1],r=r_b):
> OPL_s[1,1]:=dsolve({op(eqns_G_s[1,1]),eqns_K_s[1,1][1],eqns_K_s[1,1][2],eqns_K_s[1,1][3],
simplify(eqns_K_s[1,1][4]/sin(theta)^2)},{a_s[1,1](r_s),b_s[1,1](r_s),c_s[1,1](r_s),d_s[1,1]
(r_s),e_s[1,0](r_s),e_b[1,1](r_b)}):
> OPL_b[1,1]:=dsolve({op(eqns_G_b[1,1]),eqns_K_b[1,1][1],eqns_K_b[1,1][2],eqns_K_b[1,1][3],
simplify(eqns_K_b[1,1][4]/sin(theta)^2)},{a_b[1,1](r_b),b_b[1,1](r_b),c_b[1,1](r_b),d_b[1,1]
(r_b),e_b[1,0](r_b),e_b[1,1](r_b)}):
> OPL_s[1,1]:=subs({_C1=C_s[aaant_int_cst+4],_C5=C_s[aaant_int_cst+5],_C6=C_s[aaant_int_cst+6]},OPL_s[1,1]):
> OPL_b[1,1]:=subs({_C1=C_b[aaant_int_cst+4],_C5=C_b[aaant_int_cst+5],_C6=C_b[aaant_int_cst+6]},OPL_b[1,1]):
> a_s[1,1]:=unapply(rhs(OPL_s[1,1][1]),r_s):
> a_b[1,1]:=unapply(rhs(OPL_b[1,1][1]),r_b):
> b_s[1,1]:=unapply(rhs(OPL_s[1,1][2]),r_s):
> b_b[1,1]:=unapply(rhs(OPL_b[1,1][2]),r_b):
> c_s[1,1]:=unapply(rhs(OPL_s[1,1][3]),r_s):
> c_b[1,1]:=unapply(rhs(OPL_b[1,1][3]),r_b):
> d_s[1,1]:=unapply(rhs(OPL_s[1,1][4]),r_s):
> d_b[1,1]:=unapply(rhs(OPL_b[1,1][4]),r_b):
> e_s[1,0]:=unapply(rhs(OPL_s[1,1][5]),r_s):
> e_b[1,0]:=unapply(rhs(OPL_b[1,1][5]),r_b):
Omdat  $e^{(1,0)}(r)$  nu wel bepaald is, moeten we de randvoorwaarden afgeleid uit het (1,0)- $X_{,\mu\nu}$ -stelsel gebruiken om de integratieconstanten te bepalen.
> RWV:=simplify(value({op({RWV_G[1,1]}),op({RWV_K[1,0]}),RWV_K[1,1][1],RWV_K[1,1][4]})):
> opl:=solve(RWV,{C_s[5],C_s[6],C_s[7],C_s[8],C_s[9],C_s[10]}):
> C_s[5]:=rhs(opl[1]):
> C_s[6]:=rhs(opl[2]):
> C_s[7]:=rhs(opl[3]):
> C_s[8]:=rhs(opl[4]):
> C_s[9]:=rhs(opl[5]):
> C_s[10]:=rhs(opl[6]):

```


$$\begin{aligned}
opl := & \left\{ \begin{aligned} & C_{-s_5} = \frac{1}{3} \frac{3 C_{-b_5} \alpha + 7 \rho 0 \pi G r 0^4 - 3 C_{-b_5}}{\alpha - 1}, C_{-s_6} = -\frac{1}{5} \frac{-30 C_{-b_6} \alpha + 16 \rho 0 \pi G r 0^5 + 25 C_{-b_6}}{-5 + 6 \alpha}, C_{-s_7} = \\ & -\frac{1}{5} \frac{-45 C_{-b_7} \alpha^2 + 90 C_{-b_7} \alpha + 24 \rho 0 \pi G r 0^5 \alpha - 24 \rho 0 \pi G r 0^5 - 50 C_{-b_7}}{10 - 18 \alpha + 9 \alpha^2}, C_{-s_8} = -\frac{-C_{-b_8} \alpha + C_{-b_8} + 2 \rho 0 \pi G r 0^4}{\alpha - 1}, C_{-s_9} = C_{-b_9}, C_{-s_{10}} = \\ & = \frac{C_{-b_{10}} \alpha + 4 \pi G \rho 0 r 0^2 - C_{-b_{10}}}{\alpha - 1} \end{aligned} \right. \\
> & \text{limit(diff(a[1,1](x), x), x=0)=0;} \\
& \text{op([1,1,1],%)=0;} \\
& \text{C_b[6]:=solve(% , C_b[6]);} \\
& \text{limit(diff(b[1,1](x), x), x=0)=0;} \\
& \text{op([1,2,1],%)=0;} \\
& \text{C_b[9]:=solve(% , C_b[9]);} \\
& \text{limit(diff(c[1,1](x), x), x=0)=0;} \\
& \text{op([1,2,1],%)=0;} \\
& \text{C_b[7]:=solve(% , C_b[7]);} \\
& \text{limit(diff(d[1,1](x), x), x=0)=0;} \\
& \text{limit(diff(e[1,0](x), x), x=0)=0;} \\
& \text{limit(diff(d[1,0](x), x), x=0)=0;} \\
& \text{signum}\left(\frac{15 C_{-b_9} \alpha - 30 C_{-b_6} \alpha - 15 C_{-b_9} + 16 \rho 0 \pi G r 0^5 + 25 C_{-b_6}}{\alpha - 1}\right) \infty = 0 \\
& \frac{15 C_{-b_9} \alpha - 30 C_{-b_6} \alpha - 15 C_{-b_9} + 16 \rho 0 \pi G r 0^5 + 25 C_{-b_6}}{\alpha - 1} = 0 \\
& C_{-b_6} := \frac{1}{5} \frac{15 C_{-b_9} \alpha - 15 C_{-b_9} + 16 \rho 0 \pi G r 0^5}{-5 + 6 \alpha} \\
& \quad \text{-signum}(C_{-b_9}) \infty = 0 \\
& \quad C_{-b_9} = 0 \\
& \quad C_{-b_9} := 0 \\
& \text{-signum}(-45 C_{-b_7} \alpha^2 + 90 C_{-b_7} \alpha + 24 \rho 0 \pi G r 0^5 \alpha - 24 \rho 0 \pi G r 0^5 - 50 C_{-b_7}) \infty = 0 \\
& \quad -45 C_{-b_7} \alpha^2 + 90 C_{-b_7} \alpha + 24 \rho 0 \pi G r 0^5 \alpha - 24 \rho 0 \pi G r 0^5 - 50 C_{-b_7} = 0
\end{aligned}$$

```

>
C_b7 := 24 / 5 * rho0 * pi * G * r0^5 * (alpha - 1) / (10 - 18 * alpha + 9 * alpha^2)
-2 * alpha^2 * D(e_s1,1)(0) + 4 * alpha * D(e_s1,1)(0) - 2 * D(e_s1,1)(0) = 0
0 = 0
0 = 0

limit(a[1,1](r), r=0) <> infinity;
limit(b[1,1](r), r=0) <> infinity;
limit(c[1,1](r), r=0) <> infinity;
limit(d[1,1](r), r=0) <> infinity;
limit(e[1,0](r), r=0) <> infinity;
limit(e[1,0](r), r=0) <> infinity;

3 * C_b5 * alpha + 7 * rho0 * pi * G * r0^4 - 3 * C_b5 / (-3 + 3 * alpha) != infinity
0 != infinity
C_b8 * alpha - C_b8 - 2 * rho0 * pi * G * r0^4 / (alpha - 1) != infinity
-alpha^2 * e_s1,1(0) - e_s1,1(0) + 2 * alpha * e_s1,1(0) != infinity
-alpha^2 * C_b10 + 2 * C_b10 * alpha - 4 * pi * G * alpha * rho0 * r0^2 + 4 * pi * G * rho0 * r0^2 - C_b10 != infinity
C_b10 * alpha + 4 * pi * G * rho0 * r0^2 - C_b10 / (alpha - 1) != infinity

alias(a[infinity][1,1]=a_inf[1,1]): alias(c[infinity][1,1]=c_inf[1,1]): alias(e[infinity][1,0]
=e_inf[1,0]):
C_b[5]:=a_inf[1,1]*r0^2*inv_l*g_c*rho0*r0^3*4/3*Pi;
C_b[8]:=c_inf[1,1]*r0^2*inv_l*g_c*rho0*r0^3*4/3*Pi;
C_b[10]:=e_inf[1,0]*inv_l*g_c*rho0*r0^3*4/3*Pi;
C_b_5 := 4 / 3 * a_inf[1,1] * r0^5 / 7 * G * rho0 * pi
C_b_8 := 4 / 3 * c_inf[1,1] * r0^5 / 7 * G * rho0 * pi
C_b_10 := 4 / 3 * e_inf[1,0] / 7 * G * rho0 * r0^3 * pi

```

De procedure 'vereenvoudigd' zorgt er voor dat de oplossingen in een leesbare vorm worden omgezet.

```

> a[1,1]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(a[1,1](r)),inv_1),piecewise,r)),r);
b[1,1]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(b[1,1](r)),inv_1),piecewise,r)),r);
c[1,1]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(c[1,1](r)),inv_1),piecewise,r)),r);
d[1,0]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(d[1,0](r)),inv_1),piecewise,r)),r);
e[1,0]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(e[1,0](r)),inv_1),piecewise,r)),r);
a[1,1]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(a[1,1](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(a[1,1](r_b),r_b=r)),r);
b[1,1]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(b[1,1](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(b[1,1](r_b),r_b=r)),r);
c[1,1]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(c[1,1](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(c[1,1](r_b),r_b=r)),r);
d[1,0]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(d[1,0](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(d[1,0](r_b),r_b=r)),r);
e[1,0]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(e[1,0](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(e[1,0](r_b),r_b=r)),r);
'b[1,1](x)'=vereeenvoudig(a[1,1](x),4/3*Pi*rho0*r0^3,"no");
'c[1,1](x)'=vereeenvoudig(b[1,1](x),4/3*Pi*rho0*r0^3,"no");
'd[1,0](x)'=vereeenvoudig(d[1,0](x),4/3*Pi*rho0*r0^3,"no");
'e[1,0](x)'=vereeenvoudig(e[1,0](x),4/3*Pi*rho0*r0^3,"no");

```

$$a_{1,1}(r) = \begin{cases} \frac{1}{15} \frac{\rho_0 \pi G (3 r^5 + 10 r^3 r_0^2 + 35 r r_0^4)}{r (\alpha - 1)} & r < r_0 \\ \frac{1}{15} \frac{\rho_0 \pi G (40 r_0^3 r^2 + 8 r_0^5)}{r (\alpha - 1)} & r_0 \leq r \end{cases} + \frac{1}{7} \begin{cases} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_0^3 \left(r_0^2 a_{\alpha,1,1} - \frac{1}{3} r^2 c_{\alpha,1,0} \right) & r < r_0 \\ \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_0^3 \left(r_0^2 a_{\alpha,1,1} - \frac{1}{3} r^2 c_{\alpha,1,0} \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$b_{1,1}(r) = \begin{cases} \frac{8}{15} \frac{\rho_0 \pi G (-5 r^3 r_0^2 + r^5)}{r (\alpha - 1)} & r < r_0 \\ \frac{8}{15} \frac{\rho_0 \pi G (r_0^5 - 5 r_0^3 r^2)}{r (\alpha - 1)} & r_0 \leq r \end{cases} + \frac{1}{7} \begin{cases} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_0^3 \left(\frac{1}{6} \frac{r^2 a_{\alpha,1,0}}{\alpha - 1} + \frac{1}{6} r^2 c_{\alpha,1,0} - \frac{1}{2} r^2 e_{\alpha,1,0} \right) & r < r_0 \\ \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_0^3 \left(\frac{1}{6} \frac{r^2 a_{\alpha,1,0}}{\alpha - 1} + \frac{1}{6} r^2 c_{\alpha,1,0} - \frac{1}{2} r^2 e_{\alpha,1,0} \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$c_{1,1}(r) = \begin{cases} (\alpha - 1)^2 \left(\frac{2}{15} \frac{\rho_0 \pi G (-10 r^3 r_0^2 - 15 r r_0^4 + r^5)}{(\alpha - 1)^3 r} - \frac{4}{9} \frac{r \rho_0 \pi G (-3 r r_0^2 + r^3)}{(\alpha - 1)^4} \right) & r < r_0 \\ (\alpha - 1)^2 \left(\frac{2}{15} \frac{\rho_0 \pi G (-4 r_0^5 - 20 r_0^3 r^2)}{(\alpha - 1)^3 r} + \frac{8}{9} \frac{r \rho_0 \pi G r_0^3}{(\alpha - 1)^4} \right) & r_0 \leq r \end{cases} + \frac{1}{7}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_0^3 \left(\frac{1}{3} \frac{r^2 a_{\infty 1,0}}{\alpha-1} + \frac{1}{3} \frac{r^2 \alpha c_{\infty 1,0}}{\alpha-1} + r_0^2 c_{\infty 1,1} + \frac{1}{3} \frac{r^2 e_{\infty 1,0}}{\alpha-1} \right) & r < r_0 \\ \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_0^3 \left(\frac{1}{3} \frac{r^2 a_{\infty 1,0}}{\alpha-1} + \frac{1}{3} \frac{r^2 \alpha c_{\infty 1,0}}{\alpha-1} + r_0^2 c_{\infty 1,1} + \frac{1}{3} \frac{r^2 e_{\infty 1,0}}{\alpha-1} \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$d_{1,0}(r) = \begin{cases} 4(\alpha-1) \pi G \rho_0 (r^2 - r_0^2) & r < r_0 \\ 0 & r_0 \leq r \end{cases} + \frac{1}{7} \begin{cases} -\frac{4}{3} G \pi \rho_0 r_0^3 e_{\infty 1,0} (\alpha-1)^2 & r < r_0 \\ -\frac{4}{3} G \pi \rho_0 r_0^3 e_{\infty 1,0} (\alpha-1)^2 & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$e_{1,0}(r) = \begin{cases} -\frac{4}{3} \frac{\rho_0 \pi G (-3 r r_0^2 + r^3)}{r(\alpha-1)} & r < r_0 \\ \frac{8}{3} \frac{\rho_0 \pi G r_0^3}{r(\alpha-1)} & r_0 \leq r \end{cases} + \frac{1}{7} \begin{cases} \frac{4}{3} G \pi \rho_0 r_0^3 e_{\infty 1,0} & r < r_0 \\ \frac{4}{3} G \pi \rho_0 r_0^3 e_{\infty 1,0} & r_0 \leq r \end{cases}$$

▼ Zoek de oplossing tot op tweede orde in $\frac{1}{\beta^2}$

```
> a[1,2]:=r->a_s[1,2](r)*Heaviside(r_0-r)+a_b[1,2](r)*Heaviside(r-r_0):
b[1,2]:=r->b_s[1,2](r)*Heaviside(r_0-r)+b_b[1,2](r)*Heaviside(r-r_0):
c[1,2]:=r->c_s[1,2](r)*Heaviside(r_0-r)+c_b[1,2](r)*Heaviside(r-r_0):
d[1,2]:=r->d_s[1,2](r)*Heaviside(r_0-r)+d_b[1,2](r)*Heaviside(r-r_0):
e[1,2]:=r->e_s[1,2](r)*Heaviside(r_0-r)+e_b[1,2](r)*Heaviside(r-r_0):
p[1,2]:=r->p_s[1,2](r)*Heaviside(r_0-r)+p_b[1,2](r)*Heaviside(r-r_0):
> eqns_G_s[1,2]:=eval(eqns_G[1,2],r=r_s):
eqns_G_b[1,2]:=eval(eqns_G[1,2],r=r_b):
eqns_K_s[1,2]:=eval(eqns_K[1,2],r=r_s):
eqns_K_b[1,2]:=eval(eqns_K[1,2],r=r_b):
> OPL_s[1,2]:=dsolve({op(eqns_G_s[1,2]),eqns_K_s[1,2][1],eqns_K_s[1,2][2],eqns_K_s[1,2][3],
simplify(eqns_K_s[1,2][4]/sin(theta)^2)},{a_s[1,2](r_s),b_s[1,2](r_s),c_s[1,2](r_s),d_s[1,2](r_s),e_s[1,1](r_s),e_s[1,2](r_s)}):
OPL_s[1,2]:=subs({C1=C_s[aaant_int_cst+1],C2=C_s[aaant_int_cst+2],C3=C_s[aaant_int_cst+3],_C4=C_s[aaant_int_cst+4],_C5=C_s[aaant_int_cst+5],_C6=C_s[aaant_int_cst+6]},OPL_s[1,2]):
> OPL_b[1,2]:=dsolve({op(eqns_G_b[1,2]),eqns_K_b[1,2][1],eqns_K_b[1,2][2],eqns_K_b[1,2][3],
simplify(eqns_K_b[1,2][4]/sin(theta)^2)},{a_b[1,2](r_b),b_b[1,2](r_b),c_b[1,2](r_b),d_b[1,2](r_b),e_b[1,1](r_b),e_b[1,2](r_b)}):
OPL_b[1,2]:=subs({C1=C_b[aaant_int_cst+1],C2=C_b[aaant_int_cst+2],C3=C_b[aaant_int_cst+3],_C4=
```

```

C_b[aaant_int_cst+4], C5=C_b[aaant_int_cst+5], C6=C_b[aaant_int_cst+6]}, OPL_b[1,2]):
aaant_int_cst:=aaant_int_cst+6:
a_s[1,2]:=unapply(simplify(value(rhs(OPL_s[1,2][1])),r_s)):
a_b[1,2]:=unapply(simplify(value(rhs(OPL_b[1,2][1])),r_b)):
b_s[1,2]:=unapply(simplify(value(rhs(OPL_s[1,2][2])),r_s)):
b_b[1,2]:=unapply(simplify(value(rhs(OPL_b[1,2][2])),r_b)):
c_s[1,2]:=unapply(simplify(value(rhs(OPL_s[1,2][3])),r_s)):
c_b[1,2]:=unapply(simplify(value(rhs(OPL_b[1,2][3])),r_b)):
d_s[1,2]:=unapply(rhs(OPL_s[1,2][4]),r_s):
d_b[1,2]:=unapply(rhs(OPL_b[1,2][4]),r_b):
e_s[1,1]:=unapply(rhs(OPL_s[1,2][5]),r_s):
e_b[1,1]:=unapply(rhs(OPL_b[1,2][5]),r_b):
RVW:=simplify(value({op({RVW_G[1,2]},op({RVW_K[1,1]},RVW_K[1,2][1],RVW_K[1,2][4]))}):
opl:=solve(RVW,{C_s[11],C_s[12],C_s[13],C_s[14],C_s[15],C_s[16]}):
C_s[11]:=rhs(opl[1]):
C_s[12]:=rhs(opl[2]):
C_s[13]:=rhs(opl[3]):
C_s[14]:=rhs(opl[4]):
C_s[15]:=rhs(opl[5]):
C_s[16]:=rhs(opl[6]):

opl:= { C_s11 =  $\frac{1}{54} \frac{-108 C_{b11} \alpha + 54 C_{b11} \alpha^2 + 12 \pi G \rho_0 r_0^6 \alpha + 54 C_{b11} - 37 \pi G \rho_0 r_0^6}{1 - 2 \alpha + \alpha^2}$ , C_s12 =
-  $\frac{1}{630} \frac{24 \pi G \rho_0 r_0^7 \alpha - 105 C_{b15} \alpha^2 + 210 C_{b15} \alpha - 88 \pi G \rho_0 r_0^7 - 637 C_{b12} - 105 C_{b15} - 630 C_{b12} \alpha^2 + 1260 C_{b12} \alpha}{1 - 2 \alpha + \alpha^2}$ , C_s13 =
-  $\frac{1}{315} \frac{-315 C_{b13} \alpha^2 + 630 C_{b13} \alpha + 12 \pi G \rho_0 r_0^7 \alpha - 315 C_{b13} - 44 \pi G \rho_0 r_0^7}{1 - 2 \alpha + \alpha^2}$ , C_s14 =
-  $\frac{1}{27} \frac{-27 C_{b14} \alpha^2 + 54 C_{b14} \alpha + 6 \pi G \rho_0 r_0^6 \alpha - 27 C_{b14} - 17 \pi G \rho_0 r_0^6}{1 - 2 \alpha + \alpha^2}$ , C_s15 = C_b15, C_s16 =
=  $\frac{C_{b16} \alpha^2 + 2 \rho_0 \pi G r_0^4 \alpha - 2 C_{b16} \alpha - 3 \rho_0 \pi G r_0^4 + C_{b16}}{1 - 2 \alpha + \alpha^2}$  }
> limit(diff(a[1,2](r),r),r=0)=0;
op([1,1],%)=0;
C_b[12]:=solve(% ,C_b[12]);
limit(diff(b[1,2](r),r),r=0)=0;
op([1,2,1],%)=0;
C_b[15]:=solve(% ,C_b[15]);

```

```

limit(diff(c[1,2](r),r),r=0)=0;
op([1,2,1],%)=0;
C_b[13]:=solve(% ,C_b[13]);
limit(diff(d[1,2](r),r),r=0)=0;
limit(diff(e[1,1](r),r),r=0)=0;
limit(diff(d[1,1](r),r),r=0)=0;
signum(315 C_b15 + 315 C_b15 α^2 - 88 π G ρ0 r0^7 - 630 C_b12 α^2 + 24 π G ρ0 r0^7 α - 630 C_b15 α + 1260 C_b12 α - 637 C_b12) ∞ = 0
315 C_b15 + 315 C_b15 α^2 - 88 π G ρ0 r0^7 - 630 C_b12 α^2 + 24 π G ρ0 r0^7 α - 630 C_b15 α + 1260 C_b12 α - 637 C_b12 = 0
C_b12 :=  $\frac{1}{7} \frac{315 C_b15 + 315 C_b15 \alpha^2 - 88 \pi G \rho0 r0^7 + 24 \pi G \rho0 r0^7 \alpha - 630 C_b15 \alpha - 637 C_b12}{91 - 180 \alpha + 90 \alpha^2}$ 
-signum(C_b15) ∞ = 0
C_b15 = 0
C_b15 := 0
-signum(-315 C_b13 α^2 + 630 C_b13 α + 12 π G ρ0 r0^7 α - 315 C_b13 - 44 π G ρ0 r0^7) ∞ = 0
-315 C_b13 α^2 + 630 C_b13 α + 12 π G ρ0 r0^7 α - 315 C_b13 - 44 π G ρ0 r0^7 = 0
C_b13 :=  $\frac{4}{315} \frac{\pi G \rho0 r0^7 (3 \alpha - 11)}{1 - 2 \alpha + \alpha^2}$ 
-2 (1 - 2 α + α^2) D(e_{-1,2})(0) = 0
0 = 0
0 = 0
>
limit(a[1,2](r),r=0)<>infinity;
limit(b[1,2](r),r=0)<>infinity;
limit(c[1,2](r),r=0)<>infinity;
limit(d[1,2](r),r=0)<>infinity;
limit(e[1,1](r),r=0)<>infinity;
limit(e[1,1](r),r=0)<>infinity;
-108 C_b11 α + 54 C_b11 α^2 + 12 π G ρ0 r0^6 α + 54 C_b11 - 37 π G ρ0 r0^6  $\neq \infty$ 
-108 α + 54 α^2 + 54
0 ≠ ∞

```

$$\frac{27 C_{-b_{14}} \alpha^2 - 54 C_{-b_{14}} \alpha - 6 \pi G \rho_0 r_0^6 \alpha + 27 C_{-b_{14}} + 17 \pi G \rho_0 r_0^6}{27 - 54 \alpha + 27 \alpha^2} \neq \infty$$

$$-(1 - 2 \alpha + \alpha^2) e_{-s_{1,2}}(0) \neq \infty$$

$$-2 \rho_0 \pi G r_0^4 \alpha - C_{-b_{16}} \alpha^2 + 2 C_{-b_{16}} \alpha + 3 \rho_0 \pi G r_0^4 - C_{-b_{16}} \neq \infty$$

$$\frac{C_{-b_{16}} \alpha^2 + 2 \rho_0 \pi G r_0^4 \alpha - 2 C_{-b_{16}} \alpha - 3 \rho_0 \pi G r_0^4 + C_{-b_{16}}}{1 - 2 \alpha + \alpha^2} \neq \infty$$

```

> alias(a[infinity][1,2]=a_inf[1,2]): alias(c[infinity][1,2]=c_inf[1,2]): alias(e[infinity][1,1]
=e_inf[1,1]):
c_b[11]:=a_inf[1,2]*r0^4*inv 1*g_c*rho0*r0^3*4/3*pi;
c_b[14]:=c_inf[1,2]*r0^4*inv 1*g_c*rho0*r0^3*4/3*pi;
c_b[16]:=e_inf[1,1]*r0^2*inv 1*g_c*rho0*r0^3*4/3*pi;
C_b_11:= 4
3 a_inf[1,2] r0^7 1
7 G rho pi
C_b_14:= 4
3 c_inf[1,2] r0^7 1
7 G rho pi
C_b_16:= 4
3 e_inf[1,1] r0^5 1
7 G rho pi

a[1,2]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(a[1,2](x)),inv 1),piecewise,r)),r);
b[1,2]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(b[1,2](x)),inv 1),piecewise,r)),r);
d[1,1]:=unapply(factor(simplify(convert(series(simplify(d[1,1](r)),inv 1),piecewise,r)),r);
e[1,1]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(e[1,1](x)),inv 1),piecewise,r)),r);
a[1,2]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(a[1,2](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(a[1,2](r_b),r_b=r)),r);
b[1,2]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(b[1,2](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(b[1,2](r_b),r_b=r)),r);
d[1,1]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(d[1,1](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(d[1,1](r_b),r_b=r)),r);
e[1,1]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(e[1,1](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(e[1,1](r_b),r_b=r)),r);
'a[1,2](x) '=vereeenvoudig(a[1,2](x),4/3*pi*g*rho0*r0^3,"no");
'b[1,2](x) '=vereeenvoudig(b[1,2](x),4/3*pi*g*rho0*r0^3,"no");
'd[1,1](x) '=vereeenvoudig(d[1,1](x),4/3*pi*g*rho0*r0^3,"no");
'e[1,1](x) '=vereeenvoudig(e[1,1](x),4/3*pi*g*rho0*r0^3,"no");

a_{1,2}(r) = \begin{cases} \frac{(\alpha-1)^2 \left( -\frac{2}{315} \frac{\rho_0 G \pi (-35 r r_0^6 - 21 r^5 r_0^2 - 105 r^3 r_0^4 + r^7)}{(\alpha-1)^3 r} - \frac{1}{1890} \frac{\rho_0 G \pi (143 r^7 + 875 r r_0^6 - 483 r^5 r_0^2 + 105 r^3 r_0^4)}{(\alpha-1)^3 r} \right)}{(\alpha-1)^2 \left( -\frac{2}{315} \frac{\rho_0 G \pi (-70 r_0^3 r^4 - 84 r_0^5 r^2 - 6 r_0^7)}{(\alpha-1)^3 r} - \frac{1}{1890} \frac{\rho_0 G \pi (-560 r_0^3 r^4 + 192 r_0^7 + 1008 r_0^5 r^2)}{(\alpha-1)^3 r} \right)} & r < r_0 \\ \frac{1}{7} & r_0 \leq r \end{cases}

```

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^3 \left(-\frac{1}{30} \frac{r^4 \alpha a_{\alpha,1,0}}{(\alpha-1)^2} + r^4 a_{\alpha,1,2} - \frac{1}{30} \frac{r^4 \alpha c_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} - \frac{1}{3} r^2 r^2 c_{\alpha,1,1} + \frac{1}{30} \frac{r^4 e_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} \right) & r < r_0 \\ \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^3 \left(-\frac{1}{30} \frac{r^4 \alpha a_{\alpha,1,0}}{(\alpha-1)^2} + r^4 a_{\alpha,1,2} - \frac{1}{30} \frac{r^4 \alpha c_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} - \frac{1}{3} r^2 r^2 c_{\alpha,1,1} + \frac{1}{30} \frac{r^4 e_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$b_{1,2}(r) = \begin{cases} \left(\frac{(\alpha-1)^2}{105} \left(\frac{4}{\rho_0 G \pi} (-14 r^5 r^2 - 35 r^3 r^4 + r^7) - \frac{8}{(\alpha-1)^3} r - \frac{315}{(\alpha-1)^4} r \right) \right) & r < r_0 \\ \left(\frac{(\alpha-1)^2}{105} \left(\frac{4}{\rho_0 G \pi} (\rho_0^2 - 35 \rho_0^3 r^4 - 14 \rho_0^5 r^2) - \frac{8}{(\alpha-1)^3} r - \frac{315}{(\alpha-1)^4} r \right) \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^3 \left(\frac{1}{30} \frac{r^4 (-3+\alpha) a_{\alpha,1,0}}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{6} \frac{r^2 r^2 a_{\alpha,1,1}}{\alpha-1} + \frac{1}{30} \frac{r^4 (-3+\alpha) c_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} + \frac{1}{6} r^2 r^2 c_{\alpha,1,1} - \frac{1}{30} \frac{r^4 (3\alpha-5) e_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} - \frac{1}{2} r^2 r^2 e_{\alpha,1,1} \right) & r < r_0 \\ \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^3 \left(\frac{1}{30} \frac{r^4 (-3+\alpha) a_{\alpha,1,0}}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{6} \frac{r^2 r^2 a_{\alpha,1,1}}{\alpha-1} + \frac{1}{30} \frac{r^4 (-3+\alpha) c_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} + \frac{1}{6} r^2 r^2 c_{\alpha,1,1} - \frac{1}{30} \frac{r^4 (3\alpha-5) e_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} - \frac{1}{2} r^2 r^2 e_{\alpha,1,1} \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$d_{1,1}(r) = \begin{cases} \left(\frac{(\alpha-1)^2}{15} \left(\frac{2}{\rho_0 G \pi} (r^5 - 15 r r^4 - 10 r^3 r^2) - \frac{1}{3} \frac{\rho_0 G \pi (r^4 - 6 r^2 r^2 - 3 r^4)}{(\alpha-1)^2} \right) \right) & r < r_0 \\ \left(\frac{(\alpha-1)^2}{15} \left(\frac{2}{\rho_0 G \pi} (-20 r^3 r^2 - 4 r^5) + \frac{8}{3} \frac{r \pi G \rho_0 r^3}{(\alpha-1)^2} \right) \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^3 \left(-\frac{1}{30} r^2 (7+2\alpha) a_{\alpha,1,0} - \frac{1}{30} r^2 (\alpha-1) (7+2\alpha) c_{\alpha,1,0} - \frac{1}{10} r^2 (\alpha-1) (4\alpha-7) e_{\alpha,1,0} - (\alpha-1)^2 r^2 e_{\alpha,1,1} \right) & r < r_0 \\ \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^3 \left(-\frac{1}{30} r^2 (7+2\alpha) a_{\alpha,1,0} - \frac{1}{30} r^2 (\alpha-1) (7+2\alpha) c_{\alpha,1,0} - \frac{1}{10} r^2 (\alpha-1) (4\alpha-7) e_{\alpha,1,0} - (\alpha-1)^2 r^2 e_{\alpha,1,1} \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$e_{1,1}(r) = \begin{cases} \left(\frac{(\alpha-1)^2}{15} \left(-\frac{2}{\rho_0 G \pi} (r^5 - 15 r r^4 - 10 r^3 r^2) + \frac{1}{45} \frac{\rho_0 G \pi (11 r^5 - 30 r^3 r^2 - 45 r r^4)}{(\alpha-1)^3} r \right) \right) & r < r_0 \\ \left(\frac{(\alpha-1)^2}{15} \left(-\frac{2}{\rho_0 G \pi} (-20 r^3 r^2 - 4 r^5) + \frac{1}{45} \frac{\rho_0 G \pi (-24 r^5 - 40 r^3 r^2)}{(\alpha-1)^3} r \right) \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^3 \left(-\frac{1}{30} \frac{r^2 (\alpha-4) a_{\alpha,1,0}}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{30} \frac{r^2 (\alpha-4) c_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} + \frac{1}{10} \frac{r^2 (3\alpha-4) e_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} + r^2 e_{\alpha,1,1} \right) & r < r_0 \\ \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^3 \left(-\frac{1}{30} \frac{r^2 (\alpha-4) a_{\alpha,1,0}}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{30} \frac{r^2 (\alpha-4) c_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} + \frac{1}{10} \frac{r^2 (3\alpha-4) e_{\alpha,1,0}}{\alpha-1} + r^2 e_{\alpha,1,1} \right) & r_0 \leq r \end{cases}$$

$d^{(1,2)}(r)$ is afhankelijk van de tot op deze orde vrije functie $e^{(1,2)}(r)$.

> `c[1,2] := unapply(simplify(convert(series(c[1,2](x)), inv_1), piecewise, r), r);`
> `c[1,2] := unapply(piecewise(x<0, eval(c[1,2](x_s), r_s=r), x>=0, eval(c[1,2](x_b), r_b=r)), r);`
> `d[1,2] := unapply(simplify(convert(series(simplify(d[1,2](r)), inv_1), piecewise, r), r);`


```

d[1,2]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(d[1,2](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(d[1,2](r_b),r_b=r)),r):
'c[1,2](r)=-vereinvoudig(c[1,2](r),4/3*Pi*G*rho0*r^0^3,"no");
'd[1,2](r)=-vereinvoudig(d[1,2](r),4/3*Pi*G*rho0*r^0^3,"no");

```

$$\left. \begin{aligned} & (\alpha-1)^2 \left(\frac{1}{135} \frac{r G \rho \pi (11 r^5 - 45 r \rho^4 - 30 r^3 \rho^2) + 315}{(\alpha-1)^5} + \frac{2}{945} \frac{G \rho \pi (-105 r^3 \rho^4 + r^7 - 21 r^5 \rho^2 - 35 r \rho^6)}{(\alpha-1)^3} r \right) \\ & - \frac{1}{945} \frac{G \rho \pi (-385 r \rho^6 + 23 r^7 - 231 r^5 \rho^2 - 735 r^3 \rho^4)}{(\alpha-1)^4} r \end{aligned} \right\} r < r_0$$

$$c_{1,2}(r) = \left. \begin{aligned} & (\alpha-1)^2 \left(\frac{1}{135} \frac{r G \rho \pi (-24 r \rho^5 - 40 r \rho^3 r^2) + 315}{(\alpha-1)^5} + \frac{2}{945} \frac{G \rho \pi (-84 r \rho^5 r^2 - 70 r \rho^3 r^4 - 6 r \rho^7)}{(\alpha-1)^3} r \right) \\ & - \frac{1}{945} \frac{G \rho \pi (-96 r \rho^7 - 560 r \rho^3 r^4 - 672 r \rho^5 r^2)}{(\alpha-1)^4} r \end{aligned} \right\} r_0 \leq r$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{4}{3} \pi G \rho \rho^3 \left(\frac{1}{90} \frac{r^4 (-4\alpha + 4 + 3\alpha^2) a_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)^3} + \frac{1}{3} \frac{r^2 \rho^2 a_{\infty 1,1}}{\alpha-1} + \frac{1}{90} \frac{r^4 (-4\alpha + 4 + 3\alpha^2) c_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)^2} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{r^2 \rho^2 \alpha c_{\infty 1,1}}{\alpha-1} + \rho^4 c_{\infty 1,2} + \frac{1}{30} \frac{r^4 (-3+2\alpha) e_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{3} \frac{r^2 \rho^2 e_{\infty 1,1}}{\alpha-1} \end{aligned} \right\} r < r_0$$

+ $\frac{1}{7}$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{4}{3} \pi G \rho \rho^3 \left(\frac{1}{90} \frac{r^4 (-4\alpha + 4 + 3\alpha^2) a_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)^3} + \frac{1}{3} \frac{r^2 \rho^2 a_{\infty 1,1}}{\alpha-1} + \frac{1}{90} \frac{r^4 (-4\alpha + 4 + 3\alpha^2) c_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)^2} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{r^2 \rho^2 \alpha c_{\infty 1,1}}{\alpha-1} + \rho^4 c_{\infty 1,2} + \frac{1}{30} \frac{r^4 (-3+2\alpha) e_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{3} \frac{r^2 \rho^2 e_{\infty 1,1}}{\alpha-1} \end{aligned} \right\} r_0 \leq r$$

$$\left. \begin{aligned} & (\alpha-1)^2 \left(-r \left(\frac{d}{dr} e_{s_{1,2}}(r) \right) - e_{s_{1,2}}(r) - \frac{4}{135} \frac{r G \rho \pi (-15 r^3 \rho^2 + 11 r^5)}{(\alpha-1)^3} + \frac{8}{315} \frac{G \rho \pi (-35 r^3 \rho^4 - 56 r^5 \rho^2 + 11 r^7)}{(\alpha-1)^2} r \right) \\ & - \frac{4}{105} \frac{\pi G \rho \rho^3 (-14 r^5 \rho^2 + r^7 - 35 r^3 \rho^4)}{r (\alpha-1)} \end{aligned} \right\} r < r_0$$

$$d_{1,2}(r) = \left. \begin{aligned} & (\alpha-1)^2 \left(-e_{h_{1,2}}(r) - r \left(\frac{d}{dr} e_{h_{1,2}}(r) \right) - \frac{4}{135} \frac{r G \rho \pi (-10 r \rho^3 r^2 + 6 r \rho^5)}{(\alpha-1)^3} + \frac{8}{315} \frac{G \rho \pi (4 r \rho^7 - 70 r \rho^3 r^4 - 14 r \rho^5 r^2)}{(\alpha-1)^2} r \right) \\ & - \frac{4}{105} \frac{\pi G \rho \rho^3 (-35 r \rho^4 - 14 r \rho^5 r^2 + r \rho^7)}{r (\alpha-1)} \end{aligned} \right\} r_0 \leq r$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_0^3 \left(-\frac{1}{90} \frac{r^4(3\alpha^2+17-14\alpha)a_{\infty 1,0}}{\alpha-1} - \frac{1}{6} r^2 r_0^2 (\alpha-1)a_{\infty 1,1} - \frac{1}{90} r^4(3\alpha^2+17-14\alpha)c_{\infty 1,0} \right) \\ - \frac{1}{6} (\alpha-1)^2 r^2 r_0^2 c_{\infty 1,1} + \frac{1}{30} r^4(13-14\alpha+3\alpha^2)e_{\infty 1,0} + \frac{1}{2} (\alpha-1)^2 r^2 r_0^2 e_{\infty 1,1} \\ + \frac{1}{7} \left[\begin{array}{l} \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r_0^3 \left(-\frac{1}{90} \frac{r^4(3\alpha^2+17-14\alpha)a_{\infty 1,0}}{\alpha-1} - \frac{1}{6} r^2 r_0^2 (\alpha-1)a_{\infty 1,1} - \frac{1}{90} r^4(3\alpha^2+17-14\alpha)c_{\infty 1,0} \right) \\ - \frac{1}{6} (\alpha-1)^2 r^2 r_0^2 c_{\infty 1,1} + \frac{1}{30} r^4(13-14\alpha+3\alpha^2)e_{\infty 1,0} + \frac{1}{2} (\alpha-1)^2 r^2 r_0^2 e_{\infty 1,1} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad r < r_0$$

Bereken de oplossing tot op tweede orde in ϵ

Zoek de oplossing tot op nulde orde in $\frac{1}{l^2}$

Omdat de waarde van $a^{(1)}(r_0)$ nu bekend is en ook zijn $\frac{1}{l^2}$ -afhankelijkheid, kan $p^{(2)}(r)$ nu ontwikkeld worden volgens $\frac{1}{l^2}$.

```
> p_s[2,0]:=unapply(coeff(series(simplify(p_2_s(r_s)),inv_l),inv_l,0)+coeff(series(simplify(p_2_s(r_s)),inv_l),inv_l,1)*inv_l),r_s);
p_b[2,0]:=r->0;
p_s[2,1]:=unapply(coeff(series(simplify(p_2_s(r_s)),inv_l),inv_l,2)+coeff(series(simplify(p_2_s(r_s)),inv_l),inv_l,3)*inv_l),r_s);
p_b[2,1]:=r->0;
p_s[2,2]:=unapply(coeff(series(simplify(p_2_s(r_s)),inv_l),inv_l,4)+coeff(series(simplify(p_2_s(r_s)),inv_l),inv_l,4)*inv_l),r_s);
p_b[2,2]:=r->0;
```

$$p_{-2,0} := r_s \rightarrow \frac{2}{3} \rho_0^2 \pi G (-r_s^2 + r_0^2)$$

$$p_{-2,0} := r \rightarrow 0$$

$$p_{-2,1} := r_s \rightarrow -\frac{1}{90} \frac{1}{\alpha-1} \left((-20 r_0^3 \frac{1}{l} r_s^2 c_{\infty 1,0} \alpha + 20 r_0^5 \frac{1}{l} c_{\infty 1,0} \alpha + 110 r_0^2 r_s^2 - 20 r_0^3 \frac{1}{l} r_s^2 a_{\infty 1,0} - 89 r_0^4 - 21 r_s^4 \right. \\ \left. - 20 r_0^5 \frac{1}{l} c_{\infty 1,0} + 20 r_0^3 \frac{1}{l} r_s^2 c_{\infty 1,0} + 20 r_0^5 \frac{1}{l} a_{\infty 1,0} \right) \rho_0^2 \pi G$$

$$p_{-2,1} := r \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
p_{-s_2,2} := r_{-s} \rightarrow & \frac{1}{3780} \frac{1}{(\alpha-1)^2} \left(\left(12 \frac{1}{7} r_{-s} s^6 \alpha - 1260 \frac{1}{7} r_0^4 r_{-s} s^2 \alpha + 1500 \frac{1}{7} r_0^6 \alpha - 1260 r_0^4 r_{-s} s^2 \alpha \right. \right. \\
& - 252 \frac{1}{7} r_0^2 r_{-s} s^4 \alpha + 1500 r_0^6 \alpha - 3323 \frac{1}{7} r_0^6 + 1911 r_0^2 r_{-s} s^4 - 205 \frac{1}{7} r_{-s} s^6 - 205 r_{-s} s^6 + 1617 r_0^4 r_{-s} s^2 + 1617 \frac{1}{7} r_0^4 r_{-s} s^2 \\
& \left. \left. + 1911 \frac{1}{7} r_0^2 r_{-s} s^4 - 3323 r_0^6 \right) \rho^0 \pi G \right)
\end{aligned}$$

$$p_{-b_2,2} := r \rightarrow 0$$

Oplossen voor tweede orde in ε gebeurt op dezelfde manier als voor eerste orde.

```

> a[2,0] := r -> a_s[2,0] (r) * Heaviside(x0-r) + a_b[2,0] (r) * Heaviside(r-r0) :
b[2,0] := r -> b_s[2,0] (r) * Heaviside(x0-r) + b_b[2,0] (r) * Heaviside(r-r0) :
c[2,0] := r -> c_s[2,0] (r) * Heaviside(x0-r) + c_b[2,0] (r) * Heaviside(r-r0) :
d[2,0] := r -> d_s[2,0] (r) * Heaviside(x0-r) + d_b[2,0] (r) * Heaviside(r-r0) :
e[2,0] := r -> e_s[2,0] (r) * Heaviside(x0-r) + e_b[2,0] (r) * Heaviside(r-r0) :
p[2,0] := r -> p_s[2,0] (r) * Heaviside(x0-r) + p_b[2,0] (r) * Heaviside(r-r0) :
eqns_g[2,0] := eval(eqns_g[2,0], r=r_s) :
eqns_b[2,0] := eval(eqns_b[2,0], r=r_b) :
eqns_k[2,0] := eval(eqns_k[2,0], r=r_s) :
eqns_k[2,0] := eval(eqns_k[2,0], r=r_b) :
OPL_s[2,0] := dsolve({op(eqns_g_s[2,0]), op(eqns_k_s[2,0])}, {a_s[2,0](r_s), b_s[2,0](r_s), c_s[2,0](r_s), d_s[2,0](r_s), e_s[2,0](r_s)}):
OPL_b[2,0] := subs({_C1=C_s[aant_int_cst+1], _C2=C_s[aant_int_cst+2], _C3=C_s[aant_int_cst+3], _C4=C_s[aant_int_cst+4]}, OPL_s[2,0]):
a_s[2,0] := unapply(rhs(OPL_s[2,0][1]), r_s) :
b_s[2,0] := unapply(rhs(OPL_s[2,0][2]), r_s) :
c_s[2,0] := unapply(rhs(OPL_s[2,0][3]), r_s) :
d_s[2,0] := unapply(rhs(OPL_s[2,0][4]), r_s) :
OPL_b[2,0] := dsolve({op(eqns_g_b[2,0]), op(eqns_k_b[2,0])}, {a_b[2,0](r_b), b_b[2,0](r_b), c_b[2,0](r_b), d_b[2,0](r_b), e_b[2,0](r_b), p_b[2,0](r_b)}):
OPL_b[2,0] := subs({_C1=C_b[aant_int_cst+1], _C2=C_b[aant_int_cst+2], _C3=C_b[aant_int_cst+3], _C4=C_b[aant_int_cst+4]}, OPL_b[2,0]):
aant_int_cst := aant_int_cst+4:
a_b[2,0] := unapply(rhs(OPL_b[2,0][1]), r_b) :
b_b[2,0] := unapply(rhs(OPL_b[2,0][2]), r_b) :
c_b[2,0] := unapply(rhs(OPL_b[2,0][3]), r_b) :
d_b[2,0] := unapply(rhs(OPL_b[2,0][4]), r_b) :
RVW := simplify(value({RVW_g[2,0], RVW_k[2,0][1], RVW_k[2,0][4]})) :
opl := solve(RVW, {C_s[17], C_s[18], C_s[19], C_s[20]}):
C_s[17] := rhs(opl[1]) :
C_s[18] := rhs(opl[2]) :
C_s[19] := rhs(opl[3]) :
C_s[20] := rhs(opl[4]) :

```

```

opl := {C_s17 = -16/3 * r0^5 * pi^2 * G^2 * rho^2 * a_inf[1,0] * 1/T + 4/3 * pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^4 + C_b17, C_s18 = C_b18, C_s19 = C_b19, C_s20 = C_b20}

>
limit(diff(a[2,0](x), x), x=0)=0;
op([1,2,1],%)=0;
C_b[18]:=solve(% , C_b[18]);
limit(diff(b[2,0](x), x), x=0)=0;
limit(diff(c[2,0](x), x), x=0)=0;
op([1,2,1],%)=0;
C_b[20]:=solve(% , C_b[20]);
limit(diff(d[2,0](x), x), x=0)=0;

-2 * alpha^2 * D(e_s2,0)(0) + 4 * alpha * D(e_s2,0)(0) - 2 * D(e_s2,0)(0) = 0
C_b18 := 0
0 = 0
-signum(C_b20) = 0
C_b20 := 0

-2 * alpha^2 * D(e_s2,0)(0) + 4 * alpha * D(e_s2,0)(0) - 2 * D(e_s2,0)(0) = 0
-16/3 * r0^5 * pi^2 * G^2 * rho^2 * a_inf[1,0] * 1/T + 4/3 * pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^4 + C_b17 != 0
0 != 0
C_b19 != 0

-1/9 * (alpha - 1) * (16 * pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^6 * e_inf[1,0]^2 * alpha^2 + 9 * alpha * e_s2,0(0) + 96 * pi^2 * G^2 * rho^2 * alpha * r0^5 * e_inf[1,0] * 1/T + 16 * pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^6 * e_inf[1,0]^2)
+ 144 * pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^4 - 32 * pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^6 * e_inf[1,0]^2 * alpha - 96 * pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^5 * e_inf[1,0] * 1/T - 9 * e_s2,0(0) != 0

>
alias(a[infinity][2,0]=a_inf[2,0]);
alias(c[infinity][2,0]=c_inf[2,0]);
C_b[17]:=a_inf[2,0] * inv_I^2 * (G_c_rho0 * r0^3 * 4/3 * pi)^2;
C_b[19]:=c_inf[2,0] * inv_I^2 * (G_c_rho0 * r0^3 * 4/3 * pi)^2;
C_b17 := 16/9 * a_inf[2,0]^2 * G^2 * rho^2 * r0^6 * pi^2
C_b19 := 16/9 * c_inf[2,0]^2 * G^2 * rho^2 * r0^6 * pi^2

```

```

> a[2,0]:=unapply(simplify(convert(series(simplify(a[2,0](r)),inv_l),piecewise,r)),r):
b[2,0]:=unapply(simplify(convert(simplify(b[2,0](r)),piecewise,r)),r):
c[2,0]:=unapply(simplify(convert(simplify(c[2,0](r_s),r_s=r),r>=r0,piecewise,r)),r):
a[2,0]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(a[2,0](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(a[2,0](r_b),r_b=r)),r):
b[2,0]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(b[2,0](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(b[2,0](r_b),r_b=r)),r):
c[2,0]:=unapply(piecewise(r<r0,eval(c[2,0](r_s),r_s=r),r>=r0,eval(c[2,0](r_b),r_b=r)),r):
'a[2,0](r)'=vereenvoudig(a[2,0](r),16/9*pi^2*G^2*rho0^2*r0^6,"no");
'b[2,0](r)'=vereenvoudig(b[2,0](r),16/9*pi^2*G^2*rho0^2*r0^6,"no");
'c[2,0](r)'=vereenvoudig(c[2,0](r),16/9*pi^2*G^2*rho0^2*r0^6,"no");

```

$$a_{2,0}(r) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi^2 G^2 \rho_0^2 (r^4 - 2 r_0^2 r^2 + r_0^4) & r < r_0 \\ 0 & r_0 \leq r \end{cases} + \frac{1}{7} \begin{cases} \frac{16}{9} \pi^2 G^2 \rho_0^2 a_{\infty 1,0} r_0^3 (r^2 - 3 r_0^2) & r < r_0 \\ -\frac{32}{9} \pi^2 G^2 \rho_0^2 r_0^6 a_{\infty 1,0} & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$b_{2,0}(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ 0 & r_0 \leq r \end{cases} + \frac{1}{7} \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ 0 & r_0 \leq r \end{cases}$$

$$c_{2,0}(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ 0 & r_0 \leq r \end{cases} + \frac{1}{7} \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ 0 & r_0 \leq r \end{cases}$$

Zoek de oplossing tot op eerste orde in $\frac{1}{\gamma^2}$

```

> a[2,1]:=r->a_s[2,1](r)*Heaviside(r0-r)+a_b[2,1](r)*Heaviside(r-r0):
b[2,1]:=r->b_s[2,1](r)*Heaviside(r0-r)+b_b[2,1](r)*Heaviside(r-r0):
c[2,1]:=r->c_s[2,1](r)*Heaviside(r0-r)+c_b[2,1](r)*Heaviside(r-r0):
d[2,1]:=r->d_s[2,1](r)*Heaviside(r0-r)+d_b[2,1](r)*Heaviside(r-r0):
e[2,1]:=r->e_s[2,1](r)*Heaviside(r0-r)+e_b[2,1](r)*Heaviside(r-r0):
p[2,1]:=r->p_s[2,1](r)*Heaviside(r0-r)+p_b[2,1](r)*Heaviside(r-r0):
eqns_G_s[2,1]:=eval(eqns_G[2,1],r=r_s):
eqns_G_b[2,1]:=eval(eqns_G[2,1],r=r_b):
eqns_K_s[2,1]:=eval(eqns_K[2,1],r=r_s):
eqns_K_b[2,1]:=eval(eqns_K[2,1],r=r_b):
Opl_s[2,1]:=dsolve({op(eqns_G_s[2,1]),eqns_K_s[2,1][1],eqns_K_s[2,1][2],eqns_K_s[2,1][3]},
(x_s),e_s[2,0](x_s),e_s[2,1](x_s)):
Opl_b[2,1]:=dsolve({op(eqns_G_b[2,1]),eqns_K_b[2,1][1],eqns_K_b[2,1][2],eqns_K_b[2,1][3]},
(x_b),e_b[2,0](x_b),e_b[2,1](x_b)):
C_s[aaant_int_cst+4],_C5=C_s[aaant_int_cst+5],_C6=C_s[aaant_int_cst+6],Opl_s[2,1]:
C_s[aaant_int_cst+4],_C5=C_s[aaant_int_cst+5],_C2=C_s[aaant_int_cst+2],_C3=C_s[aaant_int_cst+3],_C4=
Opl_b[2,1]:=dsolve({op(eqns_G_b[2,1]),eqns_K_b[2,1][1],eqns_K_b[2,1][2],eqns_K_b[2,1][3]},
(r_b),e_b[2,0](r_b),e_b[2,1](r_b)):

```

```

OPL_b[2,1]:=subs({C1=C_b[aaant_int_cst+1],C2=C_b[aaant_int_cst+2],C3=C_b[aaant_int_cst+3],_C4=C_b[aaant_int_cst+4],_C5=C_b[aaant_int_cst+5],_C6=C_b[aaant_int_cst+6]},OPL_b[2,1]):
aaant_int_cst:=aaant_int_cst+6:
>
a_s[2,1]:=unapply(value(rhs(OPL_s[2,1][1])),r_s):
b_s[2,1]:=unapply(rhs(OPL_s[2,1][2]),r_s):
c_s[2,1]:=unapply(value(rhs(OPL_s[2,1][3])),r_s):
d_s[2,1]:=unapply(rhs(OPL_s[2,1][4]),r_s):
e_s[2,0]:=unapply(rhs(OPL_s[2,1][5]),r_s):
>
a_b[2,1]:=unapply(value(rhs(OPL_b[2,1][1])),r_b):
b_b[2,1]:=unapply(value(rhs(OPL_b[2,1][2])),r_b):
c_b[2,1]:=unapply(value(rhs(OPL_b[2,1][3])),r_b):
d_b[2,1]:=unapply(value(rhs(OPL_b[2,1][4])),r_b):
e_b[2,0]:=unapply(value(rhs(OPL_b[2,1][5])),r_b):
>
RVW:=simplify(value({RVW_G[2,1],RVW_K[2,0],RVW_K[2,1][1],RVW_K[2,1][4]})):
>
opl:=simplify(solve(RVW,{C_s[21],C_s[22],C_s[23],C_s[24],C_s[25],C_s[26]})):
C_s[21]:=rhs(opl[1]):
C_s[22]:=rhs(opl[2]):
C_s[23]:=rhs(opl[3]):
C_s[24]:=rhs(opl[4]):
C_s[25]:=rhs(opl[5]):
C_s[26]:=rhs(opl[6]):
>
limit(diff(a[2,1](r),r),r=0)=0:
op([1,1,1],%)=0:
C_b[25]:=solve(%C_b[25]);
limit(diff(b[2,1](r),r),r=0)=0:
op([1,1,1],%)=0:
C_b[22]:=solve(%C_b[22]);
limit(diff(c[2,1](r),r),r=0)=0:
op([1,2,1],%)=0:
C_b[23]:=solve(%C_b[23]);
limit(diff(d[2,0](r),r),r=0)=0:
limit(diff(e[2,0](r),r),r=0)=0:
C_b_25:=-1/210*1/(alpha-1)*(-504*r0^8*G^2*pi^2*rho^2*exp(alpha,0)/r+280*r0^8*G^2*pi^2*rho^2*alpha*exp(alpha,0)/r-2816*pi^2*G^2*rho^2*r0^7+315*C_b_22
+504*r0^8*G^2*pi^2*exp(alpha,0)/r-280*r0^8*G^2*pi^2*rho^2*1/r*c_alpha,0-315*C_b_22*alpha+280*rho^2*pi^2*G^2*r0^8*exp(alpha,0)/r)
>
signum(1/(alpha-1)*(56*r0^8*G^2*pi^2*rho^2*alpha*exp(alpha,0)/r-280*r0^8*G^2*pi^2*rho^2*exp(alpha,0)/r+alpha+280*r0^8*G^2*pi^2*rho^2*exp(alpha,0)/r-768*pi^2*G^2*rho^2*r0^7
-56*r0^8*G^2*pi^2*rho^2*1/r*c_alpha,0+56*rho^2*pi^2*G^2*r0^8*exp(alpha,0)/r+315*C_b_22*alpha-315*C_b_22))=0

```

```

C_b22 := 8 * pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^7 * (7 * r0 * alpha * c_infinity[0,0] * 1/T - 35 * e_infinity[0,0] * 1/T * r0 * alpha + 35 * e_infinity[0,0] * 1/T * r0 - 96 - 7 * r0 * 1/T * c_infinity[0,0] + 7 * r0 * a_infinity[0,0] * 1/T) / 315
C_b23 := 16 / (945 * (1 - 2 * alpha + alpha^2)) * (pi^2 * G^2 * rho^2 * r0^7 * (91 * e_infinity[0,0] * 1/T * r0 * alpha - 42 * e_infinity[0,0] * 1/T * r0 * alpha^2 - 7 * r0 * alpha * c_infinity[0,0] * 1/T + 42 * r0 * 1/T * a_infinity[0,0] * alpha + 376 - 312 * alpha + 7 * r0 * 1/T * c_infinity[0,0] - 49 * e_infinity[0,0] * 1/T * r0 - 49 * r0 * a_infinity[0,0] * 1/T))
> limit(a[2,1](r), r=0) <> infinity:
limit(b[2,1](r), r=0) <> infinity:
limit(c[2,1](r), r=0) <> infinity:
limit(d[2,0](r), r=0) <> infinity:
limit(e[2,0](r), r=0) <> infinity:
> alias(a[infinity][2,1]=a_inf[2,1]): alias(c[infinity][2,1]=c_inf[2,1]): alias(e[infinity][2,0]
=e_inf[2,0]):
C_b[21] := a_inf[2,1] * r0^2 * inv_1^2 * (G_c * rho0 * r0^3 * 4/3 * pi)^2;
C_b[24] := c_inf[2,1] * r0^2 * inv_1^2 * (G_c * rho0 * r0^3 * 4/3 * pi)^2;
C_b[26] := e_inf[2,0] * inv_1^2 * (G_c * rho0 * r0^3 * 4/3 * pi)^2;
C_b21 := 16 / 9 * a_infinity[0,0] * r0^8 * (1/T)^2 * G^2 * rho^2 * pi^2
C_b24 := 16 / 9 * c_infinity[0,0] * r0^8 * (1/T)^2 * G^2 * rho^2 * pi^2
C_b26 := 16 / 9 * e_infinity[0,0] * (1/T)^2 * G^2 * rho^2 * r0^6 * pi^2
> a[2,1] := unapply(simplify(convert(series(simplify(a[2,1](r)), inv_1, piecewise, r)), r):
b[2,1] := unapply(simplify(convert(series(simplify(b[2,1](r)), inv_1, piecewise, r)), r):
c[2,1] := unapply(simplify(convert(series(simplify(c[2,1](r)), inv_1, piecewise, r)), r):
d[2,0] := unapply(simplify(convert(series(simplify(d[2,0](r)), inv_1, piecewise, r)), r):
e[2,0] := unapply(simplify(convert(series(simplify(e[2,0](r)), inv_1, piecewise, r)), r):
a[2,1] := unapply(piecewise(r<r0, eval(a[2,1](r_s), r_s=r), r>=r0, eval(a[2,1](r_b), r_b=r)), r):
b[2,1] := unapply(piecewise(r<r0, eval(b[2,1](r_s), r_s=r), r>=r0, eval(b[2,1](r_b), r_b=r)), r):
c[2,1] := unapply(piecewise(r<r0, eval(c[2,1](r_s), r_s=r), r>=r0, eval(c[2,1](r_b), r_b=r)), r):
d[2,0] := unapply(piecewise(r<r0, eval(d[2,0](r_s), r_s=r), r>=r0, eval(d[2,0](r_b), r_b=r)), r):
e[2,0] := unapply(piecewise(r<r0, eval(e[2,0](r_s), r_s=r), r>=r0, eval(e[2,0](r_b), r_b=r)), r):
'a[2,1](r) := vereenvoudig(a[2,1](r), 16/9 * pi^2 * G^2 * rho0^2 * r0^6, 'tweedeorde');
'b[2,1](r) := vereenvoudig(b[2,1](r), 16/9 * pi^2 * G^2 * rho0^2 * r0^6, 'tweedeorde');
'c[2,1](r) := vereenvoudig(c[2,1](r), 16/9 * pi^2 * G^2 * rho0^2 * r0^6, 'tweedeorde');
'd[2,0](r) := vereenvoudig(d[2,0](r), 16/9 * pi^2 * G^2 * rho0^2 * r0^6, 'tweedeorde');
'e[2,0](r) := vereenvoudig(e[2,0](r), 16/9 * pi^2 * G^2 * rho0^2 * r0^6, 'tweedeorde');

```

$$\begin{aligned}
a_{2,1}(r) &= \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{-2}{315} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 (57 r^7 - 721 r^5 \rho l^2 + 567 r^3 \rho l^4 + 1505 r \rho l^6)}{(\alpha-1)r} \right) + \frac{1}{7} & r < r_0 \\ & \left(\frac{-2816}{315} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^7}{r(\alpha-1)} \right) & r_0 \leq r \end{aligned} \right. \\
&= \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^6}{r^3(\alpha-1)} \left(-\frac{1}{20} \frac{(-45 \rho l^4 - 30 \rho l^2 r^2 + 7 r^4) a_{\infty 1,0}}{\rho l^3} + \frac{(r^2 - 3 \rho l^2) a_{\infty 1,1}}{\rho l} - \frac{1}{2} \frac{(-\rho l^4 - 2 \rho l^2 r^2 + r^4) c_{\infty 1,0}}{\rho l^3} + \frac{1}{20} \frac{(-45 \rho l^4 - 30 \rho l^2 r^2 + 7 r^4) e_{\infty 1,0}}{\rho l^3} \right) \right) & r < r_0 \\ & \left(\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^6}{(\alpha-1)r} \left(\frac{1}{10} \frac{(25 r^2 + 9 \rho l^2) a_{\infty 1,0}}{r} - \frac{1}{2} \frac{r^2 a_{\infty 1,1}}{r} + \frac{1}{10} \frac{(r^2 + r^2) c_{\infty 1,0}}{r} - \frac{1}{10} \frac{(25 r^2 + 9 \rho l^2) e_{\infty 1,0}}{r} \right) \right) & r_0 \leq r \end{aligned} \right. \\
&= \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^6}{r^3(\alpha-1)} \left(-\frac{1}{12} \frac{4 r^2 e_{\infty 2,0} - 12 a_{\infty 2,1} \rho l^2 - 3 r^2 e_{\infty 1,0} a_{\infty 1,0} + 3 r^2 c_{\infty 1,0} a_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)^3} - \frac{1}{8} \frac{r^2 (c_{\infty 1,0} - e_{\infty 1,0})^2}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{8} \frac{r^2 a_{\infty 1,0}^2}{(\alpha-1)^4} \right) \right) & r < r_0 \\ & \left(\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^6}{(\alpha-1)r} \left(-\frac{1}{12} \frac{4 r^2 e_{\infty 2,0} - 12 a_{\infty 2,1} \rho l^2 - 3 r^2 e_{\infty 1,0} a_{\infty 1,0} + 3 r^2 c_{\infty 1,0} a_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)^3} - \frac{1}{8} \frac{r^2 (c_{\infty 1,0} - e_{\infty 1,0})^2}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{8} \frac{r^2 a_{\infty 1,0}^2}{(\alpha-1)^4} \right) \right) & r_0 \leq r \end{aligned} \right. \\
b_{2,1}(r) &= \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{16}{105} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 (35 r^3 \rho l^4 - 21 r^5 \rho l^2 + 5 r^7)}{(\alpha-1)r} \right) + \frac{1}{7} & r < r_0 \\ & \left(\frac{16}{105} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 (35 r \rho l^6 - 16 \rho l^7)}{(\alpha-1)r} \right) & r_0 \leq r \end{aligned} \right. \\
&= \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^6}{r^3(\alpha-1)} \left(\frac{1}{10} \frac{r^2 (-5 \rho l^2 + r^2) a_{\infty 1,0}}{\rho l^3(\alpha-1)} + \frac{1}{10} \frac{r^2 (-5 \rho l^2 + r^2) c_{\infty 1,0}}{\rho l^3} - \frac{1}{2} \frac{r^2 (-5 \rho l^2 + r^2) e_{\infty 1,0}}{\rho l^3} \right) \right) & r < r_0 \\ & \left(\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^6}{(\alpha-1)r} \left(-\frac{1}{10} \frac{(-\rho l^2 + 5 r^2) a_{\infty 1,0}}{(\alpha-1)r} - \frac{1}{10} \frac{(-\rho l^2 + 5 r^2) c_{\infty 1,0}}{r} + \frac{1}{2} \frac{(-\rho l^2 + 5 r^2) e_{\infty 1,0}}{r} \right) \right) & r_0 \leq r \end{aligned} \right. \\
&= \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^6}{r^3(\alpha-1)} \left(\frac{1}{12} \frac{r^2 (-6 e_{\infty 2,0} + 2 e_{\infty 2,0} - 3 e_{\infty 1,0} a_{\infty 1,0} + c_{\infty 1,0} a_{\infty 1,0})}{(\alpha-1)^3} + \frac{1}{8} \frac{r^2 (c_{\infty 1,0} - e_{\infty 1,0})^2}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{24} \frac{r^2 (a_{\infty 1,0} - 4 a_{\infty 2,0})}{(\alpha-1)^4} \right) \right) & r < r_0 \\ & \left(\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho l^2 \rho l^6}{(\alpha-1)r} \left(\frac{1}{12} \frac{r^2 (-6 e_{\infty 2,0} + 2 e_{\infty 2,0} - 3 e_{\infty 1,0} a_{\infty 1,0} + c_{\infty 1,0} a_{\infty 1,0})}{(\alpha-1)^3} + \frac{1}{8} \frac{r^2 (c_{\infty 1,0} - e_{\infty 1,0})^2}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{24} \frac{r^2 (a_{\infty 1,0} - 4 a_{\infty 2,0})}{(\alpha-1)^4} \right) \right) & r_0 \leq r \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2,1}(r) &= \left\{ \left\{ \frac{(\alpha-1)^2}{945} \left(4 \pi^2 G^2 \rho^2 (79 r^8 + 245 r^2 r^6 + 1680 r^2 r^6 \ln(r)) - 609 r^6 r^6 + 1365 r^4 r^6 - 4 \pi^2 G^2 \rho^2 (420 r r^6 - 35 r^3 r^6 + 165 r^7 - 294 r^5 r^6) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{(\alpha-1)^3 r^2}{945} \left(4 \pi^2 G^2 \rho^2 (1680 r^6 \ln(r)) r^2 + 1248 r^7 r - 168 r^8 \right) - \frac{1024 \pi^2 G^2 \rho^2 r^7}{945 (\alpha-1)^4 r} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left. \begin{array}{l} r < r_0 \\ r_0 \leq r \end{array} \right\} + \frac{1}{7} \right\} \\
&= \left\{ \frac{16 \pi^2 G^2 \rho^2 r^6}{9} \left(\frac{1}{30} \frac{(13 r^4 \alpha - 60 r^2 r^2 \alpha - 45 r^4 \alpha + 45 r^4 - 11 r^4 + 50 r^2 r^2) a_{\alpha_1,0}}{r^3 (\alpha-1)^2} + \frac{1}{15} r^2 (5 r^2 \alpha + r^2 - 15 \alpha r^2 - 5 r^2) c_{\alpha_1,0} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{30} \frac{(-45 r^4 \alpha + 45 r^4 - 30 r^2 r^2 \alpha + 50 r^2 r^2 + 3 r^4 \alpha - 11 r^4) e_{\alpha_1,0}}{r^3 (\alpha-1)} \right\} + \left(\frac{1}{7} \right)^2 \\
&= \left\{ \frac{16 \pi^2 G^2 \rho^2 r^6}{9} \left(-\frac{1}{15} \frac{(6 \alpha r^2 + 40 r^2 \alpha - 7 r^2 - 35 r^2) a_{\alpha_1,0}}{r (\alpha-1)^2} - \frac{1}{15} \frac{(10 r^2 \alpha + 5 r^2 - r^2) c_{\alpha_1,0}}{(\alpha-1) r} + \frac{1}{15} \frac{(5 r^2 + r^2) (6 \alpha - 7) e_{\alpha_1,0}}{(\alpha-1) r} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{16 \pi^2 G^2 \rho^2 r^6}{9} \left(-\frac{1}{3} \frac{-3 c_{\alpha_2,1} r^6 + r^2 c_{\alpha_1,0} e_{\alpha_1,0} - r^2 c_{\alpha_2,0} + r^2 e_{\alpha_1,0}^d e_{\alpha_1,0}}{(\alpha-1)^3} - \frac{1}{3} \frac{r^2 c_{\alpha_1,0} e_{\alpha_1,0}}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{3} \frac{r^2 (a_{\alpha_2,0} + e_{\alpha_2,0} + c_{\alpha_2,0})}{(\alpha-1)^4} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{16 \pi^2 G^2 \rho^2 r^6}{9} \left(-\frac{1}{3} \frac{-3 c_{\alpha_2,1} r^6 + r^2 c_{\alpha_1,0} e_{\alpha_1,0} - r^2 c_{\alpha_2,0} + r^2 e_{\alpha_1,0}^d e_{\alpha_1,0}}{(\alpha-1)^3} - \frac{1}{3} \frac{r^2 c_{\alpha_1,0} e_{\alpha_1,0}}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{3} \frac{r^2 (a_{\alpha_2,0} + e_{\alpha_2,0} + c_{\alpha_2,0})}{(\alpha-1)^4} \right) \right. \\
&\quad \left. \left\{ \begin{array}{l} -\frac{4}{315} \frac{(\alpha-1) \pi^2 G^2 \rho^2 (1295 r^3 r^6 - 1638 r^5 r^6 + 295 r^7)}{r^3} \quad r < r_0 \\ -\frac{4}{315} \frac{(\alpha-1) \pi^2 G^2 \rho^2 (512 r^7 - 560 r r^6)}{r^3} \quad r_0 \leq r \end{array} \right\} + \frac{1}{7} \right\} \\
d_{2,0}(r) &= \left\{ \frac{16 \pi^2 G^2 \rho^2 r^6}{9} \left(-\frac{1}{5} \frac{(\alpha-1) (3 r^2 - 5 r^2) a_{\alpha_1,0}}{r^3} - \frac{1}{5} \frac{(\alpha-1)^2 (3 r^2 - 5 r^2) c_{\alpha_1,0}}{r^3} + \frac{2}{5} \frac{(\alpha-1)^2 (-10 r^2 + 9 r^2) e_{\alpha_1,0}}{r^3} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{16 \pi^2 G^2 \rho^2 r^6}{9} \left(\frac{2}{5} \frac{(\alpha-1) r^2 a_{\alpha_1,0}}{r^3} + \frac{2}{5} \frac{r^2 (\alpha-1)^2 c_{\alpha_1,0}}{r^3} - \frac{2}{5} \frac{r^2 (\alpha-1)^2 e_{\alpha_1,0}}{r^3} \right) \right. \\
&\quad \left. \left\{ \begin{array}{l} r < r_0 \\ r_0 \leq r \end{array} \right\} + \left(\frac{1}{7} \right)^2 \right\} \\
&= \left\{ \frac{16 \pi^2 G^2 \rho^2 r^6}{9} \left(-e_{\alpha_1,0} - \frac{e_{\alpha_2,0}}{\alpha-1} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{16 \pi^2 G^2 \rho^2 r^6}{9} \left(-e_{\alpha_1,0} - \frac{e_{\alpha_2,0}}{\alpha-1} \right) \right. \\
&\quad \left. \left\{ \begin{array}{l} r < r_0 \\ r_0 \leq r \end{array} \right\} + \left(\frac{1}{7} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$e_{2,0}(r) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{-4}{315} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 (-35 r^3 r^4 + 165 r^7 - 294 r^5 r^2)}{(\alpha-1) r^3} + \frac{1}{7} \right] \quad r < r_0 \\ \left[\frac{4}{315} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 (256 r^7 - 420 r r^6)}{(\alpha-1) r^3} \right] \quad r_0 \leq r \end{array} \right. + \left(\frac{1}{7} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 r^6 \left(\frac{1}{5} \frac{(-5 r^2 + r^2) a_{\infty 1,0}}{r^3} + \frac{1}{5} \frac{(-5 r^2 + r^2) e_{\infty 1,0}}{r^3} + 2 \frac{(-5 r^2 + 2 r^2) e_{\infty 1,0}}{r^3} \right)}{r^3} \right] \quad r < r_0 \\ \left[\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 r^6 \left(-\frac{1}{5} \frac{(-r^2 + 5 r^2) a_{\infty 1,0}}{r^3} - \frac{1}{5} \frac{(-r^2 + 5 r^2) e_{\infty 1,0}}{r^3} + \frac{1}{5} \frac{(5 r^2 + r^2) e_{\infty 1,0}}{r^3} \right)}{r^3} \right] \quad r_0 \leq r \end{array} \right. + \left(\frac{1}{7} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 r^6 e_{\infty 2,0}}{r^3} \right] \quad r < r_0 \\ \left[\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 r^6 e_{\infty 2,0}}{r^3} \right] \quad r_0 \leq r \end{array} \right.$$

$d^{(2,1)}(r)$ is afhankelijk van de tot op deze orde vrije functie $e^{(2,1)}(r)$.

```
> d[2,1] := unapply(factor(simplify(convert(series(simplify(d[2,1](r)), inv 1), piecewise, r)), r) :
d[2,1] := unapply(piecewise(r < r0, eval(d[2,1](r, s), r = r), r >= r0, eval(d[2,1](r, b), r = b)), r) :
'd[2,1](r) := vereenvoudig(d[2,1](r), 16/9 * pi^2 * rho^2 * rho^6, 'tweedeorde');
```

$$d_{2,1}(r) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\alpha-1 \right)^2 \left(-r \left(\frac{d}{dr} e_{s_{2,1}}(r) \right) - e_{s_{2,1}}(r) \right) - \frac{8}{315} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 (630 r r^6 + 139 r^7 - 966 r^5 r^2 + 315 r^3 r^4)}{r(\alpha-1)} \right] \quad r < r_0 \\ \left[\frac{8}{315} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 (315 r^2 r^6 + 327 r^8 - 903 r^6 r^2 + 315 r^4 r^4)}{(\alpha-1)^2 r^2} \right] \quad r_0 \leq r \end{array} \right. + \left(\alpha-1 \right)^2 \left(-e_{b_{2,1}}(r) - r \left(\frac{d}{dr} e_{b_{2,1}}(r) \right) - \frac{8}{315} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 (70 r r^6 + 48 r^7)}{r(\alpha-1)} \right) + \frac{8}{315} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 (210 r^2 r^6 - 28 r^8 - 128 r^7 r)}{(\alpha-1)^2 r^2} \quad r_0 \leq r$$

$$+ \left(\frac{1}{7} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 r^6 \left(-\frac{1}{15} \frac{r^2 (-9 \alpha r^2 - 25 r^2 + 36 r^2 + 3 r^2 \alpha) a_{\infty 1,0}}{r^3} - \frac{1}{15} \frac{(-9 \alpha r^2 - 25 r^2 + 36 r^2 + 3 r^2 \alpha) e_{\infty 1,0}}{r^3} \right)}{r^3} \right] \quad r < r_0 \\ \left[\frac{1}{10} \frac{(-94 r^2 r^2 \alpha + 142 r^2 r^2 + 44 r^4 \alpha - 77 r^4 - 30 r^7 \alpha + 45 r^6) (\alpha-1) e_{\infty 1,0}}{r^3} + \frac{6 (\alpha-1)^2 (-r_0 + r) (r + r_0) e_{\infty 1,1}}{r} \right] \quad r_0 \leq r \end{array} \right. + \frac{1}{7} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{16}{9} \frac{\pi^2 G^2 \rho^2 r^6 \left(\frac{1}{15} \frac{(6 r^2 \alpha - 14 r^2 + 3 r^2) a_{\infty 1,0}}{r} + \frac{1}{15} \frac{(6 r^2 \alpha - 14 r^2 + 3 r^2) e_{\infty 1,0}}{r} \right)}{r} \right] \quad r < r_0 \\ \left[-\frac{1}{5} \frac{(38 r^2 \alpha - 54 r^2 + 2 \alpha r^2 - r^2) (\alpha-1) e_{\infty 1,0}}{r} \right] \quad r_0 \leq r \end{array} \right.$$

$$\left[\left[\left[\frac{16}{9} \pi^2 G^2 \rho \bar{\rho}^2 r^6 \left(\frac{1}{5} r^2 c_{\omega_1,0} e_{\omega_1,0} - \frac{1}{6} r^2 c_{\omega_1,0}^2 - 2 r^2 e_{\omega_1,1} e_{\omega_1,0} - \frac{13}{10} r^2 e_{\omega_1,0}^2 - \frac{1}{30} \frac{r^2 (5 c_{\omega_2,0} - 15 e_{\omega_2,0} + 5 c_{\omega_1,0} a_{\omega_1,0} + 18 c_{\omega_1,0} e_{\omega_1,0} - 18 e_{\omega_1,0}^2 - 6 e_{\omega_1,0} a_{\omega_1,0})}{\alpha - 1} - \frac{1}{30} \frac{r^2 (18 e_{\omega_1,0} a_{\omega_1,0} + 5 a_{\omega_2,0})}{(\alpha - 1)^2} \right) \right] \right] \right]_{r < r_0}$$

$$+ \left(\frac{1}{7} \right)^2 \left[\left[\left[\frac{16}{9} \pi^2 G^2 \rho \bar{\rho}^2 r^6 \left(\frac{1}{5} r^2 c_{\omega_1,0} e_{\omega_1,0} - \frac{1}{6} r^2 c_{\omega_1,0}^2 - 2 r^2 e_{\omega_1,1} e_{\omega_1,0} - \frac{13}{10} r^2 e_{\omega_1,0}^2 - \frac{1}{30} \frac{r^2 (5 c_{\omega_2,0} - 15 e_{\omega_2,0} + 5 c_{\omega_1,0} a_{\omega_1,0} + 18 c_{\omega_1,0} e_{\omega_1,0} - 18 e_{\omega_1,0}^2 - 6 e_{\omega_1,0} a_{\omega_1,0})}{\alpha - 1} - \frac{1}{30} \frac{r^2 (18 e_{\omega_1,0} a_{\omega_1,0} + 5 a_{\omega_2,0})}{(\alpha - 1)^2} \right) \right] \right] \right]_{r_0 \leq r}$$

Bibliografie

- [1] M. Baes, *Cursusnota's Galactische Sterrenkunde* (Universiteit Gent, 2008),
- [2] M. Baes, *Cursusnota's Sterrenkunde* (Universiteit Gent, 2008),
- [3] M. Bañados, *Eddington-Born-Infeld action for dark matter and dark energy*, Phys. Rev. D **77**, 123534 (2008), 1-12,
- [4] M. Bañados, private communicatie (23 maart 2010),
- [5] M. Bañados, P. G. Ferreira en C. Skordis, *Eddington-Born-Infeld gravity and the large scale structure of the Universe*, Phys. Rev. D **79**, 063511 (2009), 1-13,
- [6] M. Bañados, A. Reisenegger en N. Rojas, (nog niet gepubliceerd),
- [7] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity* (University of California, 1997),
- [8] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Addison Wesley, 2004),
- [9] S. M. Carroll, *Dark Energy and the Preposterous Universe*, S&T: March 2005 (2005), 32-39,
- [10] W. L. Craig, http://www.euroleadershipresources.org/resource.php?ID=51#_edn1, (10 maart 2010),
- [11] S. De Rijcke, *Cursusnota's Kosmologie* (Universiteit Gent, 2009),
- [12] A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (1917),
- [13] A. A. Friedman, *Über die Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik **10** (1922), 377-386,
- [14] E. P. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. N. A. S. **15**, 3 (1929), 168-173
- [15] W. Kahan, <http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/MathH110/jacobi.pdf>, (3 februari 2010),
- [16] A. Kosowsky en J. A. Sellwood, *Does Dark Matter Exist?*, arXiv:astro-ph/0009074v1 (2000),
- [17] G. Lemaître, *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **47** (1927), 49-59
- [18] M. Lubo, *Can Born Infeld Gravity Explain Galaxy Rotation Curves?*, arXiv:0804.2205 [hep-th] (2008), 1-7,
- [19] S. McGaugh, *Seeing Through Dark Matter*, Science **317** (2007), 607-608,
- [20] M. Milgrom, *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*, ApJ **270** (1983), 365-370,

- [21] J. P. Ostriker en P. Steinhardt, *New Light on Dark Matter*, Science **300** (2003), 1909-1913,
- [22] R. Panek, *The Father of Dark Matter Still Gets No Respect*, Discover: January 2009 (2009),
- [23] A. A. Penzias en R. W. Wilson, *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, ApJ **142**, 1 (1965), 419-421,
- [24] S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*, ApJ **517**, 2 (1999), 565-586,
- [25] H. P. Robertson, *Kinematics and world structure*, ApJ **82** (1935), 284-301,
- [26] W. Sarlet, *Cursusnota's Differentiaalmeetkunde II* (Universiteit Gent, 2009),
- [27] W. Sarlet, *Cursusnota's Theoretische Mechanica II* (Universiteit Gent, 2008),
- [28] B. P. Schmidh et al., *The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae*, ApJ **507**, 1 (1998), 46-63,
- [29] H. Verschelde, *Cursusnota's Relativiteitstheorie en klassieke velden* (Universiteit Gent, 2007),
- [30] A. G. Walker, *On Milne's Theory of World-Structure*, Proc. London Math. Soc. **s2-42**, 1 (1937), 90-127,
- [31] Wikipedia, <http://www.wikipedia.org> (3 februari 2010),
- [32] F. Zwicky, *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*, Helvetica Physica Acta **6** (1933), 110-127

Lijst van figuren

1.1	Een schets van de geschiedenis van het universum. Met het expanderen van het universum wordt niet bedoeld dat de materie die in dat universum aanwezig is van elkaar weg beweegt, maar veeleer dat het vacuüm waaruit het universum bestaat toeneemt. Dit fenomeen valt te vergelijken met twee knikkers die door een elastiek met elkaar verbonden zijn. Op het elastiek zijn afstanden aangeduid, het is dus geijkt. Rekt men nu het elastiek uit, dan is niet alleen de afstand tussen de twee knikkers vergroot, maar ook de geijkte afstanden werden beïnvloed. © NASA	2
1.2	De distributie van galactieën in ons universum. Gezien van op de aarde, die zich in de top van de afgebeelde kegel bevindt, ziet het heelal er in elke richting hetzelfde uit. De speciale structuur die te zien is heet het <i>kosmisch web</i> . © 2dFGRS	2
1.3	De geobserveerde rotatiesnelheden van de Triangulum Galaxy (M33), één van onze dichtste burens, vergeleken met de door de tweede wet van Newton voorspelde rotatiecurve. De geobserveerde rotatiecurve gaat naar een eindige, positieve waarde, terwijl verwacht zou worden dat de snelheden in de buitenste regionen van de galactie naar nul zouden naderen. © Sheffield PPPA Group	3
2.1	De evolutie van de schaalfactor voor het Friedman- en het EBI-model voor $\alpha = 0.99$. © M. Bañados	15
2.2	$f(k)$ voor $k \in]1, \infty[$	22
2.3	$r(k)$ voor $\text{sgn}A_0 \neq \text{sgn}B_0$. Merk op dat het geval $A_0 = 0$ ontaardt in een rechte.	23
2.4	Rotatiecurves voor $v_\infty = 100$ km/s en $k_0 = 1,5$ en $k_0 = 5$	24
3.1	De rotatiecurve (in km/s) van de Triangulum Galaxy (M33) voorspeld door het EBI-model (rood) vergeleken met het Newtoniaanse resultaat (blauw). $l = 10^9$ pc. Vergelijk ook met figuur 1.3.	40
3.2	De rotatiecurve (in km/s) van de Triangulum Galaxy (M33) voorspeld door het EBI-model (rood) vergeleken met het Newtoniaanse resultaat (blauw), wanneer l van galactische schaal is. $l = 2 \cdot 10^4$ pc. Het EBI-veld heeft een duidelijk effect vanaf $r \sim l$. Let wel, het is niet gegarandeerd dat de oplossing juist is voor $r > l$	41
4.1	Bovenste paneel: Het angulair powerspectrum C_l van de kosmische achtergrondstraling gemeten met de WMAP-satelliet (data-punten) en volgens het Λ EBI-model (volle lijn). Onderste paneel: Het baryon powerspectrum $P(k)$ voor het Λ EBI-model (volle lijn) samen met data van de SDSS (data-punten). © M. Bañados, P. G. Ferreira en C. Skordis	43
4.2	Het angulair powerspectrum C_l (links) en het powerspectrum $P(k)$ (rechts) van enkele EBI-modellen (onderbroken lijnen) vergeleken met het best-passende Λ CDM- of Λ EBI-model (volle lijn). © M. Bañados, P. G. Ferreira en C. Skordis	43

Lijst van documenten

A.1	Maple procedures voor het berekenen van de Christoffelsymbolen, de Ricci-tensor en de Einsteintensor horend bij een bepaalde metriek, voor het berekenen van covariante afgeleiden, voor het perturberen van vergelijkingen volgens een bepaalde variabele en het opstellen van de geper-turbeerde vergelijkingen voor de actie (2.1).	46
A.2	Maple code en output voor het berekenen en omvormen van de bewegingsvergelijkingen voor een vlak, homogeen en isotroop universum.	49
A.3	Maple code en output om aan te tonen dat $K_{\mu\nu} = 0$ als (2.41) gekozen wordt als nulde orde vorm voor $q_{\mu\nu}$	53
A.4	Maple code en output voor het berekenen van de eerste orde vergelijkingen (2.38)-(2.39), na de nulde orde vorm voor $g_{\mu\nu}$ en $q_{\mu\nu}$ te hebben vastgelegd volgens (2.40)-(2.41).	54
A.5	Maple code en output voor het berekenen van de oplossingen van de eerste orde veldvergelijkin-gen, zoals in document A.4 berekend, maar met $\frac{dk}{dr} > 0$, in functie van r en voor het berekenen van de corresponderende massadichtheid.	63
A.6	Maple code en output voor het berekenen van de oplossingen van de eerste orde veldvergelijkin-gen, zoals in document A.4 berekend, maar met $\frac{dk}{dr} > 0$, in functie van k	65
A.7	Maple code en output voor het berekenen van de integratieconstanten h_0 , A_0 en B_0 en de asym- potische rotatiesnelheid v_∞	66
A.8	Maple code en output voor het algemeen oplossen van de dubbele perturbatie voor $T_{\mu\nu}^{(m)} \neq 0$ tot aan de ordes (1,1) en (2,0).	67
A.9	Maple document dat de perturbatief berekende oplossing voor een massief scalair veld dat kop- pelt aan materie vergelijkt met de exacte oplossing om meer te weten te komen over de in de perturbatieve methode vrij gelaten integratieconstanten.	78
A.10	Maple code en output voor het oplossen van de dubbele perturbatie voor $T_{\mu\nu}^{(m)} \neq 0$ voor een compacte massa. De niet zichtbare code is identiek als het begin van het algemene geval in document A.8.	83