Faculteit Wetenschappen

Departement Wiskunde

Academiejaar 2010-2011

De kijk op meetkunde van leerlingen

een verborgen variabele

Hilde Hoegaerts

Eindwerk voorgelegd met het oog op het behalen van de graad van Master in de Wetenschappen: Wiskunde

Promotor: Prof. Dr. Johan Deprez

Medebeoordelaars: Prof. Dr. Van Oystayen en Prof. Dr. Meskens

Inhoudsopgave

Lijst van figuren

Lijst van tabellen

Samenvatting

De kijk die iemand op wiskunde heeft, is een belangrijke factor bij het oplossen van wiskundeproblemen. Maar hoe stimuleer je als wiskundeleerkracht het ontwikkelen van een positieve cognitieve kijk op bijvoorbeeld vlakke euclidische meetkunde bij je leerlingen? Omdat we op deze vraag in de literatuur geen pasklaar antwoord vonden ondernamen we deze studie, die opgevat is als een ontwikkelingsonderzoek. Na een grondige reflectie en literatuurstudie over 'beliefs' in meetkunde werd nagedacht over een goede didactische aanpak die de kijk van leerlingen kan voeden. Volgens de methode van realistisch meetkundeonderwijs werd een concrete lessenreeks voor 4ASO opgesteld die de structuur heeft van het probleemoplossingsmodel van professor Van Oystayen. Klasnormen werden expliciet aangegeven en het constructieprobleem van een graancirkel werd uitgekozen als lesinhoud.

Een eerste onderzoekscyclus vond plaats in een school te Berlaar. Na een bepaling van de voorkennis en het denkniveau van de leerlingen van 4D1E werd door een persoonlijk interview de kijk op meetkunde van drie leerlingen bepaald. Na het geven van een ingekorte versie van de lessenreeks werd een nieuwe reeks interviews afgenomen. Hoe tijdens de lessen concreet aan de kijk op meetkunde gewerkt werd en welke resultaten tijdens de lessen zelf merkbaar waren, wordt verderop in dit werk uitvoerig beschreven en verantwoord. In de loop van het onderzoek werden de onderzochte beliefs verfijnd aan de hand van de gegevens verkregen uit de interviews en observaties. De kijk op meetkunde van de drie leerlingen in 4D1E onderging een erg positieve evolutie. Dit geeft een indicatie voor het gunstig effect van de gehanteerde klasnormen, de behandelde materie en de realistische onderwijsmethode op beliefs.

Na een grondige retrospectie van het onderzoek te Berlaar startte een tweede onderzoekscyclus in Onze-Lieve-Vrouw-Waver. Hier werd alleen de kijk van leerlingen op deductie bestudeerd. Vanuit het eerste onderzoek en door een nieuwe literatuurstudie werd een gedetailleerde beschrijving en codering van de kijk op deductie mogelijk. Hierdoor konden de interviews en onderzoeken meer gestructureerd worden, wat de verwerking van de gegevens achteraf makkelijker maakte. Dat de voorgestelde lessenreeks voor SUI-Waver bijdroeg tot een verbetering van de kijk op deductie van de leerlingen van 4latA kan vermoed worden uit de vaststelling van een positieve evolutie bij twee leerlingen.

Welke van deze factoren de grootste bijdrage had tot de verbetering van de kijk op meetkunde is onderwerp voor een eventueel vervolgonderzoek. Analoog onderzoek op een veel grotere schaal is nodig om representatief te zijn en aan betekenis te winnen. Een samenwerking van verschillende onderzoekers is gewenst om de subjectiviteit van de interpretaties te verkleinen. Verder moet het probleemoplossingsgedrag van leerlingen geobserveerd worden om te zien welke de invloed van een verbetering van beliefs juist is. Ook op het terrein van affectieve beliefs moet nog gewerkt worden, om voorgoed af te rekenen met wiskundevrees, demotivatie, slinkend zelfvertrouwen en een dalend zelfbeeld ten gevolge van de wiskundelessen.

De lessenreeks over de Harlekijn is een product van dit onderzoek dat als inspirerend voor-

beeld voor anderen kan fungeren. De achterliggende ideeën en overwegingen kunnen in andere situaties toegepast worden. Een expliciete omschrijving van de kijk op meetkunde die wenselijk is voor leerlingen van ASO is een ander resultaat van dit onderzoek. Deze omschrijving kan erg nuttig zijn bij het zoeken naar de competenties die een leerling door wiskundeonderwijs moet verkrijgen.

Hoofdstuk 1

Inleiding

> "A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas." (Hardy, 1940)

Wiskunde doen is kunstwerken opbouwen met ideeën. Spijtig genoeg denkt niet iedereen er zo over. Heel wat studenten hebben een afkeer van wiskunde. Dit merkte ik op tijdens de bijlessen wiskunde die ik jarenlang gaf aan humaniorastudenten. Volwassenen proberen het gebruik van wiskunde zoveel mogelijk te vermijden.

Maar niet alleen in mijn omgeving of in België blijkt dit een probleem te zijn, wereldwijd wordt er gekampt met een slecht imago van wiskunde. De Amerikaan Paul Lockhart (2002) schreef op p.7 van zijn artikel 'A Mathematician's Lament'

> "I don't see how it's doing society any good to have its members walking around with vague memories of algebraic formulas and geometric diagrams, and clear memories of hating them."

Marie Curie Professor of Mathematics Education van de Universiteit van Sussex, Jo Boaler, beseft dat de afkeer van wiskunde van studenten en volwassen zijn oorzaak vindt in het wiskundeonderwijs.

> "There is often a very large elephant standing in the corner of maths classrooms. The elephant, or the common idea that is extremely harmful to children, is the belief that success in maths is a sign of general intelligence and that some people can do maths and some people can't. ... In many classrooms a very narrow subject is taught to children, that is nothing like the maths of the world or the maths that mathematician use." (Boaler, 2009)

Hoe moeten we het wiskundeonderwijs dan aanpakken zodat de studenten als latere leden van de maatschappij iets aan wiskunde hebben, en er met plezier naar terugblikken? In de jaren '80 gebeurden heel wat studies rond dit onderwerp. In Amerika resulteerde dit ondermeer in het *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989). In dit document maar ook in de rest van de wereld werden wiskundigen het er over eens dat het de voornaamste taak van wiskundeonderwijs is om van studenten bekwame probleemoplossers te maken. Hierbij wordt met probleem een complex probleem bedoeld, één waarvan de oplossing niet voor het rapen ligt.

Maar hoe maak je van iemand een goede probleemoplosser? De meest bekende wiskundige die nadruk legde op het aanleren van probleemoplossen, is Pólya. Hij introduceerde de term 'heuristieken' in zijn boek: *How to solve it* (Pólya, 1945). Enerzijds is het aanleren van heuristieken zeker een must. Maar er is meer. . . . De laatste jaren wordt algemeen aanvaard dat ook affectieve factoren een grote rol spelen bij problem solving. Dit is niet zo verwonderlijk. De kijk die studenten op wiskunde hebben, zal hun vaardigheid in het oplossen van wiskundeproblemen beïnvloeden. Alan Schoenfeld was een van de pioniers op dit vlak. Hij noemde 'beliefs' als een van de vier factoren die nodig zijn om een goede probleemoplosser te zijn.

Sindsdien zijn er over 'beliefs' heel wat theoriëen verschenen. Een eensluidend theoretisch kader is er echter nog niet. Aan al de bestaande theorieën zou ik mijn eigen theorie kunnen toevoegen. Het leek mij echter nuttiger om een concreet voorstel voor een lessenreeks uit te werken waarin mijn ideeën tot uiting komen. Ik werk een lessenreeks uit over de euclidische meetkunde van de cirkel. Ik koos voor dit onderwerp omdat Euclidische meetkunde een eeuwenoude, en mooie wiskundige theorie is die aan de bakermat van elke wiskundige theorie ligt. In de jaren 1900 gaf ze aanleiding tot de grondslagencrisis in de wiskunde. Maar ze geeft een mooi voorbeeld van het deductief denken in wiskunde. Meetkundeobjecten zijn bovendien erg aanschouwelijk. Omdat een juiste kijk op wiskunde best zo snel mogelijk opgebouwd wordt zal ik een lessenreeks voorstellen voor 4 ASO.

Om de efficiëntie van deze lessenreeks na te gaan, zal ze ook gegeven worden in een aantal proefklassen van verschillende scholen. Voor en na de lessenreeks zal de meetkundekijk van de studenten onderzocht worden aan de hand van interviews en vragenlijsten.

Als besluit formuleer ik hieronder mijn onderzoeksvraag:

"Hoe draagt de voorgestelde lessenreeks over de cirkel bij tot een positieve kijk van de leerlingen op wiskunde in het algemeen en in het bijzonder op euclidische meetkunde?"

Deel I

Literatuurstudie

Hoofdstuk 2

Relevantie van een studie omtrent de kijk van leerlingen op wiskunde

2.1 Historische ontwikkeling van de 'kijk op wiskunde' als topic in didactiek

Dat iemands kijk op wiskunde een grote rol speelt bij het leren van wiskunde, werd niet steeds algemeen aanvaard. Nog niet zo lang zijn leerpsychologen overtuigd van het belang van affectieve factoren bij het leren.

Ginsburg, Klein en Starkey (1997) beschrijven hoe wiskundedidactiek en psychologie met elkaar verweven zijn in de geschiedenis. Beiden zijn ongeveer 100 jaar oud. Vanaf het einde van de negentiende eeuw wordt psychologie als basisdiscipline voor wiskunde-didactiek gezien. Hoe affectieve factoren behandeld werden in de vroegere didactiek, hangt sterk samen met de psychologische theorie die de onderzoeker aanhing. Zo waren behaviouristen en cognitivisten geen voorstanders van het onderzoek naar affectieve factoren. Ze hielden stand tot in de twintigste eeuw. Hieronder volgt een overzicht van psychologische theorieën die een invloed hadden op onderzoekers van wiskundedidactiek zoals beschreven door Ginsburg et al. (1997). Twee periodes kunnen onderscheiden worden: een eerste periode van onderzoek naar wiskundig denken vóór 1960, en de moderne periode van na de cognitieve revolutie die zich situeert ná 1960.

2.1.1 De periode —voor 1960—

John Dewey (1859–1952) was een Amerikaans filosoof en sociaal pedagoog. Hij was één van de eersten die een bijdrage leverde tot de studie van wiskundig denken. Hij was stichter van de constructivistische school. John Dewey beschouwde de mens als een wisselwerking tussen organisme en omgeving. De school moest dezelfde vorm hebben als het leven: de leerlingen zouden niet alleen met hun hoofd, maar ook met hun handen bezig moeten zijn door te timmeren of te weven. De mens diende te leren door te doen. In het ideaalbeeld van Dewey zou de afstand tussen leerling en leraar zeer gering moeten zijn. Dewey vatte zijn gedachten samen in "The school and society" (1900). Zijn thema's waren:

- Het gebruik van psychologie als basiswetenschap voor opvoeding.
- Constructivisme. Dewey zag een getal niet als een empirische ontdekking, maar als een constructie van de geest.

- Context. Wiskundig denken ontwikkelt zich volgens Dewey in een context van alledaagse ervaringen en motivaties . Wij ontwikkelen bijvoorbeeld het getalbegrip omdat we het nodig vinden van te kunnen meten.

Consistent met de benadering van Dewey was het werk van zijn leerlingen, *Judd, Buswell* en *Brownell.* Reeds rond 1920 gebruikte Buswell alternatieve methodes voor het onderzoeken van wiskundig denken. Hij liet jonge kinderen luidop denken bij het oplossen van rekenproblemen, om hun onderliggende denkprocessen te kunnen bepalen.

Het werk van Dewey werd overschaduwd door de connectietheorie van **Edward L. Thorndike**. Edward Lee Thorndike (1874–1949) was een Amerikaans psycholoog en is de feitelijke ontdekker van het operant conditioneren. De stroming in de psychologie die hiermee gepaard ging, is het behaviorisme. Thorndike ging uit van de idee dat intelligentie een verzameling is van verschillende aangeleerde vaardigheden, in plaats van een algemene eigenschap van een individu. Een individu vertoont verschillende gedragingen en als een gedrag een positief effect veroorzaakt, zal hij dit gedrag vaker vertonen. In het geval van een negatief effect minder vaak. Zijn ideeën stonden pal tegenover die van Dewey. In plaats van op betekenisvol leren, lag de nadruk bij Thorndike op dril en testen.

Dril was volgens Thorndike de aangewezen manier om basisconnecties te verstevigen. Zoals bijvoorbeeld de connectie tussen de stimulus 2+3 en de respons 5. Dit leidde in het wiskundeonderwijs tot een dodelijke dril van rekensommen gedurende tientallen jaren ('drill and kill'). Later zouden deze basisconnecties volgens Thorndike (zoals geciteerd door Ginsburg et al., 1997, p.406) "grow together into an orderly, rational system of thinking". Bovendien beweerde Thorndike dat "elke kennis of vaardigheid of kracht of idee dat bestaat, bestaat in bepaalde mate" (zoals geciteerd door Ginsburg et al., 1997, p.406). Volgens Thorndike is dan ook elke kennis of vaardigheid meetbaar aan de hand van standaardtesten. De aard van de kennis wordt hierbij genegeerd.

Thorndike schreef ondermeer *The Influence of Improvement on One Mental Function on the Efficiency of Other Functions* (1901) en *The Contribution of Psychology to Education* (1910).

"Volgens behavioristen wordt de mens als tabula rasa geboren, hulpeloos en tot niets in staat. Alles moet hem geleerd worden door zijn omgeving. De behavioristen hielden zich bezig met het bestuderen van de 'reactie' die de persoon geeft op de 'prikkels' die hij vanuit zijn omgeving krijgt. Eerst zijn er de aangeboren reacties, ongeconditioneerd of onvoorwaardelijk. Vervolgens zijn er de geconditioneerde of aangeleerde reacties. Leren kan op twee manieren gebeuren: door klassieke conditionering en door operante conditionering. . . . Bij klassieke of pavloviaanse conditionering leert het organisme reflexmatig te reageren op een stimulus die van nature geen reactie veroorzaakt. De basis van klassieke conditionering is een herhaaldelijke gelijktijdige aanbieding van een neutrale (later voorwaardelijke) en een onvoorwaardelijke prikkel (waar het organisme wel automatisch op reageert). Men leert geen nieuw gedrag, men leert alleen op nieuwe prikkels reageren." (Van den Broek, 2006-2007, p. 3.2)

"Operant gedrag is gedrag dat spontaan gesteld wordt, zonder dat het wordt uitgelokt door een stimulus. Dit gedrag heeft een bepaald gevolg, het beïnvloedt de omgeving. Het gedrag wordt beloond of gestraft en zal daardoor minder of meer gaan optreden in de toekomst. Naast reflexmatige reacties kan dit ook willekeurige reacties bestuderen." (Van den Broek, 2006-2007, p. 3.4)

De ontwikkelingstheorie van **Jean Piaget** (1896–1980) deed het succes van de behavioristen teniet. Hij stimuleerde de interesse in de ontwikkeling van het wiskundig denken. In de visie van Piaget bepalen biologische mechanismen de logische denkvermogens. Aan Piaget danken we de volgende vier bijdragen:

(a) zijn theorie over de denkprocessen die aan de grondslag liggen van het getalbegrip van een kind.

(b) zijn constructivistische benadering.

(c) zijn theorie van het evenwicht.

(d) zijn interviewmethode.

(a) Piaget analyseerde het getalbegrip grondig in termen van equivalentieklassen en relaties. Hij stelde dat de constructie van het getalbegrip hand in hand gaat met de ontwikkeling van het logisch denken. Wanneer een kind twee reeksen van n voorwerpen ziet, ziet het eerst wel in dat er n voorwerpen zijn. Het ziet echter pas later in dat er een equivalentie bestaat tussen de twee reeksen. Gevolgen die hieruit getrokken kunnen worden hiervan zijn dat kinderen en volwassenen erg verschillend denken. Ook moet de wiskundeopvoeding van kinderen gelinkt worden aan hun cognitieve ontwikkeling. Er zijn grenzen aan wat een kind kan leren.

(b) In zijn algemene constructietheorie stelde Piaget (Ginsburg et al., 1997, p.408) dat "echt begrip van een theorie veronderstelt het heruitvinden van deze theorie door de persoon".

(c) Verder poneerde Piaget zijn theorie van het evenwicht (Ginsburg et al., 1997, p.408) waarin hij stelde dat "het leren van kinderen vaak het manipuleren van objecten vergt, steeds actief is, zelfgestuurd en in het bijzonder gevoelig aan een onevenwicht tussen de huidige cognitieve stand en de onmiddelijke vraag van de omgeving".

(d) Tenslotte danken we aan de Piaget de 'clinical interview'- methode . Dit is "de gewone procedure van een vrij gesprek met het kind, gestuurd door de gestelde vragen, maar men volgt hierin de richting die aangegeven wordt door de spontane antwoorden van het kind" (Ginsburg et al., 1997, p.408).

Lev Semenovich Vygotsky (1896–1934) benadrukte de bijdrage van sociale factoren aan intellectuele ontwikkeling. Volgens hem starten kinderen in school, wanneer ze reeds "spontane concepten" ontwikkelden in hun gewone leefomgeving. Eigen aan deze spontane concepten is dat ze sterk situatiegebonden zijn en empirisch praktisch. Tijdens het schoolgaan ontmoeten de kinderen dan "wetenschappelijke of systematische concepten" zoals het formeel systeem van de wiskunde. Wetenschappelijke concepten zijn georganiseerd, systematisch en abstract, en ze stellen nieuwe verstandelijke eisen aan het kind. Dus ze lokken ontwikkeling uit. De relatie tussen deze spontane en wetenschappelijke concepten is echter complex.

2.1.2 De periode —na 1960— cognitieve revolutie

Behaviouristen beperkten zich tot de studie van het uiterlijk waarneembare en meetbare gedrag van de mens (of dier), omdat het innerlijk leven zich niet objectief door wetenschappelijke waarneming zou laten registreren, maar alleen subjectief door introspectie en begrijpen. Maar dit bracht teveel beperkingen mee voor het onderzoek naar de menselijke geest. Problemsoving of taal werden bijna onmogelijk te bestuderen vanuit behavioristisch standpunt.

De cognitieve revolutie verving behaviorisme door cognitie, breed opgevat als de innerlijke geestelijke processen van de menselijke geest. Cognitieve processen zoals gedachten, bewustzijn etc. zijn duidelijk geen zichtbare processen. Toch produceren zij een grote verzameling van zichtbaar gedrag. De cognitieve revolutie maakte het mogelijk om in de "zwarte doos" te kijken, welk de deur opende tot nieuwe wegen van onderzoek.

Vanaf 1980 gebeurde erg veel onderzoek naar wiskundig denken. Heel wat conferenties vonden plaats en verschillende organisaties werden opgericht. Zo ontstond bijvoorbeeld de International Group for the Psychology of Mathematics Education, kortweg de PME (Utrecht 1977). In de late jaren '80 ontstond de NCTM, een organisatie van 123000 wiskundeleerkrachten en onderzoekers uit de Verenigde Staten. Doelen van deze vereniging zijn kwalitatief wiskundeonderwijs verzekeren, doelen vastleggen en veranderingen promoten.

Sociale psychologie en differentiële psychologie geven wel veel aandacht aan de invloed van affectieve factoren op het leren. Een traditionele aanpak voor het onderzoek naar affectieve invloeden op leren, werd ondermeer gevolgd door *Ajzen, Fishbein,* 1980 en *Rajecki*, 1982. Deze werd toegepast op het wiskundeonderwijs door *Aiken* in 1976, door *Kulm* in 1980, door *Reyes* in 1984 en door *Leder* in 1987. Kenmerken van deze traditionele aanpak waren de nadruk die gelegd werd op definities van termen, de bezorgdheid over metingen, het vertrouwen in vragenlijsten en kwantitatieve methodes. Nadeel was het ontbreken van een theoretische basis. Bovendien waren niet alle onderwerpen op deze wijze toegankelijk. Voor een aantal onderwerpen zoals wiskundevrees waren de gebeurde onderzoeken nogal verwarrend en tegenstrijdig.

Er was dus nood aan een nieuwe onderzoeksmethode die meer inzicht geeft in affectieve factoren en die meer geïntegreerd is in het huidig cognitief onderzoek. Vanuit de ontwikkelingspsychologie en de toenemende invloed van de **cognitieve psychologie** ontstond een nieuw model voor onderzoek naar affectieve factoren. Kenmerken van deze nieuwe aanpak zijn de nadruk die gelegd wordt op theoretische onderwerpen, de interesse in kwalitatieve methodes, het luidop-denken door de studenten tijdens de protocollen, het gebruik van interviews, en tenslotte de aandacht voor beliefs, emoties en attitudes. Gebruikers van deze nieuwe methode zijn ondermeer **Mandler**, 1984, **Kagan**, 1978, **Snow** en **Farr**, 1987. Een toepassing ervan op het wiskundeonderwijs werd gemaakt door **McLeod** en **Adams** in 1989.

2.2 De 'kijk op wiskunde' van studenten als topic in de hedendaagse didactiek

Affectieve factoren spelen een betekenisvolle rol bij het leren van wiskunde. Dit blijkt uit publicaties over dit onderwerp van de NCTM en de PME, verenigingen die toonaangevend zijn in de wiskundedidactiek. De wiskundige onderzoeker Schoenfeld (1985) ontdekte het belang van affectieve factoren tijdens het oplossen van complexe wiskundeproblemen. Een goede kijk op wiskunde is volgens hem een belangrijke voorwaarde voor succesvol probleemoplossen. Ook vanuit het standpunt van de cognitieve psychologie blijkt de kijk van studenten op wiskunde belangrijk te zijn.

Wie vaardig is in wiskunde, ziet wiskunde volgens De Corte en Verschaffel (2006) als een sterke manier om allerlei situaties te bekijken. Het verwerven van zo'n opstelling vergt het opbouwen van een positieve kijk op zichzelf, in verband met wiskunde, over de context waarin wiskundige activiteiten plaatsvinden, over wiskunde leren en problemen oplossen. Mandler, zoals geciteerd door McLeod (1992), stelt dat er drie belangrijke aspecten zijn aan de kijk van studenten op wiskunde. De kijk op wiskunde van studenten speelt een belangrijke rol in de ontwikkeling van hun affectief antwoord op wiskundige situaties. Hierdoor zullen ze tijdens het beoefenen van wiskunde positieve én negatieve emoties ervaren, die sterker zijn bij nieuwe taken. Bovendien zullen studenten een positieve of negatieve houding ontwikkelen wanneer ze op elkaar lijkende situaties herhaaldelijk tegenkomen.

Ten slotte houdt iemands kijk op wiskunde verband met een heel aantal interessante onderwerpen. Op het cognitieve domein is er een verband met autonoom leergedrag, esthetisch sturen, intuïtie en metacognitie. Op affectief vlak blijkt er een verband te zijn met vertrouwen, zelfbeeld, zelfwerkzaamheid, wiskundevrees, motivatie en causale attributie.

2.2.1 De rol van affectieve factoren in het wiskundeonderwijs volgens NCTM en PME

Affectieve factoren spelen volgens McLeod (1992, hfdst23) een betekenisvolle rol in het leren van wiskunde. Enerzijds tonen informele observaties dit reeds aan. Wanneer leer-lingen over hun wiskundelessen spreken, hebben ze het immers niet alleen over hun bereikte kennis, maar ook over hun liefde of haat ten opzichte van wiskunde. Ook leerkrachten die over hun wiskundelessen spreken, vermelden zeker ook het enthousiasme van de leerlingen en niet alleen hun bereikte kennis. Anderzijds bevestigde de NTCM in de *Commission On Standards for School Mathematics* van 1989 de centrale rol van affectieve factoren, zij kunnen helpen om de impact van de wiskundelessen op studenten te vergroten.

Het rapport van de National Research Council van 1989 over de toekomst van het wiskundeonderwijs, *Everybody Counts,* legt de nadruk op de nood aan een verandering van beliefs en houding tot wiskunde. Niet alleen moet de waarde van wiskunde goed begrepen worden, ook moet de wiskundige houding er één zijn van vertrouwen, interesse, volharding en nieuwsgierigheid. De nadruk die gelegd wordt op affectieve factoren, heeft te maken met het belang dat gehecht wordt aan hogere orde denken. Verder tonen bepaalde studies aan dat er een reden is tot bezorgdheid over affectieve factoren. Zo blijkt bijvoorbeeld uit de *Second International Mathematics Study* door Robitaille en Garden (1989) dat er qua beliefs en attitudes grote verschillen bestaan tussen landen. Dankzij een grootschalig onderzoek in de VS over beliefs en affects, merkten Dossey, Mullis, Lindquist en Chambers (1988) dat vertrouwen en plezier in wiskunde verkleint tijdens de schoolcarrière van de meeste leerlingen. Een verhandeling van Leder uit 1993 en conferenties van de PME leidden tot een hele waslijst van rapporten over affectieve factoren. Zowel beschrijvende studies als theoretische papers verschenen de laatste jaren bij de PME.

2.2.2 Een goede kijk op wiskunde is een verborgen succesfactor bij probleemoplossen

Waarom iemands kijk op wiskunde belangrijk is voor probleemoplossen, blijkt al een beetje uit het volgende citaat: “De manier waarop je naar de oplossing van een wiskundig probleem zoekt, wordt beïnvloed door je houding tegenover het vak. Sommige leerlingen gebruiken hun wiskundekennis niet omdat ze niet echt geloven in de bruikbaarheid ervan.”(Van Leemput, Roelens, Schatteman & Gyssels, 1991) Hierbij moet wel vermeld worden dat met het oplossen van problemen niet het oplossen van standaardoefeningen bedoeld wordt: “Oefeningen die in de wiskunde als problemen omschreven worden en die de probleemoplossende vaardigheden van leerlingen bevorderen, zijn oefeningen waarvan leerlingen een juiste oplossingsmethode niet onmiddellijk kennen.”

Probleemoplossen is volgens Schoenfeld (1985) de kern van het wiskundig denken. Schoenfeld bestudeerde het probleemoplossingsgedrag van studenten. Hij analyseerde hun protocols en maakte gebruik van interviews. Zo stelde hij een kader op voor de analyse van wiskundig denken.

De fundamentele aspecten hiervan vind je terug in het probleemoplossen. Hij noemt deze fundamentele aspecten resources, heuristieken, controle en belief systems. Met resources bedoelt hij het geheel van wiskundige feiten en procedures waarover de probleemoplosser beschikt. Heuristieken zijn denkregels, die toelaten vorderingen te maken in moeilijke situaties. De efficientie waarmee probleemoplossers hun beschikbare kennis gebruiken, beschrijft hij als controle.

Met belief systems bedoelt hij de perspectieven van het individu, hoe hij denkt over wiskunde, en hoe hij ermee denkt te werken. Niet alleen wiskundige kennis is van belang, ook belangrijk is de eigen waarneming door het individu van deze kennis, die gehaald wordt uit zijn eigen ervaring met wiskunde. Volgens Schoenfeld kunnen deze vier fundamentele aspecten van wiskundig denken aangeleerd worden aan wiskundestudenten. De student kan zijn resources optimaliseren door gestructureerd te studeren. Dit zorgt immers voor een goede stockering van de materie. Over heuristieken en controle deed Schoenfeld zelf heel wat onderzoek. Hieruit bleek dat heuristieken door studenten veel te weinig gekend zijn. Wanneer ze door de docent expliciet en voldoende toegelicht worden, en getoond in toepassingen, leveren ze een zeer goede verbetering op van het oplossingsgedrag van problemen. Controlegedrag tijdens het probleemoplossen is volgens Schoenfeld ook aan te leren. Wanneer de leerkracht bijvoorbeeld een controlestrategie expliciet voorschrijft, wordt deze door de studenten gevolgd met goed resultaat voor hun probleemoplossing.

Een verrassende en nieuwe factor bij probleemoplossen blijkt de kijk te zijn van de student op wiskunde. Dit is een affectieve factor, en het belang hiervan bij het leren van wiskunde is niet voor iedereen evident. Volgens Schoenfeld zwakt de kijk van studenten op wiskunde hun bekwaamheid tot probleemoplossen vaak af. Als studenten denken dat wiskundeproblemen steeds op vijf minuten of minder op te lossen zijn, dan is het normaal dat ze niet willen volharden in het zoeken naar de oplossing van problemen die langer duren. Een goede kijk op wiskunde is een vereiste voor de probleemoplosser, nog voor hij toekomt aan het gebruik van resources, heuristieken of controle.

Hoe kan bij de studenten de juiste kijk op wiskunde aangeleerd worden? Volgens Schoenfeld moet bij het aanleren van een juiste wiskundekijk, gelet worden op vier dingen:

- In plaats van empirisme zou deductie moeten komen.
- Betekenis moet primeren op vorm.
- Echte problemen moeten opgelost worden in plaats van oefeningen.
- Actieve wiskunde moet gedaan worden in de plaats van passieve.

Met "deductie in plaats van empirisme" bedoelt Schoenfeld dat wiskundige argumentatie nodig is om te ontdekken en te begrijpen, niet enkel om reeds verworven kennis te bevestigen. De zin van deductie kan aan de studenten getoond worden bij stellingen, waarvan ze nog niet weten of ze juist zijn of niet. De kennis mag nog niet verworven zijn. Teveel focussen op het wiskundig opschrijven, met een 'wiskundige schrijfwijze', is uit den boze. "Betekenis primeert op vorm"!

Het loont de moeite om échte problemen te geven, waarvoor slechts traag vooruitgang geboekt wordt. Natuurlijk moet de vereiste tijd dan ook gegeven worden. De problemen zouden het gebruik van heuristieken en controle moeten vergen. Wiskunderesultaten komen niet uit de lucht gevallen, en zijn voor alle studenten begrijpelijk. Daarom mag wiskunde niet gepresenteerd worden als 'af', maar moeten verantwoordingen voor de resultaten toegevoegd worden.

Leerlingen kunnen resultaten zelf zoeken, evenals hun verantwoordingen. Ze kunnen zelf wiskunde ontdekken, vermoedens formuleren, of begrippen. Wiskundeprocedures zouden slechts toegepast mogen worden als er begrip is van de situatie en van de procedure.

2.2.3 De student moet een standpunt tegenover wiskunde innemen om zelf een 'wiskundige houding' te kunnen verwerven

Volgens De Corte en Verschaffel (2006) komt het verwerven van wiskundige competentie neer op het verwerven van een wiskundige houding. Meer concreet moet de student een standpunt tegenover wiskunde innemen. Hij moet namelijk wiskunde leren zien als een sterke manier om allerlei situaties te bekijken. Zo een opstelling komt tot uiting in de houding die de student aannneemt tegenover taken. Denkt hij positief over taken en werkt hij eraan met vertrouwen en goede wil? Ook komt dit tot uiting in volharding en interesse, of in de tendens om over de eigen werkwijze te willen reflecteren.

Deze opstelling verwerven vergt het opbouwen van de volgende vijf componenten:

1. Een goed georganiseerde en flexibel bereikbare domeinspecifieke wiskundige kennis, waaronder feiten, symbolen, algoritmen, concepten, regels.

2. Heuristieken of zoekstrategieën voor probleemoplossen. Die vergroten de kans op een oplossing, omdat ze zorgen voor een systematische aanpak van de taak.

3. Metakennis, waaronder kennis over zijn eigen cognitieve functies, over de eigen motivatie en emoties.

4. Zelfregulerende vaardigheden, waaronder vaardigheden om zijn eigen cognitief proces te sturen, plannen te maken, het eigen probleemoplossingsproces op te volgen en zijn eigen aandacht te fixeren op een probleem.

5. Een positieve kijk op zichzelf en in verband met wiskunde, over de context waarin wiskundige activiteiten plaatsvinden, over wiskunde leren en problemen oplossen.

2.2.4 De theorie van Mandler (1984) bevestigt het belang van affectieve factoren tijdens het leren van wiskunde, vanuit de cognitieve psychologie

De theorie van Mandler, zoals geciteerd door McLeod (1992, p.578), is gebaseerd op cognitieve psychologie, en is compatibel met die van de meeste cognitieve psychologen. Mandler deed de meeste pogingen om zijn algemene ideeën toe te passen op het wiskundeonderwijs. Mandlers visie is dat de meeste affectieve factoren verschijnen als emotioneel antwoord op een obstakel voor gepland gedrag. Plannen ontstaan door activatie van een geheugenschema.

Dit schema produceert een actievolgorde, en als deze niet gevolgd kan worden zoals gepland, wordt deze blokkering gevolgd door een fysiologische reactie: waargenomen als een toenemende hartslag of spierspanning. Deze dient als mechanisme om de aandacht van het individu in een andere richting te sturen. Bovengenoemde reactie heeft duidelijk waarde als overlevingsstrategie, en speelde vermoedelijk een rol in de evolutie.

Op het moment dat de fysiologische prikkel optreedt, probeert het individu de betekenis van dit onverwachte of verwarrende obstakel te achterhalen. De evaluatie van de onderbreking kan als prettig, onprettig, of zelfs catastrofaal gezien worden. Ze voorziet het obstakel van een betekenis. Deze analyse van de betekenis van de onderbrekingen heeft verschillende belangrijke aspecten. Enerzijds hangt de betekenis die aan het obstakel wordt toegekend af van wat het individu denkt of aanneemt. Hier spelen individuele kennis of overtuiging dus een duidelijke rol. Anderzijds is het obstakel dat tot de emotie leidt vaak van beperkte duur. Bij normale individuen is de emotie soms sterk, maar wel voorbijgaand: ze passen zich aan de onverwachte gebeurtenis aan en zoeken een andere oplossing om hun doel te bereiken.

Beschouw als voorbeeld de affectieve respons van een student op een vraagstuk. Stel dat de student gelooft dat vraagstukken oplosbaar moeten zijn in twee minuten. Verder stellen we dat de student op alle andere wiskundeterreinen succesvol is. Wanneer deze student het vraagstuk nu niet in twee minuten kan oplossen, zal dit mislukken — deze onderbreking van zijn plan — bij hem een prikkel teweegbrengen. De interpretatie van deze prikkel is waarschijnlijk negatief: de student voelt zich gefrustreerd. Als hij er echter in slaagt ondanks de onderbreking een oplossing te vinden, zal hij er toch positief op reageren. Bij een student die herhaaldelijk negatieve reacties heeft op vraagstukken, zal deze respons zich stabiliseren. Hij krijgt zo een negatieve houding tegenover vraagstukken.

Samenvattend kunnen we stellen dat aan de kijk van studenten op wiskunde volgens Mandler drie belangrijke aspecten zijn. Ten eerste spelen de kijk van studenten op wiskunde en *op zichzelf een belangrijke rol in de ontwikkeling van hun affectief antwoord op wiskundige situaties.* Ten tweede zullen studenten tijdens het leren van wiskunde geconfronteerd worden met positieve maar ook negatieve ervaringen. Onderbrekingen en obstakels zijn immers een onvermijdelijk onderdeel van het wiskunde-doen. Ze zullen dus positieve én negatieve emoties ervaren. Deze emoties zijn sterker bij nieuwe taken. Ten derde zullen studenten tegenover wiskunde, of tegenover bepaalde delen van wiskunde een positieve of negatieve houding ontwikkelen wanneer ze op elkaar lijkende situaties herhaaldelijk tegenkomen.

2.3 Onderwerpen uit de wiskundedidactiek die verband houden met iemands kijk op wiskunde

In dit hoofdstuk som ik een aantal interessante onderwerpen op die nauw verbonden zijn met iemands kijk op wiskunde, uit het boek "Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization" van McLeod (1992). Op het affectieve vlak gaat het bijvoorbeeld over vertrouwen, zelfbeeld, zelfwerkzaamheid, wiskundevrees, motivatie en causale attributie. Op cognitief vlak betreft dit onder andere autonoom leergedrag, esthetisch sturen, intuïtie en metacognitie.

2.3.1 Interessante onderzoeksonderwerpen op het affectieve domein die met iemands kijk op wiskunde verband houden

Kloosterman toonde in 1988 de correlatie aan tussen vertrouwen en motivatie. Vertrouwen is hier het geloof in de eigen wiskundige bekwaamheid. Het hangt samen met het beeld dat iemand van wiskunde heeft.

Marsh toonde in 1986 een correlatie aan van iemands zelfbeeld met zijn prestaties. Iemands zelfbeeld is de veralgemening van iemands vertrouwen. Het zelfbeeld van een persoon hangt samen met zijn beeld van wat wiskunde is.

Hackett en Betz toonden in 1989 aan dat zelfwerkzaamheid een goede voorspeller is voor de studiekeuze van de student, maar geen garantie is voor goede prestaties. Zelfwerkzaamheid, doeltreffendheid gaat over beslissingen die een persoon maakt in verband met zijn keuze van activiteiten, de mate van inspanning die hij wil leveren, zijn volharding.

Wiskundevrees is de vrees om voor wiskunde te mislukken. Hembree stelde in 1990 dat behandeling hiervan kan door relaxatietraining en systematische desensibilisatie, maar ook door verandering van de kijk op wiskunde .

Kloosterman ontdekte in 1988 een relatie tussen causale attributie en vertrouwen. Causale attributie is het toekennen van de oorzaak van positieve of negatieve resultaten aan zichzelf of niet. Weiner ontdekte het verschil in 1986 tussen de geslachten: mannen schrijven hun succes eerder aan eigen kunnen toe, terwijl vrouwen alles eerder verklaren vanuit een gebrek aan bekwaamheid.

Norman beweerde in 1981 dat motivatiefactoren uitgelegd kunnen worden door onderzoek naar beliefs en emoties. Met motivatie wordt zowel prestatiemotivatie als sociale motivatie, intrinsieke of extrinsieke motivatie bedoeld.

2.3.2 Onderwerpen uit het cognitieve onderzoeksdomein die verbonden zijn met iemands kijk op wiskunde

Autonoom leergedrag (ALB's) zijn activiteiten zoals zelfstandig denken over een probleem en de wil om door te zetten. Volgens Fennema en Leder (1990) zijn deze ABL's de link tussen de wiskundekijk van een student en zijn wiskundige prestaties.

Esthetisch sturen is het kiezen van oplossingsstrategieën vanuit esthetisch standpunt, zoals schoonheid en elegantie. Silver en Metzger (1989) zagen dit esthetisch sturen als de link tussen metacognitief processing en affectieve responsen op problemsolven.

Intuïtie is kennis die direct is, evident uit zichzelf. Deze kennis gaat verder dan beschikbare feiten, en draagt in zich gevoelens van zekerheid, geloof in wiskunde.

Metacognitie is kennis over het eigen leren. Lester vond in 1989 een relatie tussen metacognitie en affectieve factoren zoals vertrouwen en interesse.

Hoofdstuk 3

Literatuurstudie over beliefs

Een goede vertaling voor 'beliefs' vinden is niet zo evident. De volgende pogingen komen wel in de buurt, maar dekken toch allemaal een ietwat andere lading: geloof, perceptie, opinie, mening, filosofie, waarde, houding, ... Bovendien overlappen deze begrippen elkaar. De vertaling die ik uiteindelijk verkies voor beliefs omtrent wiskunde is 'een kijk op wiskunde'.

3.1 Omschrijvingen voor 'beliefs'

Leder en Forgasz (2003) geven een chronologisch overzicht van omschrijvingen van beliefs door verschillende auteurs, die niet in het bijzonder gerelateerd zijn aan wiskunde. Hieronder selecteer ik enkele van deze omschrijvingen.

- "Tussen beliefs, attitudes en waarden lijkt een logisch verband te bestaan." (Bem, 1970, p. 4)
- "De houding die iemand tegenover een object aanneemt, draagt in zich zowel elementen van een mening over het object alsook acties van toenadering tot of verwijdering van het object." (Cook en Selltiz, 1970, p. 23)
- "Een belief is elke bewering, bewust of onbewust, afgeleid uit wat een persoon zegt of doet, die kan voorafgegaan worden door de zin: ik geloof dat..." (Rokeach, 1972)
- "Een attitude is een geheel van meningen over een bepaald object die met elkaar in verband staan. Hierbij schenkt de ene persoon aandacht aan bepaalde aspecten van het object, terwijl een andere persoon zich op andere aspecten toespitst." (Rokeach, 1972, p. 116)
- "Elke belief die in een attitude voorkomt, bestaat uit drie componenten: een cognitieve component, die de kennis van de persoon voorstelt. Ook een affectieve component, want de belief kan een affectie opwekken. En bovendien een gedragscomponent, die tot actie leidt wanneer hij op de juiste wijze geactiveerd wordt." (Rokeach, 1972, p.113)
- "Iemand heeft een attitude tegenover en een belief in of over een object. Een belief impliceert een houding die het subject sterk bij het object betrekt. Het individu gebruikt zijn belief als basis voor een voorspelling over wat in de toekomst zal gebeuren." (Cooper en McGaugh, 1970, p.26)
- "Een attitude van een persoon slaat op diens gunstige of ongunstige evaluatie van een object. Een belief daarentegen vertegenwoordigt de informatie die hij over het object

heeft. Een belief linkt een object aan een of ander kenmerk. Het onderwerp van een belief kan een persoon, groep personen, instituut, gedrag, beleid of een gebeurtenis zijn. Het kenmerk dat eraan gehecht wordt kan een eigenschap, een trek, kwaliteit, karakteristiek of gebeurtenis zijn." (Fishbein en Ajzen, 1975, p.12)

- "Houdingen kan men zich voorstellen als aangeleerde neigingen om positief of negatief te reageren op bepaalde objecten, personen of concepten. Zodoende bezitten ze cognitieve (mening of kennis), affectieve (emoties, motivatie) en gedragscomponenten." (Aiken, 1980, p.2)
- "Houdingen, interesses, opinies, overtuigingen en waarden zijn allemaal persoonlijkheidskenmerken of motivatoren voor gedrag. Vaak kunnen ze door elkaar gebruikt worden. Geen van hen is direct observeerbaar, ze moeten afgeleid worden uit gedrag, wat men zegt, of responsen op instrumenten." (Aiken, 1996, p.168)
- "Een houding is een geheel van meningen, motieven, voortbrengers van motieven en vergelijkingen die men richt op een persoon, object of idee. Houdingen worden uitgedrukt in de tendens om bepaalde keuzes te maken wanneer de gelegenheid zich voordoet." (Sloman, 1987, p.228)
- "Perceptie en mening vertonen heel wat overeenkomsten. Beide worden slechts op indirecte wijze weerspiegeld in gedrag en handelingen. Bij een perceptieve illusie zien we wat niet is, en bij een foutieve mening denken we wat niet is." (Gopnik en Meltzoff, 1997)

3.2 Overzicht van het affectieve domein in wiskundeopvoeding: beliefs, attitudes en emoties

Volgens Mandlers theorie, zoals beschreven door McLeod (1992), zijn beliefs, attitudes en emoties de drie mogelijke responsen op wiskunde. Beliefs en attitudes zijn meestal stabiel. Emoties kunnen snel veranderen. Ook varieren ze qua intensiteitsgraad. Beliefs kunnen 'koud' genoemd worden, attitudes 'warm' en emoties 'heet'. Verder is er ook een verschil in de tijd die ze nodig hebben om zich te ontwikkelen. Voor elke categorie geeft tabel 3.1 een aantal voorbeelden.

Beliefs zijn vrij cognitief van aard en worden ontwikkeld over een relatief lang tijdsverloop. Emoties bevatten weinig cognitieve aspecten en verschijnen en verdwijnen vlug. Beliefs, attitudes en emoties kan je zien als de vertegenwoordigers van stijgende niveaus van affectieve betrokkenheid of dalend qua cognitieve betrokkenheid.

3.3 Een kijk op wiskunde

Beliefs kunnen betrekking hebben op personen, objecten of ideeën. Hieronder bestudeer ik enkel beliefs die betrekking hebben op wiskunde, ik zal hen omschrijven als 'een kijk op wiskunde'.

3.3.1 De belief systems van Schoenfeld

In hoofdstuk 1 van zijn boek omschrijft Schoenfeld een belief system als "iemands wiskundig wereldbeeld, het geheel van onbewuste bepalingen van iemands gedrag omtrent zichzelf, z'n omgeving, over het onderwerp, over wiskunde. Het is de eigen waarneming van wiskundige

Categorie		Voorbeelden
Beliefs over	Wiskunde	Wiskunde is gebaseerd op regels.
	Zichzelf	Ik kan problemen oplossen.
	Lesgeven	Lesgeven is vertellen.
	Sociale context	Leren is competitief.
Attitudes		Afkeer van een meetkundebewijs.
		Plezier in probleemoplossen.
		Verkiezen van ontdekkend leren.
Emoties		Plezier in oplossen van complexe problemen.
		Esthetische respons op wiskunde.

Tabel 3.1: Voorbeelden van beliefs, attitudes en emoties

kennis, die gehaald wordt uit de student zijn ervaring met wiskunde. Het is ook iemands gezichtspunt van waaruit hij wiskunde en wiskundetaken benadert." (Schoenfeld, 1994, p.34)

Iemands mening over wiskunde bepaalt volgens Schoenfeld hoe hij het probleem wil oplossen, met of zonder wiskunde, welke technieken gebruikt of vermeden worden, hoe lang en hoe hard hij erop wil zoeken, hoe hij wiskunde gaat studeren — van buiten of met inzicht.

In hoofdstuk 5 bespreekt Schoenfeld de rol van wiskundige deductie voor het ontdekken. Voor meetkundige problemen zal een expert zijn toevlucht nemen tot een deductieve benadering, want deductie leidt tot ontdekking. De meeste studenten denken anders: ze verkiezen empirisme.

In hoofdstuk 10 gaat Schoenfeld dieper in op de kijk van studenten op wiskunde. Zo beschrijft hij vier tweespalten die bestaan.

1. Empirisme versus deductie.

   Het standpunt dat de studenten over bewijzen hebben, zal voortkomen uit de manier waarop ze in de klas bewijzen zagen. Spijtig genoeg worden de meeste afleidingen gegeven van stellingen die reeds bewezen zijn, en waarvoor men reeds weet dat ze juist zijn. De student kan hieruit besluiten dat wiskundige argumentatie enkel dient om verworven kennis te bevestigen, en niets te maken heeft met het proces van ontdekking of begrip. Bijgevolg zullen zelfs studenten die de oplossing van een probleem deductief kunnen afleiden, het niet doen omdat ze het niet nodig achten.

   Verder zien ze ook niet in dat bewijsoefeningen die ze maakten, een oplossing kunnen bieden voor een concreet gesteld probleem. Wanneer expliciet naar een bewijs gevraagd wordt in een wiskundige context, kunnen ze het vaak wel. Schoenfeld stelde vast tijdens lesobservaties meetkundig tekenen dat de student z'n empirisme ontwikkeld werd doordat een te grote nadruk werd gelegd op correct tekenen.

   Empirisme onstaat ook doordat er teveel wordt geoefend om correcter te tekenen, er vaak wordt nagemeten en figuren er juist uit moeten zien. Vaak is de argumentatie van een constructie slechts een bevestiging van wat we al wisten en geen middel tot uitvinding. Deductie en inventie worden niet aan elkaar gelinkt: nauwkeurigheid dient als bewijs voor correctheid.

2. Betekenis versus vorm.

De perceptie van wat wiskunde is, is gebaseerd op de wijze waarop studenten wiskunde leerden. Het bepaalt het later gedrag van de studenten. Een voorgeschreven vorm voor het maken van bewijzen, focust op de vorm in plaats van de inhoud. Correcte verklaringen die niet in de juiste vorm staan, worden als fout aanzien. Memotruukjes zorgen niet voor inzicht. Wiskunde wordt dan “zichzelf in voorgeschreven vormen kunnen uitdrukken”. Dit leidt tot verlies van voorbeelden van productief redeneren, en tot verlies van redenen om zo’n redeneringen te doen.

3. Problemen versus oefeningen.

   Studenten krijgen vaak oefeningen in plaats van problemen voorgeschoteld. Meetkundelessen worden data-overdracht. Verwacht wordt van de studenten dat ze hun oefeningen in enkele minuten kunnen oplossen. Zeker krijgen ze niet de indruk dat ze uren, dagen of weken aan een oefening kunnen spenderen. Gevolgen hiervan voor de studenten zijn:

   - trage vooruitgang boeken of een lange termijn op iets zoeken, kennen ze niet.
   - na enkele minuten worden hun pogingen gestaakt.
   - het nut van heuristieken of controle zien ze niet in bij een oefening van twee minuten.

4. Passieve versus actieve wiskunde.

   Vaak worden wiskunderesultaten (concepten, stellingen) passief gepresenteerd samen met hun verantwoording, enkel reproduktie wordt verwacht. Dus denken de studenten als volgt over wiskunde:

   - wiskunderesultaten zijn intacte, op zichzelf bestaande waarheden die van boven komen uit de lucht vallen.
   - wiskunde is niet voor gewone stervelingen.
   - wiskunde moet je niet proberen te verstaan.
   - wat je vergeet ben je kwijt en kan je zelf niet terugvinden.
   - wiskundeprocedures mag je toepassen zonder voorafgaande analyse en zonder poging om operaties aan het probleem aan te passen.

3.3.2 De status van wiskunde in onze maatschappij

Karen François is werkzaam in het Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie van de VUB, Brussel. Ze onderzocht het wiskundecurriculum van de Vlaamse middelbare scholen (leeftijd 12–18 jaar). Dit kaderde in een ruimer onderzoeksproject, waarin de relatie onderzocht werd tussen wetenschap, maatschappij, politiek en democratisch stelsel.

Karen François is werkzaam in het Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie van de VUB en deed een onderzoek naar de filosofie van het wiskundeonderwijs in de curricula van Vlaamse scholen voor leerlingen van 12 tot 14 jaar. Ze merkte op dat er weinig aandacht uitgaat naar een expliciete filosofie van wiskunde. Hierdoor ontstaat volgens haar een impliciet aanwezige nogal absolutistische visie op de wiskunde. Wiskundige waarheden worden aanzien als absoluut en zeker. ”Alsof er slechts één wiskunde bestaat, die uit absolute waarheden en zekere kennis bestaat, waarbij deductieve methoden garant staan voor het verkrijgen van wiskundige kennis.”(François, 2007)

Het absolutistische in de visie over wiskunde blijkt onder andere uit het feit dat er geen plaats is voor discussie over de status van wiskunde. In de wiskunde van het beroepsonderwijs zitten totaal geen filosofische beschouwingen. Ervaringsgericht leren wordt enkel gebruikt om de motivatie en de interesse te verhogen, of om de studenten waardering te laten opbrengen voor wiskunde. Weinig aandacht gaat uit naar de mogelijkheden en beperktheden van wiskunde. Een beetje aandacht wordt aan toepassingen besteed; nog minder aan historische en culturele componenten.

Bovendien ontdekte Karen François een grote kloof tussen algemeen- en beroepsonderwijs. Enerzijds wordt in het beroepsonderwijs wiskunde gegeven in modules, en wordt veel aandacht geschonken aan het verwerven van vaardigheden. Anderzijds worden studenten er vooral voorbereid op het overleven in onze maatschappij, op persoonlijk en sociaal functioneren. Kritische of filosofische reflecties bij wiskunde worden aan hen niet besteed. Toegang tot het hoger onderwijs is voor deze studenten theoretisch wel mogelijk, maar praktisch niet haalbaar. In het aso krijgen studenten een stevige wiskundebasis voor het hoger onderwijs. Hier wordt wiskunde als een apart vak beschouwd.

Beschrijven we de wiskundige competenties zoals rekenen, tekenen, meten, localiseren,... als wiskunde 'met een kleine w'. Stellen we de wiskunde als westerse discipline voor als wiskunde 'met een grote w'. Dan kunnen we zeggen dat studenten uit het beroeps wiskunde krijgen, terwijl ASO-studenten Wiskunde krijgen. En hoe groter de 'w' is, hoe meer respect ervoor vanwege de maatschappij .

3.3.3 Een eigen omschrijving voor een kijk op wiskunde

Lester (2003) beschrijft de kijk van een student op wiskunde als het geheel van overtuigingen dat deze student heeft over wiskunde zelf, over wiskundeleren, over zichzelf en over de sociale context waarin de wiskundelessen plaatsvinden. Deze overtuigingen hebben cognitieve, affectieve en gedragscomponenten en ze bepalen de manier waarop een student aan wiskunde doet. Ze zijn gegroeid vanuit vroegere ervaringen met wiskunde, vanuit sociale normen, opvoeding, of culturele verwachtingen.

Een cognitieve wiskundemening over de aard van wiskunde, is een speciale vorm van kennis, namelijk de persoonlijke, “inwendige kennis” van de student. Deze staat tegenover de “uitwendige kennis” die gedeeld wordt door de hele wiskundige gemeenschap.

Tot deze cognitieve wiskundemeningen zal ik mij in dit onderzoek beperken. Hieronder zal ik opsommen welke kijk op wiskunde (AK) een positieve invloed heeft op het oplossen van wiskundeproblemen. Voor de formulering ervan inspireer ik mij op de uitspraak van Rokeach, die stelt dat een mening steeds voorafgegaan kan worden door het zinnetje: “ik geloof dat...”.

Voorbeelden van een kijk op wiskunde met een positieve invloed op probleemoplossen zijn:

Ik geloof dat:

AK1. Wiskunde is mooi.

Een oplossingsmethode of bewijs kan elegant of kort zijn. Een theorie zoals euclidische meetkunde zit mooi in elkaar: de structuur is overzichtelijk en logisch opgebouwd.

AK2. wiskunde heeft eeuwigheidswaarde.

Een bewijs dat logisch juist is, blijft dit ook in de toekomst. Ook binnen 1000 jaar. Bewijzen en deductieve redeneringen hebben voorspellende waarde.

AK3. wiskunde is een krachtige denkmethode.

Nadenken kan de oplossing van een probleem vergemakkelijken. Logisch nadenken kan uit vaststaande feiten nieuwe feiten doen ontstaan die vooraf niet vermoed werden. Wiskunde wordt dan bevredigend, en bouwt het zelfvertrouwen van de student op. Natuurlijk vereist dit het ervaren van succes tijdens het zelf beoefenen van wiskunde.

AK4. wiskunde ontstaat vaak vanuit een concreet probleem dat steeds verder geabstraheerd wordt.

Wiskunde gaat over eerlijke, menselijke vragen. Vaak kunnen deze niet onmiddellijk opgelost worden en leiden tot andere problemen en nieuwe theorieën.

AK5. wiskundeproblemen kunnen op meer dan een wijze opgelost worden.

Vaak hebben problemen meer dan één correcte oplossing. Als student hoef je niet klakkeloos het pad te volgen dat de leerkracht voordeed.

AK6. wiskunde is geen eenzame activiteit die gedaan wordt door individuen in isolatie.

Wiskundige theorieën groeien vaak vanuit de samenwerking van verschillende onderzoekers. Kritische geest is belangrijk om eventuele onvolkomenheden te ontdekken.

AK7. wiskunde is niet dogmatisch.

De meeste wiskundige theorieën zijn relatief en beperkt. Het zijn geen absolute waarheden die pasklaar uit de hemel vielen. Ze werd opgebouwd door mensen, met vallen en opstaan. Soms met fouten erin die slechts veel later werden verbeterd.

AK8. wiskunde is verstaanbaar voor iedereen.

Te vaak wordt aan zwakkere studenten verweten dat ze onvoldoende inzicht hebben. Terwijl inzicht iets is dat de leerkracht de studenten vaak kan bijbrengen. Tijdens de lessen zou het accent op begrijpen moeten liggen, en niet op memoriseren. Het is dan ook wenselijk dat de leerkracht zoekt naar hulpmiddelen die het geheugen van de studenten steunen en de aanschouwelijkheid vergroten.

AK9. wiskunde doen is een tijdrovende bezigheid.

Wiskunde bouwt verder op vorige verworvenheden. Hier moet regelmatig naar teruggegrepen worden, wat tijd opslorpt. Ook probleemoplossen vergt tijd. Eerst moet een analyse van het probleem gemaakt worden, daarna moet er gemathematiseerd worden. Vervolgens opgelost en laatst geëvalueerd. (Polya)

AK10. wiskunde is meer dan algoritmen en mechanismen.

Wiskunde biedt oplossingsalgoritmen voor heel wat problemen, maar kent ook een historiek en een filosofie. Het heeft een evolutie en een huidige stand van zaken. Wiskunde wordt zo meer dan een rigiede, onpersoonlijke bezigheid.

3.4 De kijk op euclidische meetkunde in het bijzonder

3.4.1 Euclides' filosofie

De Griek Euclides leefde in de 3de eeuw voor Christus in Alexandrië, waar hij werkte in de bibliotheek. Zijn belangrijkste werk, de 'Elementen', is een reeks van 13 boeken, "waarvan de kennis moest leiden tot inzicht in de rest" (Proclos). Meskens (2007) beschrijft de Elementen als een samenstelling van alle concepten en stellingen over meetkunde en verhoudingen die de basis van de Griekse wiskunde vormden rond 300 vc.

De theorie die in de 13 boeken beschreven wordt is logisch opgebouwd volgens de voorschriften van Aristoteles. Plato's invloed laat zich ondermeer voelen in het veelvuldig gebruik van de deductieve methode. Bovendien bleek Euclides een didacticus, geïnspireerd door Socrates. Bij het opbouwen van een theorie moet volgens Aristoteles uitgegaan worden van algemene inzichten of axioma's. Deze liggen aan de grondslag van het deductief denken. Verder moet er gebruik gemaakt worden van speciale inzichten, of postulaten. Hierin wordt de existentie van grondbegrippen gepostuleerd en hun betekenis vastgelegd. Tenslotte moeten latere begrippen vastgelegd worden met behulp van definities, hun bestaan moet bewezen worden. Volgens Plato moet de wiskunde losgemaakt worden van het materiële, en mag alleen door denken verkregen worden. Eigenschappen mogen niet afgelezen worden uit een figuur, ze moeten streng bewezen worden. Aan Socrates was de didactische werkwijze te danken. Elke stelling vertoont hetzelfde sjabloon: aankondiging, diorismos, uiteenzetting, constructie, bewijs en besluit.

In de 13 boeken vind je 120 definities, 372 stellingen, 93 problemen, 19 porismen en 16 lemma's. Het eerste boek vangt aan met 23 definities, 5 postulaten en 5 axioma's.

Deze 5 axioma's zijn de volgende:

A1. Dingen die gelijk zijn aan een ding, zijn ook gelijk aan elkaar.

A2. Als gelijken bij gelijken worden opgeteld, dan zijn de gehelen ook gelijk.

A3. Als gelijken van gelijken worden afgetrokken, dan zijn de resten ook gelijk.

A4. Dingen die met elkaar samenvallen zijn gelijk aan elkaar.

A5. Het geheel is groter dan het deel.

De postulaten:

P1. Het is mogelijk om een rechte lijn te trekken van een willekeurig punt naar een ander willekeurig punt.

P2. Het is mogelijk om een eindige rechte lijn continu uit te breiden als een rechte lijn.

P3. Het is mogelijk om een cirkel te beschrijven met een middelpunt en een afstand.

P4. Dat alle rechte hoeken gelijk zijn.

P5. En dat, als een rechte lijn die op twee lijnen valt, de binnenhoeken langs dezelfde kant kleiner dan twee rechte hoeken maakt, dan zullen de rechte lijnen, als ze oneindig verlengd worden, elkaar ontmoeten langs de kant waar de hoeken kleiner zijn dan twee rechte hoeken.

Hieronder volgt nog een opsomming van de 23 definities:

1. Een punt is dat wat geen delen heeft.

2. Een lijn is breedteloze lengte.

3. De uiteinden van een lijn zijn punten.

4. Een rechte lijn is een lijn die gelijkmatig met de punten op zichzelf loopt.

5. Een vlak is wat alleen lengte en breedte heeft.

6. ...

14. Een figuur is dat wat door meerdere grenzen wordt bevat.

15. Een cirkel is een vlakke figuur, bevat door een lijn, zo, dat alle rechte lijnen, die vanuit een punt binnen de figuur gelegen punten naar die lijn getrokken worden gelijk zijn aan elkaar.

17. Een diameter van een cirkel is een rechte lijn, die door het middelpunt gaat en aan weerszijden beëindigd wordt door de omtrek van de cirkel, en die tevens de cirkel in tweëen snijdt.

Het patroon dat door de meeste stellingen in de elementen gevolgd wordt, is het volgende:

- **aankondiging**: hierin wordt gezegd wat gegeven is en wat gezocht wordt.
- **diorismos**: hierin wordt gesteld of de vraag mogelijk is.
- **uiteenzetting**: wat gegeven is en gezocht wordt, wordt hierin apart genomen, en ze bereidt voor op het bewijs.
- **constructie**: voegt toe wat ontbreekt om het gezochte te vinden.
- **bewijs**: logische gedachtengang gebaseerd op vorige stellingen.
- **conclusie**: keert terug naar de aankondiging en bevestigt wat bewezen is.

Stillwell (2005) legt uit dat de postulaten P1, P2, P3 uitdrukken dat (slechts) bepaalde constructies mogelijk zijn binnen euclidische meetkunde. Namelijk het verbinden van twee punten, het verlengen van een lijnstuk en het tekenen van een cirkel met een passer. Kortweg, "constructies met passer en liniaal" genoemd.

3.4.2 Kleins visie op euclidische meetkunde

In zijn Erlangerprogramma van 1876 beschrijft Klein euclidische meetkunde als de "invariantentheorie van de euclididsche transformatiegroep op de euclidische ruimte".

Euclidische transformaties zijn afstand- en hoekbewarende transformaties. Zoals bijvoorbeeld spiegelingen, rotaties, verschuivingen, en hun samenstellingen. Figuren verkleinen of vergroten, hoeken wijzigen: het kan allemaal niet binnen een euclidische ruimte.

3.4.3 Filosofische gedachten over de deductieve methode

De filosofen Visser en Van Eyck (2005, p. 6, 7) schrijven dat het wiskundig bewijs het hart is van de exacte wetenschap. Wetenschappelijk denken gaat immers om bewijzen: een aantal logische stappen die de lezer laten inzien dat een bewering waar moet zijn. "Een wiskundig bewijs biedt de lezer inzicht met eeuwigheidswaarde. Maar de eeuwige waarheid is enkel toegankelijk voor degenen die bereid zijn tot het geven van belangeloze aandacht. Heel wat concentratie is nodig omdat nieuwe ideeën voortbouwen op vorige".

Een belangrijke bijdrage tot de axiomatische methode werd volgens Visser en Van Eyck geleverd door Aristoteles, een Griekse filosoof uit de vijfde eeuw V.C. Hij identificeerde de volgende twee basisingrediënten van het abstract redeneren: begrippen en beweringen.

"Begrippen dienen om zaken te beschrijven waarop het redeneren betrekking heeft. Beweringen zijn de uitspraken die je doet over zaken die je met behulp van begrippen hebt gedefinieerd. Begrippen dienen te worden gedefinieerd en beweringen dienen te worden bewezen. Een definitie is een omschrijving van de betekenis van een begrip in termen van andere begrippen. Dit proces kan niet eindeloos teruggaan. Vandaar zijn sommige begrippen primitief. Je wordt geacht dadelijk in te zien wat ze betekenen. Axioma's zijn beweringen die geen bewijs nodig hebben. Een onderwerp kan uitgediept worden, door beginnend bij basisbegrippen, nieuwe begrippen te definieren en nieuwe beweringen te bewijzen uit axioma's en eerder bewezen beweringen. Zo'n bewezen bewering heet een stelling. Aristoteles was de eerste die probeerde om de manier waarop het bewijsproces werkte, expliciet te maken. Een bewering wordt bewezen door ze via een bewijsregel af te leiden uit andere beweringen" (Visser & Van Eyck, 2005, p. 35)

Als belangrijkste voorbeeld van de axiomatische methode bespreken Visser en Van Eyck de 'Elementen' van Euclides. Euclides presenteerde de meetkundekennis van zijn tijd in axiomatische vorm. Een wereld waarin de axioma's waar zijn, een keuze van betekenissen van de woorden uit de axioma's, bepaalt een model voor het axiomasysteem. Gödel toonde aan dat het onmogelijk is om alle ware beweringen te bewijzen.

3.4.4 Paul Lockhart's kijk op euclidische meetkunde

Paul Lockhart is leerkracht in de lagere school van Saint Ann in Brooklyn, New York. Hij haalde een Ph.D. in Columbia in 1990, was een fellow in MSRI en een hulpprofessor aan Brown. Hij gaf eerst een aantal jaren les op universitair niveau en ging dan lesgeven aan kinderen.

Paul Lockhart (2002) vindt wiskunde een kunst, mooi, bevredigend en elegant. Wiskunde doen is volgens hem "een creatief proces van uitvinden en ontdekken, niet van reproduceren. Het is de kunst van het uitleggen en verklaren. Het is méér dan een hulpmiddel voor wetenschap en technologie. Het is de muziek van het redeneren, het is deelnemen aan een act van ontdekking, stellingname, intuïtie en inspiratie."

Ook over zijn kijk op euclidische meetkunde is Lockhart erg duidelijk. Meetkunde is volgens hem iets natuurlijks en intuïtiefs. Definities zijn zinvol, het definiëren van een begrip gebeurt niet willekeurig maar is eerder een keuze van relevante eigenschappen. Vaak worden definities voortgebracht door problemen. Het maken van bewijzen vindt hij een kunst, en geen rigide stapsgewijze deductie. Een bewijs mag niet bestaan uit een opgelegd schema, maar moet een overtuigend argument bevatten. De geest van het argument mag niet begraven worden onder een hoop verwarrend formalisme.

3.4.5 Denkniveaus in meetkunde (Dina en Pierre Van Hiele)

Het Van Hiele model voor meetkundig denken is afkomstig van het doctoraatswerk dat Dina Van Hiele – Geldof samen met haar man, Pierre Van Hiele, maakte in 1984 aan de universiteit van Utrecht. In het model beweren de Van Hieles, zoals uitgelegd in Crowley (1987), dat er vijf begripsniveaus voor meetkunde zijn, namelijk visualisatie, analyse, informele deductie, formele deductie en rigor. Een student doorloopt stapsgewijze deze vijf niveaus. Ze worden één voor één door Crowley besproken.

Niveau 0. Dit is het niveau van de visualisatie, waarin meetkundige vormen herkend worden als totaliteiten. Studenten die zich op dit stadium bevinden, zijn zich bewust van de ruimte als iets dat zich rondom hen bevindt. Meetkundige concepten zien ze als totaliteiten, meetkundige figuren worden in z'n geheel herkend, niet door eigenschappen of delen ervan. Ze kunnen woordenschat van meetkunde leren, ze kunnen vormen identificeren, en reproduceren. Maar ze zien bijvoorbeeld niet in dat figuren rechte hoeken hebben, of evenwijdige zijden.

Niveau 1. In dit stadium begint een analyse van de meetkundige concepten, meetkundige eigenschappen te verschijnen. Door observatie en experiment begint de student de karakteristieken van de figuren te bespeuren, te onderscheiden. Deze opduikende eigenschappen worden dan gebruikt om klassen van vormen te onderscheiden. Figuren hebben dus delen en worden herkend door deze delen. Relaties tussen eigenschappen kunnen echter nog niet verklaard worden, relaties tussen figuren nog niet gezien, en definities nog niet echt begrepen.

Niveau 2. Tijdens dit niveau van informele deductie begint zich een netwerk van relaties te vormen. Relaties tussen eigenschappen onderling kunnen in deze faze door studenten begrepen worden, zowel in één figuur als tussen meerdere figuren. In een vierhoek zijn bijvoorbeeld de tegenoverliggende zijden parallel wanneer tegenoverliggende hoeken gelijk zijn. Anderzijds kunnen ze relaties tussen figuren vaststellen: een vierkant is een rechthoek omdat het al de eigenschappen van een rechthoek heeft. Dus kunnen ze eigenschappen afleiden van een figuur en klassen van figuren herkennen.

Het betekent iets om tot een klasse te horen. Definities worden nu betekenisvol. Informele argumenten kunnen gegeven worden en begrepen. Toch begrijpt de student op dit punt nog niet de rol van deductie in een geheel, of de rol van axioma's. Empirisch verkregen resultaten worden vaak verkregen in combinatie met deductie technieken. Formele bewijzen worden begrepen, maar studenten zien nog niet in hoe de logische orde zich kan wijzigen. Noch zien ze in hoe een bewijs te construeren vanuit verschillende premissen.

Niveau 3. Op het niveau van deductie wordt de aard van deductie begrepen. De betekenis van deductie als een manier om een meetkundige theorie binnenin een axiomatisch systeem te verkrijgen, wordt nu begrepen: het is een manier om meetkundige theorie te verkrijgen binnenin een axiomatisch systeem. De onderlinge relatie en rol van axioma's, postulaten, definities, theorema's en bewijzen wordt ingezien. Op dit niveau kan een student zelf bewijzen maken. Hij ziet ook in dat een bewijs op meerdere wijzen gegeven kan worden. De interactie tussen nodige en voldoende voorwaarden wordt begrepen. Hij begrijpt het verschil tussen een stelling en haar omgekeerde.

Niveau 4. Dit is het denkniveau dat rigoureus genoemd wordt. In deze faze kan de student in verschillende axiomatische systemen werken, niet-euclidische meetkundes kunnen worden bestudeerd en verschillende systemen kunnen vergeleken worden. Meetkunde wordt abstract gezien.

Verder beschrijft Crowley dat het Van Hiele model volgens de ontwerpers ervan de volgende eigenschappen heeft:

1. De niveaus moeten in de juiste volgorde doorlopen worden, de vorige levels moeten bereikt zijn om de volgende level helemaal te kunnen halen. Het model is dus sequentieel.
2. De vooruitgang hangt af van de gegeven instructies en niet van de leeftijd van de student.
3. Inherente objecten van een level worden studieobjecten voor een volgende level.
4. Elke level heeft zijn eigen taalsymbolen.
5. Overeenkomst tussen studieniveau en bereikt niveau is nodig.

3.4.6 Wat is een Bewijs?

Dreyfus en Hadas (1987) gaan in hun artikel op zoek naar cognitieve en affectieve vereisten om zelf bewijzen te kunnen maken. Ook zoeken ze naar technieken om de studenten deze vereisten aan te leren. Vanuit een analyse van de bewijsmoeilijkheden bij studenten formuleren de auteurs de volgende 6 principes.

Principe 1. Een stelling heeft geen uitzonderingen. Een wiskundige bewering is juist als ze juist is in elke mogelijke situatie.

Principe 2. Ook duidelijke stellingen moeten bewezen worden. Een bewijs mag niet steunen op een schets of figuur.

Principe 3. Een bewijs moet algemeen zijn. Eén of meer speciale gevallen volstaan niet om het bewijs van een stelling te geven. Eén tegenvoorbeeld is echter wel voldoende om een stelling te verwerpen.

Principe 4. De gegevens van een stelling moeten duidelijk herkend en onderscheiden worden van de conclusies.

Principe 5 . Het omgekeerde van een stelling is niet noodzakelijk een stelling.

Principe 6. Figuren bevatten wel bruikbare ingrediënten voor het geven van een complex bewijs.

De auteurs gebruikten deze 6 principes om een cursus voor het 3de jaar SO te ontwikkelen. Ze implementeerden deze principes in 6 corresponderende categorieën van toepassingen (Dreyfus & Hadas, 1987, p. 49).

3.4.7 Besluit: beliefs over euclidische meetkunde

Als besluit formuleer ik hieronder 14 meningen die studenten volgens mij zouden moeten hebben over euclidische meetkunde. Hiervoor inspireerde ik mij op de voorafgaande literatuurstudie, maar ook op mijn eigen meetkunde-ervaring. Rokeach's definitie van beliefs bracht mij ertoe om de kijk op meetkunde als volgt te formuleren:

In verband met euclidische meetkunde geloof ik het volgende:

EK1. euclidische meetkunde ontstaat vanuit de ons omringende wereld.

Historisch gezien vindt euclidische meetkunde haar oorsprong in de waarneming van onze leefwereld. In objecten worden vormen ontdekt, die gegroepeerd worden en waarvan eigenschappen worden bestudeerd.

EK2. de euclidische ruimte —het euclidisch vlak— vertoont verschillen met onze leefruimte —het fysisch vlak—.

In de euclidische ruimte —vlak— worden objecten losgekoppeld van hun omgeving. Kleur, geur en smaak worden irrelevant. Onvolmaakte vormen worden volmaakt. Niets wordt in perspectief gezien, wel in ware grootte. Elke richting is gelijkwaardig. Bij het verplaatsen van figuren in een euclidische ruimte treden geen vervormingen op: hoeken, afstanden blijven bewaard.

EK3. om nieuwe, eigenschappen te verkrijgen en hun geldigheid te verzekeren loont het gebruik van de deductieve methode (i.p.v. empirisme).

De deductieve methode wordt in heel de wiskunde gebruikt en ontstond met het verschijnen van Euclides' Elementen. Vanuit de formulering van 120 definities, 5 postulaten en 5 axioma's bouwde hij een theorie op 'waarvan het inzicht leidt tot kennis van de rest'.

EK4. definities zijn niet willekeurig gekozen, maar beschrijven een zinvolle realiteit waarvan ze de essentiele kenmerken opsommen. Vaak ontstaan ze uit een probleem.

Definities kunnen zelf ontdekt worden, en begrepen. Ze moeten niet klakkeloos aanvaard en gememoriseerd worden. Ze staan voor een werkelijkheid.

EK5. stellingen zijn beweringen over de gedefiniëerde objecten.

Aan de hand van schetsen kunnen conjectures gemaakt worden. Een tegenvoorbeeld weerlegt een bewering. Een bewijs bevestigt de waarheid van een bewering. Stellingen kunnen zelf geformuleerd worden.

EK6a. een stelling moet juist zijn in elke mogelijke situatie.

Een bewijs in enkele bijzondere gevallen is niet voldoende: het algemeen geval moet aangetoond worden. Dit zal de stelling voorspellende kracht geven en eeuwigheidswaarde.

Er zijn echter eigenschappen die niet om een bewijs vragen door hun evidentie: postulaten.

EK6b. een definitie moet een begrip ondubbelzinnig vastleggen.

Een definitie is een nodige en voldoende voorwaarde voor een object om tot een bepaalde klasse van wiskundeobjecten te behoren. Aan de hand van een definitie moet nagegaan kunnen worden welke objecten aan de gestelde eisen voldoen en welke niet. Toch bestaan er begrippen waarvan iedereen de inhoud intuïtief kent: primaire begrippen. Deze vergen geen definitie.

EK7. een bewijs mag niet steunen op een schets of figuur.

Een bewijs is een logische opeenvolging van waarheden. Plato eiste de schetsonafhankelijkheid van beweringen opdat ze 'waar' zouden zijn.

EK8. in een bewijs is de geest van het argument belangrijker dan het formalisme.

Doel van een bewijs is de lezer te overtuigen van de waarheid. Dit kan in woorden of symbolen. Vooral de 'clou' van het bewijs moet duidelijk zijn.

EK9. euclidische meetkunde heeft esthetische aspecten.

Niet alleen vind je heel wat euclidische constructies terug in de kunst. Ook op zich is euclidische meetkunde 'mooi'. Argumenten voldoen aan de esthetische principes van eenvoud en elegantie.

EK10. de euclidische meetkunde is meer dan het verzamelen van wiskundige kennis: ze heeft een geschiedenis en een filosofie.

De geschiedenis van de euclidische meetkunde is erg boeiend. De 'Elementen' van Euclides zijn het vernoemen zeker waard. Ook de filosofie van Plato en Aristoteles is interessant om te kennen.

EK11. euclische meetkunde ontstond niet op één dag als kant-en klare onveranderlijke kennis.

In de 'Elementen' zaten denkfouten. Euclides verzamelde de toen bekende kennis uit de bibliotheek van Alexandrië. Zijn werk werd vervolledigd door Hilbert.

Een filosofische vraag die hierbij gesteld kan worden is, of wiskunde uitgevonden wordt of eerder ontdekt ...

EK12. euclidische meetkunde verkondigt geen absolute waarheden.

Het axiomatisch systeem van de euclidische meetkunde is één van de vele meetkundes die ondertussen bestaan. Negatie van het parallellenpostulaat leidde immers tot elliptische en hyperbolische meetkunde. Descartes beschreef een algebraïsche meetkunde. Klein constateerde in zijn Erlangerprogramma dat er een onbeperkt aantal meetkundes mogelijk zijn: nodig is een transformatiegroep op een topologische variëteit. Euclidische meetkunde is vooral bruikbaar voor kleine afstanden. Afstanden in de ruimte vragen om het gebruik van hyperbolische meetkunde. Op een boloppervlak ontstaat elliptische meetkunde.

EK13. euclidische meetkunde kent veel praktische toepassingen.

Niet alleen om graancirkels te construeren is euclidische meetkunde bruikbaar. Ook in de landmeetkunde en in de kunst wordt euclidische meetkunde al eeuwen gebruikt.

EK14. wat valt er af te leiden uit een schets?

Wanneer het snijpunt van twee lijnen expliciet wordt aangeduid op een schets, dan mogen we aannemen dat de lijnen snijdend zijn. Een hoek die op een schets 90°lijkt, zonder dat het expliciet aangegeven is, hoeft geen 90°te zijn. Niet alles kan zomaar uit een schets afgeleid worden.

Hoofdstuk 4

Literatuurstudie over didactiek van meetkunde

In dit hoofdstuk verzamel ik didactische tips die volgens mij een positieve kijk op wiskunde en meetkunde bevorderen.

4.1 Paul Lockhart

Paul Lockhart geeft in zijn artikel (Lockhart, 2002) heel wat kritiek op het wiskundeonderwijs. Hieronder vat ik enkele tips samen die hij aan wiskundeleerkrachten geeft.

Vanuit zijn ervaring als wiskundeleerkracht meent hij dat een positievere kijk op wiskunde zou ontstaan wanneer studenten de kans krijgen om zelf eigen problemen naar voor te brengen, en door hen zelf vermoedens en ontdekkingen te laten formuleren. Verder gelooft hij dat je als leerkracht studenten moet laten fout zijn, gefrustreerd of geïnspireerd. In de klas zou gezamenlijk moeten nagegaan worden of een gegeven argument aan de esthetische principes van eenvoud en elegantie voldoet. Ook is het de taak van de leerkracht om de studenten het héle verhaal te laten horen. Niet alleen het wiskundeonderwerp maar ook de geschiedenis, filosofie, ontwikkeling, esthetische criteria en de huidige stand van zaken moet aan bod komen.

De leerkracht moet voor echte problemen kiezen, natuurlijk en aangepast aan de smaak, persoonlijkheid en ervaringen van de student. Aan studenten moet de tijd gegeven worden om zelf uitvindingen te doen. De leerkracht moet flexibel zijn, en helpen om argumenten van de leerlingen te verfijnen. Betekenisvolle problemen kunnen leiden tot een synthese van diverse ideeën, tot onbekende terreinen van debat, tot een gevoel van thematische eenheid en harmonie.

Als leerkracht moet je de studenten zelf begrippen laten definïeren in een natuurlijke probleemcontext, ze zelf laten beslissen wat een woord betekent, of welke notaties ze willen gebruiken, ze laten zien hoe een wiskundige structuur ontwikkeld wordt vanuit een probleemcontext.

Best geef je geen koude, sluitende deductie, leg je geen bewijsschema op, laat je de studenten niet naäpen en laat je ook geen vanzelfsprekende dingen bewijzen. Laat merken dat je de geest van het argument boven formalisme verkiest en acht een rigoureus bewijs slechts nodig als je fantasieobject zich op een tegenintuïtieve wijze gedraagt. Start niet met definities maar met problemen en geef voor elke definitie een verantwoording.

4.2 Karen François

In haar paper schrijft Karen François (2007) dat in het wiskundecurriculum van Vlaamse middelbare scholen enerzijds een gebrek is aan een filosofie en anderzijds impliciet een absolutistische filosofie aanwezig is. Ze bekritiseert een curriculum dat wiskunde voorstelt als een geheel van technische procedures zonder een culturele basis. Deze absolutistische visie op wiskunde in Vlaanderen heeft volgens Karen François een impact op de gebruikte wiskundedidactiek.

Er is een grondig verschil tussen de didactiek in het beroeps- en het algemeen onderwijs. In het beroepsonderwijs werkt men met modules, en eerder projectgericht. In het ASO daarentegen is wiskunde een apart vak en de didactiek is eerder gericht op het aanleren van wiskundetechnieken. Het leerproces is er onpersoonlijker. "Wanneer het op technieken gerichte curriculum van wiskunde, de wiskunde verlaagt tot het uitvoeren van technieken zonder nadenken of interactie, dan is er minder plaats in een les voor kritisch nadenken, noch voor historische, menselijke en culturele aspecten van wiskunde" (François, 2007, p.25).

In verband met dit onpersoonlijke karakter van het leerproces schrijft ze verder dat "regels moeten aangeleerd worden, procedures moeten aanvaard worden en de vaardigheden beoefend. Het maakt niet uit wat de student bijdraagt. Het wiskundig resultaat is, en dit zal altijd zo zijn, hetzelfde. Studenten worden niet gezien als individuen, maar als lege emmers. De leerkracht wordt gezien als de expert" (François, 2007, p.27).

Verder vindt ze het spijtig dat de didactiek wordt gedomineerd door handboeken. "Leerkrachten worden gedomineerd door hun handboeken, en zodoende missen ze de kans om hun leerklingen te kennen en te helpen. De studenten moeten alleen stilzitten, mooi luisteren en gehoorzamen. Ook moeten ze oefenen om de juiste antwoorden te geven. Om het leerproces te verpersoonlijken, moeten leerkrachten kritisch omgaan met beschikbaar materiaal, en zoeken naar de interesses en ervaringen van de studenten."

4.3 Filosoferen in de wiskundeles

Suzanne Prediger vindt dat in de wiskundeles gefilosofeerd zou moeten worden. Neubrand, zoals geciteerd in (Prediger, 2007, p.47), beschreef op welke vlakken dit filosoferen tijdens wiskundelessen mogelijk is. "Tijdens de lessen wiskunde kan de leerkracht spreken over de typisch wiskundige werkwijzen, over hun waarde en betekenis. Of over heuristieken bij probleemoplossen bijvoorbeeld, over de vorming van concepten, over typisch wiskundige methoden als systematiseren, classificeren, abstraheren, over schema's, bewijstechnieken enzovoort.

Spreken over de gehele wiskunde vanop een afstand. Over de rol van toepassingen bijvoorbeeld, of over bewijzen en hun rol in wiskunde. Spreken over het verschil tussen wiskunde en andere wetenschappen, over oorsprong en aard van wiskundige kennis."

Dimitris Chassapis (2007) beschrijft een trainingscursus voor leerkrachten wiskunde, die filosofie van de wiskunde bevat. Organisatie en inhoud wordt besproken, alsook resultaten. Een duidelijke verandering in de wiskundekijk van de leerkrachten wordt achteraf vastgesteld. De positieve respons van de leerkrachten was overweldigend. Wel botste men tijdens de cursus soms op een te beperkte achtergrondkennis van de leerkrachten.

4.4 Tatiana Ehrenfest–Afanassjewa (1876–1964)

Mevrouw Ehrenfest studeerde wis- en natuurkunde in Petersburg. Daar werkte ze als docente aan een meisjesgymnasium en aan de vrouwenuniversiteit. Ze vervolgde haar studies in Göttingen bij Felix Klein en David Hilbert. Ze huwde met Paul Ehrenfest, een theoretische fysicus. Ze publiceerde over natuurkunde, maar trok vooral de aandacht met haar ideeën over meetkunde-onderwijs.

Sieb Kemme gaf een uiteenzetting (Kemme, 2006) waaruit duidelijk blijkt dat mevrouw Ehrenfest inspiratiebron was voor de realistische meetkunde van Freudenthal. Wiskundeonderwijs moest volgens haar zorgen voor de persoonlijke ontplooiing van de student. Leren op eigen kracht, en leren door doen waren haar motto's. Uitgaande van eigen ervaringen en eigen waarnemingen, hechtte ze veel belang aan de ontwikkeling van het denken.

Meetkundeonderwijs diende zich volgens haar in drie fazen te voltrekken: intuïtief (10–12 jaar), systematisch (12–16 jaar), en axiomatisch (16–18 jaar). De intuïtieve faze werd gekenmerkt door aanschouwelijkheid, gebruikmaking van evidente begrippen en ruimtelijke verschijnselen. Een zelfzoekende houding van de student was hierbij essentieel. Dit ging in tegen de euclidische traditie.

Voor de intuïtieve cursus stelde zij een bundeltje samen met 194 opgaven, gebundeld in 19 paragrafen: de Übungensammlung (Ehrenfest-Afanassjewa, 1931). Deze opgaven waren bestemd voor 10–14 jarigen en vereisten experimenten, gedachtenexperimenten, tekenen en redeneren. Voorbeelden werden door mevrouw E. gekozen uit dingen die aan deze leerlingen erg vertrouwd waren. Een spinnetje op het plafond, een gespannen draad, apparaten uit het dagelijks leven waren haar inspiratiebron.

Aanzetten tot de systematische cursus werden reeds in de eerste faze gegeven. De studenten moesten bijvoorbeeld driehoeken tekenen op een plat vlak, op een cilinder en bol. Ze moesten zelf regels zoeken, verzamelen en met elkaar in verband brengen. Regels werden ontdekt door voorbeelden en tegenvoorbeelden.

4.5 Piet Van Albada (1905–1997)

Ed de Moor beschrijft in zijn artikel, Het kistje van Van Albada (de Moor, 2001), het werk van de Nederlandse wiskundedidacticus Piet van Albada. Van Albada ontwierp voor het Montessorilyceum te Rotterdam een reeks meetkundeopdrachten die hij op kaarten in een houten kistje bewaarde. Hiervoor inspireerde hij zich op de Übungensammlung van mevrouw Ehrenfest. Zijn bedoeling was een cursus te ontwerpen "die zinvol was voor alle richtingen".

Hij ging ervan uit dat kinderen op twaalfjarige leeftijd al heel wat meetkundige noties verworven hebben. Bij het zoeken naar materiaal probeerde hij steeds bruggen te slaan tussen passieve, intuïtieve meetkundekennis uit de jeugd van de studenten, en actieve, wetenschappelijke kennis van op school. Hij stelde de studie van het axiomastelsel uit tot in het vijfde jaar, en liet bewijzen van evidente stellingen achterwege.

Zijn opdrachten kennen een groot realiteitsgehalte. Hij gebruikte foto's van beelden uit het dagelijks leven, tegelvloeren, verkeer, gebouwen, legpuzzel. Hij probeerde zijn leerlingen inzicht bij te brengen op een aanschouwelijke manier, met een hoog niveau aan gegeven verklaringen, die nog net geen bewijzen waren. Hij probeerde dan ook een oriënteringsbasis te scheppen voor het latere axiomastelsel van de euclidische meetkunde, en voor de studie van andere meetkundes.

Hij volgde de driedeling die door mevrouw Ehrenfest gemaakt werd, namelijk intuïtief, systematisch en axiomatisch. Deze driedeling stemt overeen met het principe van “concreet, schematisch en abstract”. Voor het systematische deel wou hij zoveel mogelijk aanschouwelijkheid. Hij was bijvoorbeeld voorstander van het bestuderen van geodetische lijnen op bol, kegel en vlak. Uitdagende vragen waren voorbeelden van de bewustmaking van de betrekkelijkheid van de euclidische axioma's . Bewijzen vroeg hij niet, wel moesten de antwoorden door de studenten gemotiveerd worden.

Erg benieuwd naar de inhoud van dit kistje, ben ik op bezoek gegaan in Utrecht bij Martin Kindt om het kistje eens grondig te bekijken. Figuur 4.1 toont de foto die ik ervan nam. Het kistje bevat een collectie opdrachten op karton en papier. Ik hoopte hiertussen inspiratie te vinden voor opdrachten die ik tijdens de lessenreeks aan de leerlingen zal geven. Denkend aan het spinnetje van mevr. Ehrenfest, ging ik op zoek naar vertrouwde contexten voor de leerlingen. Spijtig genoeg waren de opdrachten uit het kistje vooral geschikt voor leerlingen van de eerste graad. De lessenreeks die ik wil maken, is voor een vierde jaar, dus tweede graad.

Figuur 4.1: Het kistje van Van Albada

Van Albada legt in zijn artikel, ”An Introductory course of Geometry”(Van Albada, 1958), uit dat leerkrachten in Montessorischolen proberen spontane activiteit bij de leerlingen te stimuleren, door hen passend instructiemateriaal aan te bieden. Uitgangspunten voor de meetkundecursus waren ondermeer dat vlakke meetkunde samen met ruimtemeetkunde moest gegeven worden, en dat vanzelfsprekende stellingen niet bewezen moesten worden. Gestart werd met het verkennen van de ruimte en zijn meetkundige eigenschappen. In het vijfde leerjaar werd de hele theorie herhaald en geordend. Het parallellenaxioma kreeg speciale aandacht.

Er werd materiaal gebruikt van verschillende types (A, B, C en D), naargelang het doel .

- Materiaal van type A.

  Materiaal van dit type diende voor de bewustmaking van de leerling van zijn eigen meetkundige intuïtie. Het beeld dat de leerling van de ruimte heeft, is vanuit zijn jeugd fysiologisch. Zien, voelen, ruiken,... hielp bij de opbouw van dit beeld. De fysiologische ruimte verschilt erg van de euclidische. De drie ruimtelijke dimensies zijn niet equivalent, en verschillen qua diepte. Wanneer objecten verplaatst worden, vervormen ze: ze vergroten of verkleinen.

  Ook is de fysiologische ruimte subjectief: het uitzicht van een object hangt af van de positie en oriëntatie van de waarnemer. Het materiaal voor de meetkundelessen moet met handen en ogen onderzocht kunnen worden, zodat de leerlingen de euclidische ruimte aan de bekende fysiologische ruimte kunnen koppelen.

- Materiaal van type B.

  Met materiaal van dit type werd waardering voor kunst opgewekt. Leerlingen kregen de kans om mooie, symmetrische figuren te tekenen. Er werd gewezen op de bruikbaarheid van meetkundige constructies en technieken in de kunst. Ondertussen creëerde men ook leerlingenactiviteit en werd de interesse van de leerlingen opgewekt.

- Materiaal van type C.

  Materiaal dat diende als voorbereiding op latere theorie. Tijdens het behandelen van meer systematische meetkunde leek het nuttig om terug te kunnen blikken op relevante meetkundige ervaringen die met handen en ogen gedaan werden.

- Materiaal van type D.

  Dit was het testmateriaal, dat aan alle kinderen toeliet om goed te presteren. Toch kon door de leerkracht worden opgemerkt welke kinderen meer getalenteerd waren dan anderen, door de nauwkeurigheid en door de uitvoeringswijze.

4.6 P.M.Van Hiele en Dina Van Hiele–Geldof

De Van Hieles beschrijven in het artikel “Report on Mehods of initiation into geometry” (van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958) hoe ze zelf meetkundeonderwijs gaven in een eerste jaar tijdens het schooljaar 1955–56. De initiatie tot meetkunde duurde een semester, en handelde over figuren. Startend met een kartonnen kubus, werkend met meccano-constructies, met koorden en spiegels bestudeerden de leerlingen met handen en ogen de rechthoek, de regelmatige veelhoeken en symmetrie. De Van Hieles doen verder uitspraken over hun uitgangsprincipes voor het meetkundeonderwijs. Hun analyse van het meetkundig leerproces is gebaseerd op hun leservaringen en op experimenten zoals beschreven in het proefschrift van Dina.

In haar proefschrift beschrijft Dina Van Hiele (1957) hoe ‘betegelingen van een vloer’ kunnen leiden tot het begrijpen van congruentie, regelmatige veelhoeken, ... Hiervoor voert ze lange vraaggesprekken met de leerlingen.

Voortgang in hun denkmodel voor meetkunde zou volgens de Van Hieles meer afhangen van de gekregen lessen dan van de leeftijd van de studenten. Bovendien werden volgens Crowley (1987) door de Van Hieles een aantal leerlingactiviteiten aanbevolen om elk denkniveau te bereiken.

Niveau 0. Voorzie mogelijkheden voor de studenten om te voelen, in te kleuren, te knippen, en te construeren in papier of karton. Laat de leerlingen een vorm identificeren in een schets, in blokken of meegebracht materiaal en ook in fysische objecten uit de klas en binnenin andere vormen. Knutsel zelf vormen met papier, tekening of stokjes. Beschrijf de meetkundige vormen en constructies met woorden en gebruik standaardtaal en eigen taal.

Werk op problemen die oplosbaar zijn door vormen te verplaatsen, te tellen of te meten.

Niveau 1. Termen als 'alle', 'sommige', 'nooit', 'soms' moeten gebruikt en aangemoedigd worden. Voorzie gelegenheden voor de studenten om te meten, kleuren, knippen, modelleren om eigenschappen van figuren te herkennen. Beschrijf een klasse figuren door z'n eigenschappen. Laat de leerlingen, zonder een tekening te gebruiken, een figuur beschrijven aan iemand die ze nooit zag. Maak fiches met eigenschappen voor elke figuur. Vergelijk vormen aan de hand van hun karakteriserende eigenschappen. Bemerk bijvoorbeeld hoe een vierkant en een ruit gelijk zijn en toch verschillend op vlak van hoeken en zijden.

Sorteer en hersorteer vormen aan de hand van een bepaalde eigenschap, bijvoorbeeld het aantal rechte hoeken, of het aantal parallelle zijden. Identificeer en teken een figuur op basis van de mondelinge of geschreven beschrijving van z'n eigenschappen.

Identificeer een vorm uit visuele aanwijzingen of laat een vorm geleidelijk aan zien en vraag bij elk stadium naar mogelijke namen. Leid empirisch regels en generalisaties af vanuit vele voorbeelden. Identificeer eigenschappen die toelaten om verschillende klassen van figuren te onderscheiden. Ontdek eigenschappen van niet-vertrouwde vormen. Gebruik gepaste vocabulaire en symbolen. Los meetkundige problemen op die de kennis van eigenschappen van de figuren vereisen.

Niveau 2. Leer de studenten termen aan zoals 'hieruit volgt dat', 'als ... dan ... ' Voorzie gelegenheden om de relaties te bestuderen die op niveau 1 ontstonden. Zoek naar inclusies en implicaties. Gebruik kaartjes met eigenschappen erop, verander een vierhoek in een trapezium of parallellogram, naar een rechthoek. Wat moet hiervoor gebeuren? Bepaal een minimaal aantal eigenschappen dat een figuur beschrijft.

Hierin kunnen studenten elkaar controleren en helpen. Vraag dan aan de studenten hoe ze een bepaalde figuur zouden beschrijven aan iemand. Kan dit met minder stappen, of met andere? Ontwikkel en gebruik definities en volg informele argumentaties.

Presenteer zelf informele argumentaties aan de hand van diagrams, kartonnen vormen of een logisch schema. Gebruik pijlenvoorstellingen en kaarten om de oorsprong van een idee te achterhalen, of maak er een stamboomschema van. Laat bij deductieve afleidingen enkele stappen weg en laat dit dan aanvullen door de leerlingen.

Toon de leerlingen dat vaak meer dan een aanpak mogelijk is: definieer bijvoorbeeld een parallellogram op 2 wijzen. Schrijf het omgekeerde van bepaalde stellingen zoals: 'als het regent draag ik laarzen' . Bespreek hiervan dan de geldigheid. Los problemen op waarbij de eigenschappen van figuren en relaties hiertussen van belang zijn. Bijvoorbeeld zoek de methode om de middelloodlijn van een interval te construeren.

Niveau 3. Gebruik en benadruk op dit niveau de betekenis van 'axioma', 'postulaat', 'stelling', 'omgekeerde stelling', 'nodig en voldoende' enzoverder. Laat studenten bijvoorbeeld identificeren wat gegeven en wat gevraagd is in een gegeven bewering.

Identificeer de informatie die je uit een figuur of uit gegevens kan afleiden. Om de betekenis van 'definitie', 'postulaat' enz. te tonen, kan je bijvoorbeeld vragen welk van de volgende uitspraken een definitie, stelling, of postulaat is en waarom.

- punten op dezelfde lijn zijn collineair.
- twee punten bepalen een lijn.
- elk lijnstuk heeft één midden.
- het midden van een segment snijdt het in twee.

Om een 'nodige en voldoende voorwaarde' te demonstreren

- een vierkant is een vierhoek ...

Laat de leerlingen nu rigoureus de eigenschappen uit niveau 2 bewijzen. Laat hen ook onvertrouwde relaties aantonen. Vergelijk verschillende bewijzen met elkaar. Gebruik verschillende bewijstechnieken en identificeer algemene bewijsstrategieën. Denk met de studenten na over meetkundig denken. Ga ook na welk type denken gebruikt wordt, inductief of deductief, bij volgende redeneringen:

- Alle geiten hebben een baard. Sandy is een geit dus ze heeft een baard.
- Shelly meet alle hoeken in een vierhoek en bevestigt dat ze samen 360 zijn.

4.7 Werken aan een positieve kijk op probleemoplossen

Volgens McLeod (1992) vezamelden Cobb et al. in 1989 door klasobservaties gegevens over het omgaan van een wiskundeleerkracht met emoties. De leerkracht legde haar normen expliciet op in de les en beleefde ze ook zelf. Verder zag ze erop toe dat de normen ook door de studenten beleefd worden. Het resultaat werd een klas waarin studenten tevredenheid en enthousiasme opbrachten voor probleemoplossen. Ze zagen zichzelf als autonome leerders. Zo legde de leerkracht de noodzaak uit van het nakijken van een oplossing. Ook had ze het over aanvaardbaar gedrag tijdens probleemoplossen. Herhaaldelijk benadrukte ze de voldoening die je krijgt als je zelf de problemen oplost. Aan de studenten die klaar waren vroeg ze om geen oplossingen door te geven aan studenten die nog werkten. Bovendien was ze erg duidelijk in het feit dat doorzetten ondanks frustratie nodig is om een taak tot een goed einde te brengen.

Grouws en Cramer observeerden volgens McLeod (1992) probleemoplossen in een aantal klassen van het lager secundair onderwijs. Ze namen interviews af van leerkrachten waarbij studenten van probleemoplossen hielden. Een aantal kenmerken van de klassfeer droegen bij tot het ontwikkelen van positieve affecties tegenover probleemoplossen. Zo werkten deze leerkrachten hard om een goeie relatie met de studenten te hebben. Ze waren eerder vriendelijk dan formeel. Ze deelden persoonlijke anekdotes over hun eigen probleemoplossen met de studenten, en illustreerden zo hun eigen zwaktes en sterktes. De meeste leerkrachten hadden een eigen beoordelingssysteem voor de oplossing van problemen, waarbij niet alleen aandacht geschonken werd aan de pure oplossing van het probleem. Regelmatig lieten deze leerkrachten hun studenten groepswerk doen, omdat dit volgens hen het zelfstandig werken promootte en gevoelens van frustratie verkleinde.

4.8 Gebruik van interviewmethodes tijdens de wiskundeles

Tijdens wiskundelessen is het mogelijk om als leerkracht de methode van het klinisch interview te gebruiken. Ginsburg et al. (1997) beschrijven hoe een leerkracht van de tweede graad dit aanpakte. Ze gaf een eenvoudig rekenprobleem en vroeg de leerlingen om dit op hun eigen manier op te lossen. Daarna besprak ze de verschillende gebruikte strategieën. Elke student kwam aan het woord, sommigen schreven hun oplossing neer. Het gebruik van interviewmethodes veranderde de hele sfeer in de klas. De leerkracht vestigde haar aandacht niet op de wiskundekennis, maar op de denkpatronen van de studenten. Wiskunde werd meer dan een vast geheel van kennis. Het gebruik van de verschillende strategieën werd interessant en wenselijk. Hoe studenten over wiskunde denken, werd het nieuwe lesonderwerp.

4.9 Studie van Yackel en Rasmussen

Lester (2003) schrijft dat Yackel en Rasmussen een kader ontwikkelden voor het interpreteren van een klasanalyse die psychologische en sociologische perspectieven coördineert. Fundamenteel was de aanname dat beliefs essentieel cognitief van aard zijn. Een wiskundemening is de manier waarop de student wiskunde begrijpt. De auteurs beweren dat door psychologische (mening/opvattingen/beliefs van de student) en sociologische (de klasnormen) factoren te combineren, het verklaren van wijzigingen in wiskundemeningen mogelijk wordt. Een belangrijk besluit dat ze trekken, is dat door het geven van directe aandacht aan het afspreken van klasnormen, leerkrachten de wiskundemening van hun studenten kunnen beïnvloeden. Wiskundemeningen ontstaan niet spontaan, ze komen voort uit klaservaringen.

4.10 Besluit: eisen voor de didactische aanpak van wiskundelessen waarbij de positieve kijk van de studenten gevoed wordt

De wiskundemening van studenten kan veranderd worden door het duidelijk afspreken van klasnormen

Met het afspreken van klasnormen wordt bedoeld dat studenten te horen krijgen wat goed/fout is, wat belangrijk is of bijkomstig, wat van hen verwacht wordt en wat niet. Deze klasnormen moeten expliciet opgelegd worden. De leerkracht moet ze zelf op de eerste plaats beleven, en erop toezien dat alle studenten ze ook naleven.

Wat bijvoorbeeld opgelegd kan worden, is aanvaardbaar gedrag tijdens probleemoplossen. In dit verband kan er afgesproken worden dat de studenten allemaal zelf proberen, dat ze elkaar laten zoeken, en niet hun oplossing doorgeven aan wie nog bezig is, dat ze doorzetten ondanks frustraties, en dat ze hun oplossing nakijken.

De studenten moeten weten dat ze allemaal de tijd krijgen om persoonlijk na te denken, en een eigen oplossing te zoeken. Elke student moet weten dat hij meetelt: door aan het woord te komen of op bord. Bovendien moet rekening gehouden worden met de oplossing die door de studenten werd aangebracht. Spontane activiteit moet gewaardeerd worden, bewijsschema's mogen niet opgelegd worden. Fouten zijn toegelaten. Studenten mogen gefrustreerd of geïnspireerd zijn.

In plaats van zichzelf op te stellen als de expert kan de leerkracht de eigen zwaktes en sterktes bij het probleemoplossen tonen aan de studenten. Of de eigen denkpatronen meedelen, en een beoordelingssysteem gebruiken waarin niet alleen het uiteindelijke resultaat van een probleem telt. Ook kan de leerkracht erop letten dat tijdens de les de aandacht niet gevestigd wordt op de kennis van de studenten, maar wel op hun denkpatronen, door hen voortdurend te vragen naar hun gebruikte methodes.

De wiskundemening van studenten kan veranderd worden door het curriculum aan te passen

De selectie van **wat een leerkracht geeft** tijdens de wiskundeles, voedt ook de kijk die studenten op wiskunde hebben. Indien wiskundelessen beperkt worden tot het trainen van bepaalde technieken, worden ze door de studenten al vlug als onpersoonlijk ervaren.

Het *verpersoonlijken* van wiskundelessen kan door bedenkingen van *historische*, *filosofische* en *esthetische* aard toe te voegen. Of er kan over de evolutie en huidige stand van zaken gesproken worden. Natuurlijk moet men hierbij rekening houden met de interesses en ervaringen van de betreffende studenten. Filosoferen kan bijvoorbeeld over wiskundige werkwijzen, hun waarde en hun betekenis, of over de rol van bewijzen.

Werken met *echte, natuurlijke problemen*, die de studenten kennen uit hun eigen ervaringen verdiend de voorkeur. De problemen moeten in de smaak vallen en vertrouwd zijn.

Opdrachten die aan de studenten voorgeschoteld worden hoeven niet oplosbaar te zijn in enkele minuten. Ze mogen er best wat op zoeken, er heuristieken voor gebruiken, en genoodzaakt zijn om een oplossingsplanning te maken.

De leerkracht kan mits wat zoekwerk opdrachten vinden die bovendien betekenisvol zijn, en van waaruit heel wat theorie ontwikkeld kan worden (principe van didactische fenomologie). Verder kunnen studenten tijdens de studie van een wiskundeonderwerp reeds voorbereid worden op wat later nog moet komen.

Het curriculum moet *aangepast zijn aan het aanwezige denkniveau* van de studenten. Meetkunde van een hoger denkniveau kan pas aanslaan wanneer de studenten het voorgaande niveau volledig bereikt hebben. In de lessenreeks zal niveau 3 gegeven worden.

De wiskundemening van studenten kan veranderd worden door de manier waarop de lessen gegeven worden

Leerlingen kunnen heel wat wiskunde *zelf ontdekken* (principe van re-invention). Zowel het definiëren van nieuwe wiskundeconcepten als het formuleren van conjectures kan vaak op natuurlijke wijze vanuit een gegeven probleem.

De leerkracht stelt zich beter *vriendelijk* op dan formeel, en bouwt best aan een goede relatie met de studenten. De leerkracht moet de studenten proberen te kennen.

Het gebruik van *visueel materiaal* maakt veel wiskunde aanschouwelijk en verstaanbaar. Het lokt ook leerlingenactiviteit uit. Materiaal van de types A,B,C,D gebruiken zoals beschreven in 4.5, is zeker zinvol. Type A zorgt voor de bewustmaking van de leerling van zijn eigen meetkundige intuïtie. Type B wekt waardering op voor de esthetische aspecten van wiskunde. Type C is nuttig als voorbereiding op latere theorie. Type D tenslotte is geschikt als testmateriaal.

Door samenvattingen en *schema's van vroeger geziene leerstof* te laten gebruiken, begrijpen de leerlingen dat het accent niet ligt op memoriseren, maar wel op het begrijpen van de leerstof. De leerlingen aansporen om niet alleen hun ogen de kost te geven, maar ook te voelen met de *handen*, helpt hen om de link te leggen tussen de meetkundige ruimte en de fysische ruimte waarmee ze reeds vertrouwd zijn.

Er moet ook aandacht zijn voor de sfeer die in de klas heerst. Er moet een sfeer zijn van samen nadenken, waarbij er plaats is voor gezonde wiskundige kritiek.

Wat ook tot een goeie *sfeer* kan bijdragen, is het centraal plaatsen van een object —een voorwerp, foto of tekst— dat verwijst naar het lesonderwerp. Dit leidt de aandacht van de studenten voortdurend naar het lesonderwerp en werkt motiverend indien het object past bij de smaak van de studenten. Is het object natuurlijk, dan wijst het op de toepasbaarheid van wiskunde in het dagelijks leven. Is het vertrouwd, dan stelt het de studenten gerust. Wordt het bovendien betekenisvol gekozen, dan kan het voortdurend leiden naar nieuwe facetten van de bestudeerde theorie.

Voor alle leerlingen zou de leerkracht tijdens de wiskundelessen *succeservaringen* moeten uitlokken, zodat hun zelfvertrouwen groeit. De leerkracht kan hen laten ervaren dat ze logisch kunnen denken, en welke kracht dit logisch denken heeft.

4.11 Het probleemoplossingsmodel van prof. Van Oystayen

Professor Van Oystayen introduceert in zijn cursus 'Didactisch Pakket' 2008-2009 een procesmodel voor probleemoplossing, dat schematisch voorgesteld wordt in figuur 4.2.

Hierbij staan de letters A, B, B', C, D, E, E' voor denkactiviteiten, en vat ik de omschrijving van de begrippen samen als volgt :

Concreet Probleem (C.P.) Het gegeven probleem in zijn oorspronkelijke formulering.

Generiek Probleem (G.P.) De formalisering van het concreet probleem. Deze wordt verkregen door het oorspronkelijk probleem te ontdoen van bijzaken, te ontbeelden. Het is onafhankelijk van de inhoud van het concrete probleem, maar wel afhankelijk van het structureel behandelen ervan. Het zal voor alle studenten ongeveer gelijk zijn.

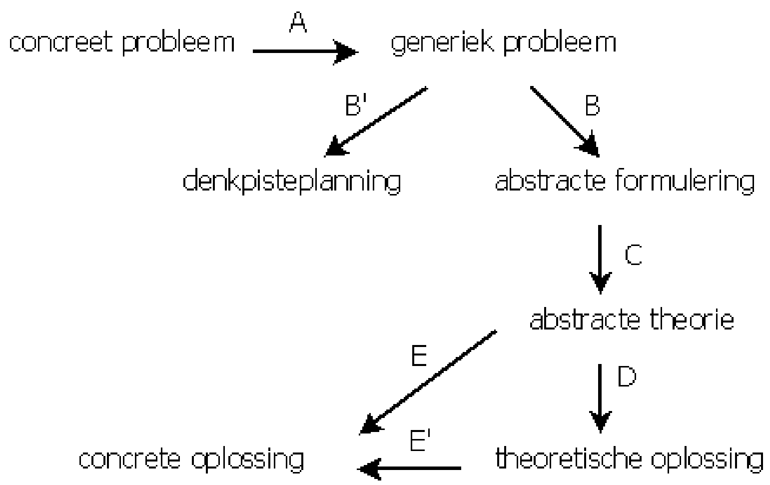
Abstracte Formulering(A.F.) Het generiek geformaliseerd probleem. Het is de uitdrukking van het leerproces in termen van de logische structuur van het G.P. Het is ook verbeelding, het kan inhouden dat een abstract model wordt geconstrueerd.

DenkpistePlanning (D.P.) Het plannen van de te ondernemen analyses. Het poneren van bruikbare veronderstellingen. Het toetsen van de A.F. aan het C.P. en eventueel herplannen.

Abstracte Theorie (A.T.) De logisch gestructureerde redenering of theorie in termen van kennis met passende argumentaties of bewijzen voor alle strategieonderdelen. Het is de basis van de theoretische oplossing.

Theoretische Oplossing(T.O.) De oplossing van het probleem in een niet direct-toepasbare vorm. Het is de algemene, theoretische conclusies die verkregen worden door de logische argumentatie toe te passen op het generiek geformaliseerd probleem. Dus is het resultaat van A, B, C.

Concrete oplossing (C.O.) Het resultaat van het stapsgewijs concreet interpreteren van de generieke oplossing van het probleem, met extra aandacht voor mogelijke uitzonderingssituaties.



Figuur 4.2: Het probleemoplossingsmodel van prof. Van Oystayen

Hoofdstuk 5

Onderzoeksmethodologie

5.1 Onderzoeksmethodologie van de thesis

Graag wil ik in deze thesis onderzoeken hoe tijdens wiskundelessen bijgedragen kan worden tot een positieve kijk van de leerlingen op meetkunde. Voor dit onderzoek gebruik ik de methode van ontwikkelingsonderzoek.

5.1.1 Wat is ontwikkelingsonderzoek ?

Paul Drijvers (2003) beschrijft in zijn doctoraat ontwikkelingsonderzoek als een onderzoeksmethode die zich richt op het ontwikkelen van theorieën, lesmateriaal en een empirisch begrip over 'hoe leren werkt'. Het belangrijkste doel is het begrijpen van het leren van de leerling, niet het uitleggen.

Een eerste karakteristiek van ontwikkelingsonderzoek is het belang dat wordt gehecht aan het ontwerpen van onderwijsactiviteiten. Dit is een betekenisvol onderdeel van de onderzoeksmethode omdat het de onderzoeker dwingt zijn keuzes, hypotheses en verwachtingen te expliciteren. Een tweede belangrijk kenmerk van ontwikkelingsonderzoek is het bijstellen van het leertraject in de loop van het onderzoek, op basis van opgedane ervaringen.

Een ontwikkelingsonderzoek bestaat uit verschillende onderzoekscycli waarin gedachtenexperimenten en lesexperimenten elkaar afwisselen. Een macrocyclus bestaat uit een voorbereidende faze (die de ontwikkeling van een hypothetisch leertraject omvat en het ontwerp van onderwijsactiviteiten), een onderwijsexperiment en een retrospectieve fase. Tijdens de retrospectieve faze vindt de data-analyse plaats.

In de samenvatting van zijn doctoraat vermeldt Drijvers verder dat de retrospectieve faze het denkproces van de onderzoeker moet weergeven, om de veranderingen die tijdens de verschillende cyclussen plaatsvinden, verstaanbaar te maken. De inzichten van de onderzoeker evolueren immers tijdens het onderzoek, wat resulteert in een nieuwe theorie, nieuwe hypotheses en nieuwe lesopdrachten. De retrospectieve faze vormt de feed-forward voor de volgende cyclus. Een microcyclus bestaat uit een reeks van opeenvolgende lessen.

Ontwikkelingsonderzoek wordt ook wel eens 'theoriegeleid knutselwerk' genoemd: de onderzoeker probeert globale en lokale theorieën te combineren en te integreren in de lessenreeks die hij ontwerpt. Tijdens het onderzoek is het ontwikkelen van een lessenreeks belangrijk. Drijvers legt uit waarom. Enerzijds is een lessenreeks nodig om het experiment te kunnen uitvoeren. Anderzijds dwingt het ontwerpen van een concrete lessenreeks de onderzoeker tot het maken van keuzes, hypotheses en verwachtingen die anders impliciet gebleven waren. Ook geeft het ontwikkelen van de lessenreeks aan hoe bepaalde accenten in de theoretische ontwikkeling gelegd moeten worden en hoe de inzichten en hypotheses van de onderzoeker evolueren. Hierdoor is het lesontwerp een erg belangrijk deel van het onderzoek, vooral wanneer theorieën nog in de maak zijn.

5.1.2 Waarom ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksmethode voor deze studie ?

Een eerste reden is de vorm van de geformuleerde onderzoeksvraag. Ik wil niet weten "of ..." maar wel "hoe ...". Ik wil begrijpen **hoe** in een lessenreeks over de cirkel bijgedragen kan worden tot de ontwikkeling van een positieve kijk op meetkunde. Dus de algemene objectieven van ontwikkelingsonderzoek, namelijk "begrijpen hoe", worden weergevonden in de concrete onderzoeksvraag. Een tweede reden is het ontbreken van een kant-en-klaar theoretisch kader over beliefs, zoals al vermeld werd in hoofdstuk ??. Theorieën, hypothesen en lesontwerpen moeten regelmatig herzien en bijgewerkt kunnen worden. Dit kan tijdens de verschillende cyclussen. Tenslotte moeten tijdens het ontwerp heel wat keuzes gemaakt worden die relevant zijn voor de resultaten van de studie. Daarom is het ontwerpproces een integraal deel van het onderzoek. Dit is in overeenstemming met één van de principes van ontwikkelingsonderzoek.

Ontwikkelingsonderzoek verschilt erg van een gewoon experiment, waarbij gewerkt wordt met een controle- en experimentele groep. Dit soort onderzoek is slechts zinvol wanneer er niet teveel variabelen in het spel zijn. Tijdens dit onderzoek zijn er echter enorm veel veranderlijke aspecten en geeft een gewoon experiment geen zinvol beeld.

5.1.3 Bespreking van de drie fazen in een onderzoekscyclus.

Drijvers (2003) bespreekt in zijn samenvatting de drie fazen van een onderzoekscyclus. Ik haalde hieruit de voor mijzelf bruikbare informatie en vat ze samen als volgt:

Het voorontwerp. Tijdens deze eerste faze van een bepaalde cyclus wordt een *hypothetisch leertraject* (HLT) ontwikkeld. Het ontwerp van het HLT vereist de kennis van het begripsniveau bij aanvang en kennis van het einddoel. Daarna moet er een reeks van onderwijsactiviteiten ontwikkeld worden die naar het doel toewerken. Hierbij vermeldt de onderzoeker de reden waarom hij denkt dat ze zullen werken, en ook geeft hij een exacte beschrijving van de denkactiviteiten die ze volgens hem teweeg zullen brengen. Nadat het HLT ook werkelijk in een klas onderwezen werd, zal het aangepast worden op basis van de opgedane ervaringen. Zo start een nieuwe cyclus.

Het lesexperiment. De tweede fase van een cyclus in het ontwikkelingsonderzoek is die van het les- of onderwijsexperiment. Tijdens het onderwijsexperiment worden gegevens verzameld die inzicht kunnen geven in het denken van de leerlingen. De belangrijkste bronnen daarvoor zijn observaties van leerlingengedrag en interviews. Ook ingeleverde taken worden hiervoor als data gebruikt.

De retrospectieve faze. Elke onderzoekscyclus eindigt met een *retrospectieve* fase. Deze gebeurt stapsgewijs.

Een eerste stap is de verwerking van de gegevens. Deze verwerking van de verzamelde gegevens verloopt in vier fazen. Naargelang de relevantie voor de onderzoeksvraag worden stukken van de verzamelde data geselecteerd. Geluidsopnames worden uitgetypt, protocollen worden uitgeschreven, samenvattingen van de werkwijzen van de geobserveerde studenten worden gemaakt. In een eerste faze worden de protocols van de studenten doorgenomen. Opmerkelijke feiten of gebeurtenissen worden genoteerd en vergeleken met de verwachtingen en het coderingssysteem dat voor het experiment werd ingevoerd. Vraag die zich dan stelt is of het coderingssysteem aangepast is om merkwaardige trends en gebeurtenissen te beschrijven.

Een tweede faze is de eerste coderingsronde. Hier worden categorieën van observaties gemaakt, en overlappingen vastgesteld. Door nieuw genomen beslissingen moeten vorige coderingen herzien worden.

Het zoeken naar trends gebeurt in een derde faze. Gebeurtenissen met eenzelfde code worden gesorteerd en deze categorieën worden geanalyseerd. Zo ontstaan deelcategorieën. Bevindingen worden samengevat voor elke categorie en geïllustreerd door stereotiepe klaservaringen.

In de vierde faze, de tweede coderingsronde, worden waardeoordelen toegevoegd aan de codes. Er wordt nagegaan of het gedrag van de student tijdens het protocol correct was, of neutraal of . . . . De gevonden resultaten worden vergeleken met vooraf gestelde verwachtingen. Enerzijds wordt gezocht naar verklaringen voor het eventuele verschil tussen verwachtingen en bevindingen. Anderzijds worden de conclusies van de data-analyse vertaald in feed-forward voor de tweede onderzoekscyclus. Deze feed-forward betreft aanpassingen van het HLT, van hypotheses of van de onderwijsactiviteiten.

In een tweede stap worden de bevindingen geïnterpreteerd. Ze worden ook vergeleken met vooraf gestelde verwachtingen. Er wordt gezocht naar verklaringen voor het eventuele verschil tussen verwachtingen en bevindingen. De conclusies van de data-analyse worden vertaald in feed-forward voor de volgende onderzoekscyclus. Deze feed-forward betrof aanpassingen van het HLT, van hypotheses of van de onderwijsactiviteiten.

5.2 Onderzoeksmethoden naar beliefs

5.2.1 Een overzicht van bruikbare onderzoeksmethoden

Affectieve factoren kunnen niet zomaar gemeten worden, ze moeten afgeleid worden uit de gedragingen van de student, zijn uitspraken of zijn reacties op speciale meetinstrumenten. **Leder en Forgasz** (2006) geven in hun artikel een overzicht van methoden die gebruikt worden in het onderzoek naar affectieve factoren in het onderwijs. Gebaseerd op het verwerpen of aanvaarden van bepaalde uitspraken, zijn er een aantal *schalen* ontworpen, door Thurston, Likert, Guttman, Osgood en anderen. De Likertschaal bijvoorbeeld bestaat uit een aantal uitspraken over het onderwerp waarvan men de affectieve factoren wil bepalen. Studenten kunnen met een uitspraak 'volledig akkoord gaan', of 'totaal niet akkoord gaan', en nog drie gradaties ertussen. Elke score wordt uitgedrukt in punten, zo kan op alle uitspraken een totaal berekend worden.

Ook *projectiemethoden* worden gebruikt bij het onderzoek naar affectieve factoren. Een verhaaltje of een foto wordt aan de student getoond. Deze mag dan een verklaring of uitleg hiervoor uitkiezen of zelf verzinnen. Deze aanpak kan eerder kwalitatief genoemd worden.

Vragenlijsten of lijsten met adjectieven, omschrijvingen voor het onderzoeksobject kunnen ook een beeld geven van de affecties betreffende dit object.

Fysiologische metingen zijn niet zo betrouwbaar. Hartslag en verwijding van de pupillen bijvoorbeeld kunnen aan allerlei factoren te wijten zijn. Bovendien is het storend om deze in een klaslokaal te meten.

Interviews zijn volgens Leder en Forgasz de favorieten bij het onderzoek naar affectieve factoren. Enerzijds kan een interview sterk geleid, gestructureerd worden. Anderzijds kan het ook erg los zijn, ongestructureerd. Dan kan het leiden tot inzichten die vooraf niet voorzien werden. Tenslotte kan de interviewer ook kiezen voor een half-gestructureerde aanpak. De gulden middenweg, die succes heeft bij heel wat onderzoekers naar affect.

Observaties kunnen ook, wel moet de observator objectief zijn.

Nog steeds volgens Leder en Forgasz geeft het PME de voorkeur aan het gebruik van vragenlijsten voor het onderzoek naar beliefs en houdingen tegenover bepaalde aspecten van wiskunde, ook voor onderzoek naar perceptie van de leeromgeving in de klas, voor wiskundevrees, voor aspecten van houdingen tegenover computers, voor aangeleerde hulpeloosheid enzoverder.

Likertschaling wordt door het PME gebruikt voor onderzoek in verband met successen en falen. Ook vertrouwen in, en angst voor wiskunde, angst voor toetsen, verwachtingen bij het leren van wiskunde werden met behulp van de Likertschaling onderzocht.

Vier thema's in verband met affectieve factoren komen in de onderzoeken van het PME aan bod: metingen van affectieve factoren, beschrijvende studies, vergelijkende studies tussen affectieve en cognitieve factoren en theoretische papers.

Voor onderzoek naar affectieve factoren bij het wiskundeonderwijs zijn er twee dingen waar volgens **McLeod** (1992) op gelet moet worden. Eerst en vooral moeten we opletten met het gebruik van kwantitatieve methodes. Traditioneel werden deze methodes gebruikt, en ze verschaften al heel wat nuttige informatie. Maar voor het volledig begrijpen van affecties zijn kwalitatieve methodes steeds een meerwaarde. Zo kan je de studenten een grafiek laten tekenen die hun emoties weergeeft tijdens het oplossen van een moeilijk probleem. Aan studenten kan ook gevraagd worden een dagboek bij te houden waarin ze regelmatig iets over wiskunde neerschrijven. Bovendien moeten studies over affecties gentegreerd worden in cognitieve studies. Studies over probleemoplossen bijvoorbeeld geven ook heel wat informatie prijs over de affecties die hierbij optreden. Studenten kunnen tijdens het oplossen van het probleem gevraagd worden om hun emoties, bedenkingen uit te spreken. Ze kunnen gevraagd worden om luidop een probleem op te lossen. Tijdens de lessen wiskunde zijn heel wat affecties van de studenten zichtbaar.

5.2.2 Het klinisch interview: een bijdrage van Piaget

Voor het onderzoek dat in deze meesterproef wordt gedaan naar de kijk van leerlingen op meetkunde zullen interviews gebruikt worden. Deze methode is volgens Ginsburg et al. (1997) immers het meest aangewezen middel om iets over wiskundig denken van een persoon te ontdekken. De specifieke vorm van interview die tijdens deze thesis gebruikt zal worden, is het klinisch interview. Deze vorm van interview helpt om het onderliggend denkproces van het kind bloot te leggen en werd door Piaget voor het eerst gebruikt. Bedoeling van het klinisch interview is volgens Ginsburg et al. (1997, p.401) om de onderliggende denkprocessen van het kind te ontdekken, daardoor is het één van Piaget's belangrijkste bijdragen aan de psychologie.

In Ginsburg et al. (1997), p.401 wordt weergegeven hoe zo een interview verloopt. Tijdens een klinisch interview worden eerst vragen aan het kind gesteld die vrij algemeen blijven. De antwoorden van het kind bepalen de richting waarin het gesprek verdergaat. De interviewer nodigt het kind uit om te verdiepen in zijn antwoorden en te spreken over zijn denkprocessen. Gedurende het interview maakt en test de interviewer hypotheses over het denken van het kind. Hierbij obseerveert hij het gedrag van het kind en luistert naar de antwoorden. Ook neemt hij verschillende tests af en stelt concrete problemen. Om zijn hypotheses te testen experimenteert hij met verschillende vragen en tenslotte laat hij het kind zijn denkprocessen luidop verwoorden.

Deel II

Model voor een lessenreeks over de cirkel

Hoofdstuk 6

Ontwerp van een Hypothetisch Leertraject

6.1 Constructie van een lessenreeks over de cirkel

Het onderzoek dat ik wou doen omtrent de kijk van leerlingen op wiskunde en meetkunde, zou moeten gebeuren binnen het schooljaar 2010–2011. Gedurende dit jaar moest ik mij op het onderzoek zelf kunnen richten, dus deed ik literatuurstudie vooraf. Vanuit deze literatuurstudie kwam ik in 3.3 respectievelijk 3.4 tot de formulering van 10 algemene en 14 specifieke visies op wiskunde. Ook verzamelde ik in hoofdstuk 4 didactische tips die volgens mij tot een positieve kijk op wiskunde/meetkunde kunnen leiden.

Omdat het ontwerpen van een lessenreeks veel tijd in beslag neemt, maakte ik al een model voor een lessenreeks voordat het onderzoek startte. Ik besloot een lessenreeks over de cirkel te maken voor een vierde jaar aso. Ik koos voor een vierde jaar omdat deze leerlingen al een beetje met het wiskundig denken vertrouwd zijn, maar toch nog niet teveel. Uit de leerplannen van het vierde jaar blijkt dat de leerlingen nu zelf moeten beginnen te redeneren, en zelf meetkundige bewijsjes moeten kunnen maken. Tijdens het geven van bijlessen aan aso-leerlingen van de tweede en derde graad merkte ik echter op dat het vaak fout zit met de kijk van leerlingen op meetkunde (zie 3.4). Vaak weten ze niet echt wat een bewijs is en zien ze het als een soort berekening.

Meetkundelessen leken mij aangewezen omdat ik ondervond tijdens mijn stages en tijdens de bijlessen die ik gaf dat heel wat leerlingen de band tussen realiteit en meetkunde vaak niet beseffen. Enerzijds zien ze niet in dat meetkunde ontstaat vanuit de realiteit van hun dagelijks leven. Anderzijds begrijpen ze niet waarom ze gekende meetkundige figuren zoals een rechte of cirkel nog moeten definieren. Of waarom eigenschappen bewezen moeten worden. Ze weten in principe wel dat je op een schets niet mag voortgaan, maar begrijpen niet waarom dit zo is. Het lijkt me dus zinvol (zie 2.2 en 2.3) om hun kijk op euclidische meetkunde wat te voeden (zie 3.4). Verder viel mijn keuze op het aso, omdat hier volgens mij meer werk is wat betreft een positieve kijk op wiskunde dan in tso. Hiervoor baseer ik mij op de uitspraken van Karen François (zie 4.2).

Om de lessenreeks op te bouwen ontwierp ik eerst een HLT (hypothetisch leertraject). Daarna vertaalde ik dit HLT in concrete lesopdrachten. Hierbij werd ervan uitgegaan dat het denkniveau van de leerlingen van het tweede van Hiele niveau was, en dat aan alle AK's en EK's gewerkt moest worden. Verder baseerde ik mij op de leerplannen van de tweede graad aso gepubliceerd door het VVKSO om het beginniveau van de leerlingen vast te leggen.

6.2 Eisen voor het HLT vanuit de literatuur omtrent beliefs

Uitgangspunt is een realistisch en motiverend probleem (zie Lockhart 3.4.4 en mevr. Ehrenfest 4.4). Omdat de kijk van leerlingen op meetkunde het sterkst tot uiting komt tijdens het oplossen van een nieuw en uitdagend probleem, zal de lessenreeks de structuur van een probleemoplossing hebben. Er zal namelijk gezocht worden op een constructie van een graancirkel die uitvoerbaar is op een veld en in het donker. De concrete graancirkel die bestudeerd wordt verscheen in Engeland in 1997. Hij kreeg zelfs een naam: de Harlekijn.

Figuur 6.1: de Harlekijn

De oplossing van het probleem vergt het gebruik van euclidische meetkunde (zie 3.4.1). Een constructie van deze Harlekijn komt immers neer op construeerbaarheid van een schets van de Harlekijnfiguur op schaal, met passer en liniaal. Zo belanden we op natuurlijke wijze bij de euclidische meetkunde zoals deze door Euclides geïntroduceerd werd in zijn Elementen.

De structuur van het HLT is die van een probleemoplossingsproces (zie 4.11). Tijdens het hypothetisch leertraject wordt een concreet probleem opgelost, waarvoor euclidische, vlakke meetkunde aangewezen lijkt. Alleen moet de theorie over de cirkel nog ontwikkeld worden. Daarom zal het proces dat tot een oplossing zal leiden, gemodelleerd worden door het "probleemoplossingsmodel" dat door professor Van Oystaeyen introduceerde in zijn cursus 'Didactisch Pakket' 2008-2009 (zie 4.11). Schematisch wordt dit voorgesteld in figuur 4.2.

Doordat er in dit model ook aandacht wordt geschonken aan het omschrijven van een generiek probleem dat verbonden is met het oorspronkelijk probleem, lijkt het mij meer geschikt dan bijvoorbeeld het model van Pólya.

Tijdens het oplossen van het constructieprobleem van de Harlekijn ontdekken de leerlingen heel wat zelf. Tijdens de analyse van het probleem ontdekken ze bijvoorbeeld dat er in een vlak gewerkt moet worden, dat de constructies moeten kunnen met passer en liniaal. Ook zien ze in dat de kennis van eigenschappen over cirkels nuttig is, en tenslotte dat het gebruik van de deductieve methode hier op zijn plaats is. Na enkele mislukte constructiepogingen wordt duidelijk dat het probleem niet oplosbaar is in enkele minuten (zie Schoenfeld 3.3.1)

Er zal een planning moeten gemaakt worden voor de aanpak. De heuristiek "deel op in deelproblemen" kan hier gebruikt worden. De Harlekijn is opgebouwd uit gekende meetkundige figuren: cirkels, driehoeken en lijnstukken. De constructie van een gelijkzijdige driehoek wordt eerst ontdekt. Hierbij blijkt deductief redeneren een grote hulp. Om over de onderlinge ligging van de cirkel en rechten of driehoeken te kunnen redeneren, is wel eerst een definitie van cirkel nodig. Deze wordt klassikaal gezocht door de leerlingen, rekeninghoudend met de filosofie van de euclidische meetkunde en met de formulering van reeds gekende begrippen.

Daarna wordt in groepjes verder gezocht naar eigenschappen over de onderlinge ligging van cirkel en rechte, van twee cirkels en van cirkel en driehoek. Zo komen de leerlingen tot de constructie van de raaklijn aan een cirkel. Ze ontdekken de constructie van de ingeschreven en omgeschreven cirkel aan een driehoek. Natuurlijk vergt dit concurrentiebewijzen van de drie deellijnen en de drie middelloodlijnen van de driehoek. Gewapend met een gamma nieuwe eigenschappen over de cirkel wordt het constructieprobleem van de Harlekijn terug aangepakt. Stap per stap wordt nagegaan of de constructie van de verschillende onderdelen mogelijk is met passer en liniaal. Een besluit wordt geformuleerd.

6.3 Eisen voor het HLT vanuit de literatuur omtrent didactiek

Tijdens de lessenreeks zal meermaals gebruik gemaakt worden van logische schema's. Van de 23 eerste definities uit de Elementen maakte ik een eerste logisch schema, dat zich in bijlage A.2.3 bevindt. Dit schema zal tijdens de lessen gebruikt worden telkens wanneer definities aan bod komen. Eerst wordt aan de leerlingen uitgelegd wat de rol van definities in een deductieve theorie is. Bij het zelf definieren van nieuwe objecten zoals cirkel en ingeschreven cirkel moet de logische opbouw van de definities gerespecteerd worden.

Een logisch schema van voorkennis bevindt zich in bijlage A.2.2. Hiervan wordt gebruik gemaakt telkens wanneer de leerlingen een deductieve redenering moeten opstellen.

Doordat leerlingen een schema van de voorkennis mogen gebruiken, begrijpen ze dat het accent niet ligt op memoriseren van de leerstof. Ook wordt het volgens mij makkelijker om een deductief bewijsje zelf te maken. Het werkgeheugen van de leerling kan bij gebruik van schema's van voorkennis immers volledig gebruikt worden om te zoeken naar een passende eigenschap uit deze voorkennis. De voorkennis zelf bevindt zich op een schema voor zijn neus, en hoeft niet via zijn werkgeheugen opgehaald te worden.

Tijdens de lessenreeks moeten de leerlingen hun handen gebruiken (Van Albada zie 4.5). De leerlingen aansporen om niet alleen hun ogen de kost te geven, maar ook te voelen met de handen, helpt hen om de link te leggen tussen de meetkundige ruimte en de fysische ruimte waarmee ze reeds vertrouwd zijn. Ook wordt door het gebruik van verschillende zintuigen de behandelde stof dieper in het geheugen van de leerling verankerd: er worden meer links in het geheugen gelegd. Ik hoop ook op deze manier dieper door te dringen in het dagelijks leven van de leerling zelf.

Het materiaalgebruik tijdens de lessenreeks. Tijdens de lessenreeks zal veel gebruik gemaakt worden van verschillende types van materiaal zoals beschreven door Piet Van Albada (zie 4.5). Materiaal van het type A zorgt voor de bewustmaking van de leerling van zijn eigen meetkundige intuïtie. Voorbeelden hiervan zijn een bundeltje graanhalmen vooraan in klas, de eigen zakinhoud van de leerlingen, een grote schets van de Harlekijn die gevouwen kan worden om te zoeken naar symmetrieën, een stukje maquettekarton met driehoeken erop voor het zoeken van het middelpunt van een ingeschreven cirkel van een driehoek, realistische filmpjes over graancirkels, enz.

Materiaal van het type B wekt waardering op voor de esthetische aspecten van wiskunde. Hiertoe reken ik de foto's van graancirkels, en de constructie van de Harlekijn op een groot blad door de leerlingen zelf.

Materiaal van type C is nuttig als voorbereiding op latere theorie. Bijvoorbeeld kan een bal gebruikt worden waarop lijnen van kortste afstand getrokken kunnen worden.

Materiaal van het type D tenslotte is geschikt als testmateriaal. Voorbeelden hiervan zijn het grote tekenpapier dat voor de schets van de Harlekijn zal gebruikt worden, en het karton met de driehoek erop waar in het centrum van diens ingeschreven cirkel een speldje moet geprikt worden.

Aandacht voor de sfeer die in de klas heerst tijdens de lessenreeks (mevr. Ehrenfest zie 4.4). De sfeer die in de klas heerst moet er een zijn van samen nadenken. Het centraal plaatsen van een object —een voorwerp, foto of tekst— dat verwijst naar het lesonderwerp kan volgens mij hierbij helpen. Het leidt de aandacht van de leerlingen voortdurend naar het lesonderwerp en werkt motiverend indien het object past bij hun smaak. Is het object natuurlijk, dat wijst het op de toepasbaarheid van wiskunde in het dagelijks leven. Is het vertrouwd, dan stelt het de leerlingen gerust. Wordt het bovendien betekenisvol gekozen, dan kan het voortdurend leiden naar nieuwe facetten van de bestudeerde theorie.

De lessenreeks moet succeservaringen uitlokken bij de leerlingen. Voor alle leerlingen zou de leerkracht tijdens de wiskundelessen succeservaringen moeten uitlokken, zodat hun zelfvertrouwen groeit. De leerkracht kan hen laten ervaren dat ze logisch kunnen denken, en welke kracht dit logisch denken heeft.

Klasnormen moeten expliciet opgelegd worden en nageleefd door zowel leerkracht als leerlingen. Klasnormen duidelijk afspreken, kan de kijk van leerlingen op wiskunde immers veranderen (zie 4.10). Zo kan bijvoorbeeld aanvaardbaar gedrag tijdens probleemoplossen beschreven worden als volgt:

- De leerlingen moeten allemaal zelf proberen een oplossing te vinden. Ze moeten elkaar rustig laten zoeken, en hun oplossing niet doorgeven aan wie nog bezig is.
- Doorzetten ondanks frustraties is gewenst: het zal uiteindelijk leiden tot een grote voldoening.
- Oplossingen moeten kritisch bekeken worden: zijn ze wel mogelijk, zijn ze logisch? Zijn ze elegant en kort?
- Iedereen krijgt tijd om persoonlijk aan de opgave te werken en na te denken.
- Elke leerling telt mee: iedereen mag aan het woord te komen of aan het bord.
- De oplossing die door leerlingen werd gegeven is van belang. Er wordt rekening mee gehouden tijdens het verdere lesverloop.
- Spontane activiteit is gewenst.
- Bewijsschema's worden niet door de leerkracht opgelegd. De geest van een argument is belangrijker dan de formele uitwerking.
- Fouten zijn toegelaten. Vaak zijn ze erg interessant om te verdiepen in de leerstof.

Bij het ontwerp van het HLT zal erop toegezien worden dat bedenkingen van historische, filosofische en esthetische aard worden toegevoegd aan de lesinhoud (zie Karen François 3.3.2 en 4.2). Hierbij wordt rekening gehouden met de interesses en ervaringen van de betreffende studenten. Filosoferen gebeurt bijvoorbeeld over de methode van deductief redeneren, over de objecten van de euclidische meetkunde, over de euclidische ruimte, over het uitvinden of ontdekken van een theorie. Maar ook over wat een punt is of over wiskundige werkwijzen, hun waarde en hun betekenis. Of over de rol van bewijzen.

Er wordt gewerkt met echte, natuurlijke problemen, die de leerlingen kennen uit hun eigen ervaringen (zie Lockhart 4.1 en mevr. Ehrenfest 4.4). Ze moeten bijvoorbeeld hun zakinhoud bestuderen om de definitie van de cirkel te zoeken. Het lesonderwerp is een graancirkel, namelijk de Harlekijn, die in Engeland werkelijk verscheen in 1997. Het mysterieuze karakter van graancirkels valt bij leerlingen van deze leeftijd in de smaak.

De opdracht die aan de leerlingen gegeven wordt, namelijk "is de Harlekijngraancirkel construeerbaar door mensenhanden?" is niet oplosbaar in enkele minuten (zie Schoenfeld 3.3.1). Ze zullen er heel wat tijd moeten insteken. Eerst moet de opgave voldoende geanalyseerd worden, daarna kan via het gebruik van de heuristiek "deel op in deelproblemen" een planning voor de oplossing gemaakt worden (Pólya). Het uitvoeren van de oplossing zal nog heel wat onderzoekswerk vragen. Verschillende opdrachten zullen in groepjes gelijktijdig onderzocht worden. Dan volgt nog de controlefaze.

De leerlingen zoeken actief naar formuleringen en bewijzen van stellingen. Ook definiëren ze zelf begrippen. Vanuit de opdracht van de Harlekijnconstructie ontstaat de behoefte naar een theorie die aan verschillende eisen voldoet. De constructies moeten met passer en liniaal gebeuren, de theorie moet deductief zijn opgebouwd (zie Euclides3.4.1). Kortom de reeds gekende euclidische meetkunde van de vorige jaren moet uitgebreid worden met een deel over de cirkel. Startend met de definitie van cirkel zullen door de leerlingen zelf verschillende veronderstellingen geformuleerd en bewezen worden over de onderlinge ligging van een cirkel en andere figuren.

De leerlingen worden tijdens de studie van de cirkel in het euclidische vlak ook voorbereid op de niet-euclidische meetkunde. Dit gebeurt aan de hand van een opdracht over lijnen in een vlak, op een bol of cilinder.

Vertrekkend vanuit niveau 2 van het van Hiele denkmodel, zullen de leerlingen tijdens deze lessenreeks op niveau 3 gebracht worden (zie van Hieles 3.4.5 en 4.6). In niveau 3 wordt vooral gewerkt op deductie. De aard van deductie moet stilaan begrepen worden. Daartoe dienen de volgende onderwijsactiviteiten die volledig geïnspireerd zijn op de van Hieles.

De betekenis van 'axioma' en 'postulaat' wordt gebruikt en benadrukt. Ook de begrippen 'stelling', 'omgekeerde stelling', 'nodig en voldoende' komen aan bod.

Verschillende bewijstechnieken worden gebruikt. Bewijzen worden in woorden gegeven. De bewijsstrategie wordt gedentificeerd. Met de leerlingen wordt ook nagedacht over het meetkundig denken zelf.

De leerkracht stelt zich beter vriendelijk op dan formeel, en bouwt best aan een goede relatie met de leerlingen. De leerkracht moet de leerlingen proberen te kennen. Tijdens het groepswerk zal ze vooral coachen. Dit kan wanneer ze in de verschillende groepjes gaat luisteren en de leerlingen ondervraagt over hoe ze denken en waarom. Ook klassikaal kan de leerkracht bepaalde leerlingen aan het woord laten, of op bord hun methode laten uitleggen. Aan de andere leerlingen kan gevraagd worden mee na te denken of de methode juist is. Ze vormen een soort logische jury.

6.4 Procesmodel voor het HLT

Vertrekkend van het procesmodel van 4.11, kom ik tot een procesbeschrijving voor de lessenreeks die aan alle AK's en EK's aandacht besteedt. Hieronder wordt dit model voorgesteld, waarop ik bovendien aangeef welke kijk op wiskunde tijdens elk lesonderdeel aandacht krijgt. Bovendien vermeld ik het gebruikte lesmateriaal. Dit is volgens mij dan ook een erg belangrijk aspect van de manier waarop de lessen gegeven worden.

CONCREET PROBLEEM:

Zoek een constructie van de Harlekijn-graancirkel die 's nachts uitvoerbaar is op een graanveld.	EK13

Materiaal EK13:	foto's van graancirkels en van de Harlekijn, een veld vlakbij de school. Filmpjes van de canvasreportage over graancirkels.

DENKACTIVITEITEN A:

1. Er wordt gezocht naar de essentie van het gestelde probleem.

Er wordt nagegaan *welke gevolgen de eis van uitvoerbaarheid heeft.* EK1

Enerzijds wordt stilgestaan bij bruikbare hulpmiddelen voor constructies die *zullen plaatsvinden op een graanveld, en in het donker (zoals koord, hamer, paaltjes).*

Anderzijds wordt gezocht naar de vertaling van deze eis voor een tekening op schaal van de Harlekijn.

Er wordt nagedacht over *wat geconstrueerd moet worden.*

De constructie kan gebeuren in stappen. AK 11

De deelfiguren van de Harlekijn zijn objecten uit de vlakke euclidische meetkunde. EK2

Eerst wordt de voorkennis van de leerlingen hierover geactiveerd.

Daarna wordt euclidische meetkunde historisch toegelicht. EK10,11

Ook niet-euclidische meetkunde komt even aan bod. EK12

Er wordt nagegaan welke gevolgen de complexiteit van de graancirkel heeft.

De constructie van een gelijkzijdige driehoek is nodig voor de Harlekijn.

Deze kan lukraak of door deductie gevonden worden. EK3

Wat is een deductieve theorie eigenlijk? Wat zijn eigenschappen en definites? EK11

Essentieel voor de oplossing van het probleem blijkt **het zoeken naar een vervollediging van de gekende euclidische meetkunde**.

Materiaal EK 1:	veld of speelplaats, hamer, koord, paaltjes, krijt, foto Harlekijn.
Materiaal EK 2:	perspectieffoto Harlekijn.
Materiaal EK3:	papier, passer en liniaal.
Materiaal EK12:	boek euclidische meetkunde, bal.

2. In termen van aanwezige kennis over het onderwerp worden deelproblemen geformuleerd die zullen bijdragen tot de oplossing van het Harlekijnvraagstuk.

Er wordt besproken *wat uit de schets van de Harlekijn afgelezen kan worden* in verband met zijn constructie. EK 14

Eerst wordt expliciet besproken wat wel en niet uit een schets af te leiden valt.
Daarna wordt dit toegepast op de Harlekijn.

Verder wordt een *tip* gegeven *voor een mogelijke constructie van de Harlekijn.*
Deze tip veronderstelt dat:

i. de driehoek P”Q”R”gelijkzijdig is (zie figuur 7.4).

ii. de geconstrueerde lijnen in de tip zwaartelijnen zijn voor driehoek P”Q”R”.

iii. de middelloodlijnen van een gelijkzijdige driehoek concurrent zijn.

De twee eerste beweringen worden aangetoond in woorden. EK3,7,8

Materiaal EK 14:	test, grote schets van de Harlekijn die gevouwen kan worden, dezelfde schets op een kalkblad.
Materiaal EK 3:	logisch schema van voorkennis van euclidische meetkunde.
Materiaal EK 7:	schets van beweringen i en ii.
Materiaal EK 8:	bewijs in woorden van bewering i en ii.

GENERIEK PROBLEEM:

De drie open problemen die uit de voorgaande denkactiviteiten kwamen, leiden tot de volgende vragen:	AK 4
1. Ga op zoek naar een *definitie* voor cirkel, ingeschreven en omgeschreven cirkel van een driehoek, raaklijn en rakende cirkels.	EK 4,6b
2. In verband met de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een gelijkzijdige driehoek wordt een *eigenschap* gezocht. Wat kan gezegd worden over de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een willekeurige driehoek? Dan rijst de vraag of dezelfde eigenschap zal gelden voor de drie zwaartelijnen of voor de drie bissectrices.	
Ook de onderlinge ligging van cirkel en lijn, cirkel en cirkel, cirkel en driehoek wordt bestudeerd. Niet alleen worden deze onderlinge posities bestudeerd voor de gelijkzijdige driehoek zoals die voorkomt in de Harlekijn, maar ook voor willekeurige driehoeken.	EK 5,6a

Materiaal EK 4 :	probleem en schets van de Harlekijn, logisch schema van definities.
Materiaal EK 5 :	schets van de Harlekijn, logisch schema van de voorkennis.

DENKACTIVITEITEN B':

De **deductieve methode** wordt uitgelegd.	
In verband met de gezochte *definities* worden verschillende dingen bestudeerd:	
Wat is een definitie qua inhoud, vorm, plaats in een theorie?	EK 6b
De logische opbouw van een theorie wordt uitgelegd.	
In verband met *stellingen* wordt nagegaan:	EK 6a
Wat is een stelling qua vorm, plaats in de theorie?	
Wat kan gezegd worden over de geldigheid van een stelling?	
Hoe kan je zelf een stelling vinden?	EK 3
Hoe maak je een bewijs? Wat is een bewijs eigenlijk?	EK 7,8

DENKACTIVITEITEN B:

Deze activiteiten gebeuren aan de hand van een **logisch schema van definities en stellingen van de voorkennis** van de leerlingen.	EK 1,8
In verband met de *definities* wordt er nagegaan welke definities reeds gekend zijn. Welke concepten zijn beschikbaar voor de nieuwe definitie? Past de nieuwe definitie in het logisch schema van definities van de euclidische meetkunde?	
In verband met *stellingen* wordt er nagegaan welke stellingen reeds gekend zijn. Welke stellingen spelen eventueel een rol in een deductieve afleiding? Welke stellingen kunnen gebruikt worden in een bewijs van een nieuwe stelling?	

Materiaal EK 8: logisch schema van voorkennis en logisch schema van definities.

DENKPISTEPLANNING:

AK 8 De juiste betekenis van een *euclidisch vlak* wordt toegelicht.	EK 2
1. Met behulp van een vragenlijst kan je op zoek naar een *definitie voor cirkel*.	EK4,6b
2. Hoe vind je een *definitie voor omgeschreven cirkel* van een driehoek? Hoe ontdek je een *eigenschap* over de ligging van het middelpunt van zo'n omgeschreven cirkel?	EK 4,6b EK 5, 6a
3. Een andere vragen- en takenlijst leidt de leerlingen naar het vinden van een definitie voor de raaklijn aan een cirkel. Zo ontdekken ze ook zelf wat ze kunnen zeggen over de ligging van het raakpunt.	EK 4,6b,5,6a
4. Door een werktekst komen de leerlingen op het spoor gezet van een *eigenschap over de concurrentie* van de middelloodlijnen van een driehoek.	EK 5,6a
5. Hoe kan je zelf komen tot een *definitie* voor ingeschreven cirkel? En wat valt er te vertellen over de ligging van zijn middelpunt? De antwoorden op deze vragen worden duidelijk na het doorwerken van een opdrachtenblad.	EK 4,5,6a,6b

Materiaal EK 2:	gestippelde transparant, overheadprojector(lichtbron).
Materiaal EK 4:	vragenlijst, de eigen zakinhoud van de leerlingen, passer en papier dat gevouwen kan worden.
Materiaal EK 5:	werktekst over de betreffende eigenschap, karton met driehoeken erop getekend: een willekeurige en een gelijkzijdige, koordje, punaise, potlood. Transparanten met cirkel en lijn erop getekend. gestippelde transparant, overheadprojector(lichtbron)
Materiaal EK 6a:	willekeurige driehoek op het kartonnetje.
Materiaal EK 6b:	vervormbare ijzeren ovaal.

ABSTRACTE FORMULERING:

De definities en vermoedens worden exact geformuleerd.

1.	Definitie:	Een *cirkel* is een vlakke figuur die uit alle punten bestaat die even ver van een gegeven punt liggen (het middelpunt).
	Eigenschap:	De afstand van elk punt van de cirkel tot het middelpunt is dezelfde.
2.	Eigenschap:	De middelloodlijnen van een gelijkzijdige/willekeurige driehoek zijn concurrent. Ook de deelllijnen en zwaartelijnen van een gelijkzijdige/willekeurige driehoek zijn concurrent.
3.	Definitie:	De omgeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die de hoekpunten van de gegeven driehoek bevat.
	Eigenschap:	Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.
4.	Definitie:	Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die met de cirkel slechts één punt gemeen heeft.
	Eigenschap:	Een rechte is raaklijn aan de cirkel in het punt A asa de rechte staat in A loodrecht op de middellijn door A.
5.	Definitie:	De ingeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die de drie zijden van de driehoek raakt.
	Eigenschap:	Het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek is het snijpunt van de drie deellijnen van de driehoek

DENKACTIVITEITEN C:

Er wordt toegelicht wat een bewijs maken precies inhoudt en hoe je hierbij best tewerk kan gaan. De volgende principes worden best in acht genomen bij het geven van een bewijs:	AK 8
1. Een stelling heeft geen uitzonderingen. Een wiskundige bewering moet juist zijn voor elke mogelijke situatie.	EK 6a
2. Ook duidelijke stellingen moeten bewezen worden. Een bewijs mag niet steunen op een schets.	EK 7
3. Een bewijs moet algemeen zijn.	
4. De gegevens en het te bewijzen van een stelling moet je duidelijk onderscheiden.	
5. De omgekeerde van een stelling is niet noodzakelijk een stelling.	

Materiaal AK8: powerpoint met de bewijsprincipes erop uitgeschreven.

ABSTRACTE THEORIE:

Hier worden de exacte bewijzen voor de gemaakte conjectures geleverd.	AK 8

Materiaal AK8: werktekst, logisch schema voorkennis.

DENKACTIVITEITEN D:

De nu bewezen stellingen worden geformuleerd in algoritmevorm.

Materiaal: werktekst.

THEORETISCHE OPLOSSING:

De algoritmevorm voor de constructies wordt opgesteld.

Materiaal: werktekst.

DENKACTIVITEITEN E:

De constructie van de verschillende onderdelen van de Harlekijn wordt nu verantwoord door het citeren van de gebruikte stelling.

Materiaal:	werktekst.

CONCRETE OPLOSSING:

De constructie wordt nu stapsgewijs uitgevoerd door de leerlingen op een groot stuk karton, met behulp van punaises, koord en stift. AK 1, EK 13

Materiaal:	werktekst, groot stuk maquettekarton, koord, punaises, algoritme met werkwijze, potlood, verfrolletje.

Hoofdstuk 7

Voorstel voor een concrete lessenreeks vanuit het HLT

7.1 Het concreet probleem wordt gesteld

7.1.1 Uitleg over graancirkels

Al sinds de 16de eeuw duiken in graanvelden als dit (de leerlingen bevinden zich 'ten velde') op verschillende plaatsen van de wereld mysterieuze figuren op. In Engeland maar ook in Nederland, Duitsland en zelfs in België. Men noemt deze figuren graancirkels.

Materiaal: foto's van graancirkels (figuur 7.1).

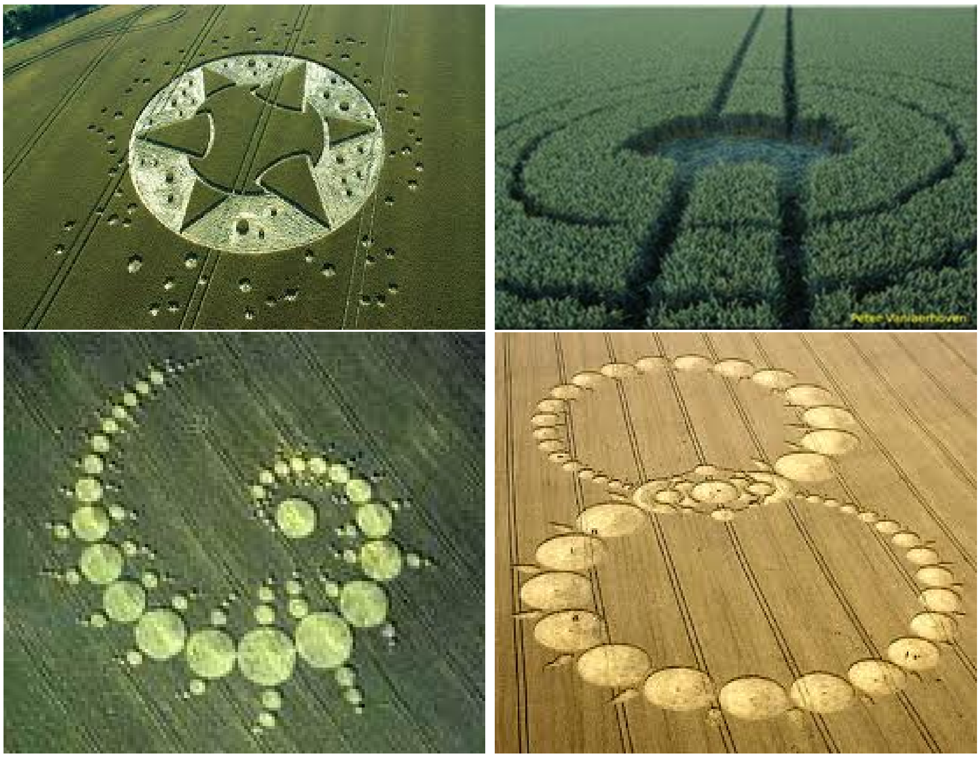
Sommige mensen zijn ervan overtuigd dat graancirkels niet door mensen maar door buitenaardse wezens werden geconstrueerd. Ze zitten dan ook vaak erg ingewikkeld ineen. Posities van constructiepunten, lengtes van lijnen: niets is willekeurig. Onderlinge verhoudingen mogen niet zomaar gekozen worden. Ze liggen op een of andere manier vast.

7.1.2 Voorstelling van de Harlekijn

De 'Harlekijn' is de naam die gegeven werd aan de graancirkel die in 1997 opdook in Winterbourne Bassett in Engeland in 1997 (Janssen, z. j.). Een foto hiervan: figuur 7.2.

7.1.3 Het probleem wordt gesteld

"Werd de Harlekijn gemaakt door mensenhanden of door buitenaardse wezens? "



Figuur 7.1: graancirkels

7.2 Denkactiviteiten bij het gestelde probleem

7.2.1 Zoeken naar de essentie van het probleem

Welke gevolgen heeft de eis van construeerbaarheid op een graanveld?

De constructie van een graancirkel. Een graancirkel wordt op een graanveld geconstrueerd: graanhalmen zijn breekbaar en ongeveer een halve meter hoog. Vaak wordt een graancirkel in het grootste geheim gemaakt, om zijn mysterie te vergroten. Daarom werkt men er 's nachts aan. Tijdens een eerste nacht worden de constructiepunten uitgezet. Bijvoorbeeld de middelpunten van de cirkels. Pas de tweede nacht wordt het graan platgelegd, door er tonnen over te rollen of door het plat te stampen met een plank die aan een stok bevestigd is.

Gevolgen: constructies met passer en liniaal.

< Hoe zou jij op een graanveld een cirkel construeren?

< Doe dit eens.

< Zou je er in slagen een driehoek op dit veld te construeren?

< En een gelijkzijdige driehoek: is dat moeilijk in het donker? Bedenk dat we in 't donker moeilijker kunnen meten.

< Wat nemen we mee als we een graancirkel willen construeren?

Het is niet echt nodig de constructie op een veld uit te voeren om te zien of ze lukt. Het kan ook op papier en op schaal.

Figuur 7.2: de Harlekijn

< Waarmee mogen we de constructie op schaal maken?

Wat moeten we eigenlijk construeren?

Heuristiek: deel op in deelproblemen. De Harlekijn is een complexe figuur. Het constructieprobleem kan vereenvoudigd worden door het in deelproblemen op te delen.

< Welke stappen denk jij dat er in de constructie van de Harlekijn onderscheiden kunnen worden?

< Ben je er zeker van dat het hier om cirkels gaat en niet om ovalen?

< Hoe komt het dat we hier ovalen zien in plaats van cirkels? Waar bevond zich de fotograaf? Waar zou hij moeten gaan staan om de Harlekijn zo te zien:

< Uit welke deelfiguren is de Harlekijn opgebouwd?

We geven de deelfiguren de volgende namen:

'de cirkel' Dit is de buitenste cirkel van de schets.

'de driehoek' Dit is de grote driehoek die hier op de schets zichtbaar is.

'de drie cirkels' Dit zijn de drie dezelfde cirkels die gedeeltelijk zichtbaar zijn.

'de kleine cirkel' Dit is de grootste van de twee binnenste cirkels van de schets.

'de kleinste cirkel' Dit is de kleinste cirkel die hier op de schets zichtbaar is.

'de lijnstukken'

Meetkundige figuren, euclidische meetkunde

Materiaal: een oud boek van euclidische meetkunde.

Jullie kennen al heel wat euclidische meetkunde. In de vorige jaren bestudeerden jullie rechten, driehoeken, zwaartelijnen, congruentie enzovoort. Vlakke euclidische meetkunde gaat over de vormen die vlakke voorwerpen kunnen aannemen. Deze vormen en veel van hun eigenschappen werden door de Egyptenaren, Babyloniërs en Grieken al gebruikt. Maar rond de tijd van Thales veranderde er iets: men probeerde het waarom van de eigenschappen te begrijpen. De Griekse wijsgeer Plato (427-347 v.C.) beweerde immers dat deze vormen een bestaan op zich leiden in een ideale wereld: de wereld van ons denken.

< Als je dit aanneemt, zijn meetkundige vormen dan ontdekt of uitgevonden?

De kennis die men in de Griekse tijd had over de meetkundige figuren, volgde uit een waarneming van bestaande objecten. Plato beweerde dat alleen door te denken echte kennis verkregen kon worden. Een eigenschap aflezen uit een figuur of schets kon volgens hem echt niet.

Aristoteles was een andere Griekse filosoof die nadacht over dit denken. Om tot een goede theorie te komen moest volgens hem uitgegaan worden van 'algemene inzichten', denkregels of logische axioma's, die voor elke theorie gelden. Bijvoorbeeld: "een deel is kleiner dan het geheel". Dit klinkt logisch voor vrijwel iedereen.

Daarnaast moest volgens Aristoteles ook gebruik gemaakt worden van 'speciale inzichten' of postulaten. Die gelden voor één concrete theorie, bijvoorbeeld voor de meetkunde. Kennis van eigenschappen moest hieruit dan afgeleid worden. Zo'n logische opeenvolging van beweringen die leiden tot de gewenste uitspraak, noemt men een bewijs.

Maar men kan niet blijven teruggrijpen naar eigenschappen die men reeds zag. Op een bepaald moment moet men van een bewering aannemen dat ze waar is. Dat is een axioma of postulaat.

Uiteindelijk was het de Grieks bibliothecaris Euclides die de eerste wiskundige theorie uitschreef in zijn 13 welbekende boeken: 'de Elementen'. Hij werkte in de bibliotheek van Alexandrië in de derde eeuw voor Christus en verzamelde alle aanwezige kennis over wiskunde. Hij volgde bij het opstellen van de Elementen de regels die Plato en Aristoteles voorschreven. De Elementen bevatten 5 axioma's, 5 postulaten, 120 definities en 327 stellingen. De "kennis ervan leidt tot kennis van de rest" (Proklos).

Elliptische meetkunde

Euclidische meetkunde is niet de enig gekende meetkunde. In plaats van op een plat vlak meetkunde te doen, kan je ook meetkunde doen op een bol. Een driehoek op een bol is dan een figuur bestaande uit drie hoekpunten en hun verbindingslijnen.

Materiaal: een wereldbol.

< Wat is de kortste afstand tussen twee punten op een bol?

< Wat zou dan een driehoek op een bol worden?

< Is de som van de hoeken van een driehoek nu nog steeds $180°$?

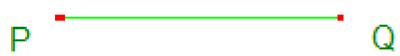
Welke gevolgen heeft de complexiteit van graancirkels?

Ongekende constructies moeten gezocht worden

In de Harlekijn komt een gelijkzijdige driehoek voor.

Materiaal: foto van de Harlekijn.

< Probeer zelf eens een gelijkzijdige driehoek te construeren met passer en liniaal met een gegeven lijnstuk PQ als basis. (Op een liniaal staan geen cijfertjes)



Er zijn twee manieren om hiervoor een oplossing te vinden.

De eerste manier is 'trial & error'. Hierbij probeer je lukraak allerlei constructies uit. Voorwaarde voor de constructies is dat ze uitgevoerd kunnen worden met passer en liniaal.

De tweede manier is door deductief te redeneren. Je denkt eerst logisch na over het probleem, en je probeert voor de oplossing te steunen op geziene eigenschappen.

'Trial & error' (door de linkerhelft van de klas)

Materiaal: de postulaten van Euclides op powerpoint opgesomd.

< De linkerhelft van de klas: probeer de eerste methode eens uit.

In zijn postulaten beschrijft Euclides welke constructies 'maakbaar' zijn met passer en liniaal.

< Welke zijn die? (3)

< Je hebt als basis van de driehoek het lijnstuk PQ gegeven. Welke constructies kan je nu uitvoeren?

< Welke cirkels kan je tekenen?

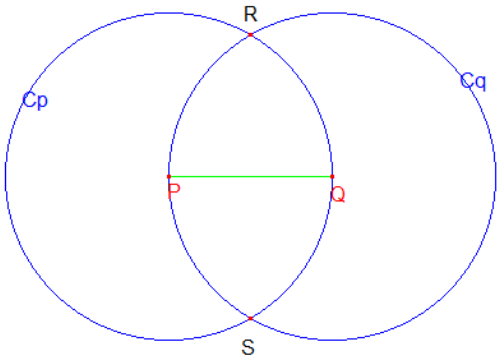
< Geef ze de volgende namen: C_P = de cirkel met middelpunt in P en door Q, en C_Q = de cirkel met middelpunt in Q en door P.

< Bepaal de snijpunten R en S.

< Verbind nu de drie punten P, Q, en R.

< Ga na of de gevonden driehoek gelijkzijdig is. Wat moet je hiervoor weten over de afstand van een punt van de cirkel tot zijn middelpunt?

'Deductie' (door de rechterhelft van de klas)



Figuur 7.3: constructie van een gelijkzijdige driehoek

Noem P en Q de twee hoekpunten van de basis van de gezochte gelijkzijdige driehoek.

< Wat zoek je dan ?

Noem dit derde punt R.

< Aan welke voorwaarden moet R voldoen, opdat PQR een gelijkzijdige driehoek zou zijn?

< Wat moet de afstand tussen elke twee hoekpunten van de driehoek zijn? Wat betekent dit concreet?

< Kijk eens naar de afstand van een punt van de cirkel tot het middelpunt. Kan je hierover zelf een eigenschap formuleren?

< Gebruik nu deze eigenschap om het punt R te construeren.

Onderlinge verhoudingen mogen niet zomaar gekozen worden. Ze liggen op één of andere manier vast. Doordat Euclides in de postulaten beschrijft welke constructies 'maakbaar' zijn met passer en liniaal, gelden de volgende beweringen:

- Een lijn construeren vereist de kennis van twee punten of de kennis van een lijnstuk waarvan deze lijn de verlenging is.
- Een cirkel construeren vereist de kennis van twee punten: zijn middelpunt en een punt dat erop ligt.
- Een punt ken je pas als het de doorsnede van twee reeds gegeven lijnen is.

7.2.2 Welke meetkundeproblemen moeten we oplossen om de Harlekijn te kunnen construeren?

Wat kan afgeleid worden uit de schets van de Harlekijn?

Materiaal: een grote kopie van de Harlekijnschets die geplooid mag worden.

Tijdens een klasgesprek wordt de volgende tabel ingevuld.

In verband met...	Wel af te lezen:	Niet af te lezen
Symmetrie	Er zijn drie spiegelassen : de drie rechten die je op de schets gedeeltelijk ziet. (door de figuur te plooien)	Is er rotatiesymmetrie rond het centrum?
Grote cirkel		Middelpunt van de grote cirkel? Zijn straal?
Driehoek	De driehoek is gelijkzijdig vanwege de spiegelsymmetrie. De hoekpunten van de driehoek liggen op de grote cirkel.	Hoe groot is een zijde?
Symmetrieassen	Omdat ze spiegelassen zijn van de driehoek, gaan de drie lijnen door de hoekpunten van de driehoek maar ook door het midden van de tegenoverliggende zijde en staan ze daar loodrecht op. (ze zijn zwaartelijn, middelloodlijn, bissectrice)	Zijn de drie spiegelassen concurrent? (snijden ze in eenzelfde punt: M?)
De drie cirkels	De drie cirkels zijn even groot, vanwege de spiegelsymmetrie. Hun middelpunt is op de spiegelassen gelegen.	Wat is de juist positie van het middelpunt van de drie cirkels? Welke straal hebben ze?
Kleine cirkel	De kleine cirkel raakt aan de drie cirkels.	Wat is middelpunt en straal van de kleine cirkel?
Kleinste cirkel	De kleinste cirkel heeft hetzelfde middelpunt als de kleine en de grote cirkel.	Wat is middelpunt en straal van de kleinste cirkel?

Een tip voor de oplossing

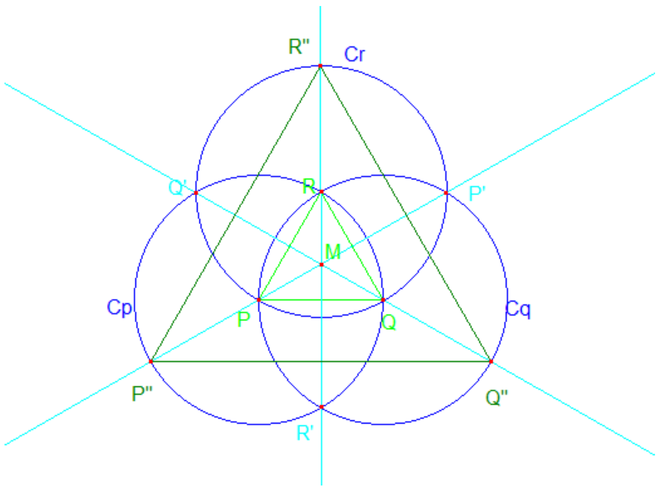
Herneem de constructie van een gelijkzijdige driehoek op een gegeven basis PQ.

Teken een derde cirkel, CR, op dezelfde schets: met dezelfde straal als de twee vorige cirkels en met als middelpunt het derde hoekpunt van de driehoek, R. (figuur 7.4)

Het snijpunt van de cirkels CP en CQ noemen we R'.

$<$ Ontdek het systeem van naamgeving.
Hoe noem je het snijpunt van CR en CP? En het snijpunt van CQ en CR?
De lijn PP' snijdt CP in een punt P''.

$<$ Hoe noem je de snijpunten van de lijnen QQ' resp. RR' met de cirkels CQ resp. CR ?
Construeer nu de driehoek $P''Q''R''$.



Figuur 7.4: Een tip voor de oplossing.

De verdere oplossing

$<$ Kunnen we de driehoek $P''Q''R''$ gebruiken als grote driehoek voor de Harlekijn?

$<$ Is driehoek $P''Q''R''$ gelijkzijdig? Dit vraagt een bewijs.

$<$ Zijn de lijnen PP' , QQ' en RR' geschikte spiegelassen voor de Harlekijnfiguur? Snijden ze de zijden $R''Q''$, $P''R''$ en $P''Q''$ in de helft en loodrecht door? Waarom? (constructie middelloodlijn is zichtbaar)

$<$ Lukt het nu om de Harlekijn verder te construeren? We vonden al een constructie voor de driehoek en zijn drie spiegelassen. Vraag blijft of deze assen concurrent zijn. Stel dat dit zo is. (Later bewijzen!) M is dan ook rotatiecentrum.

$<$ Wat betekent dit?

Materiaal:	een kalkfiguur met de Harlekijnschets erop, punaise, kopie met even grote Harlekijnfiguur erop.

< Prik de kalkfiguur op de andere zodat de beide figuren samenvallen.

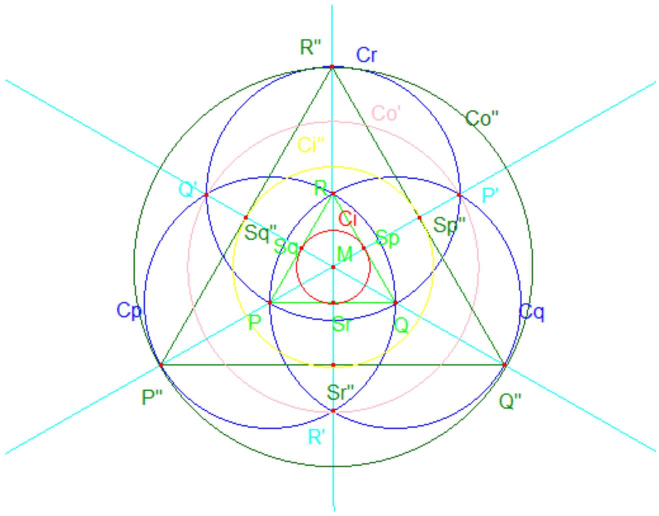
< Roteer de kalk. Wanneer valt de figuur terug samen? Wat gebeurt er dan met de drie cirkels? En met hun middelpunten? Wat gebeurt met de zijden van de driehoek? En met de hoekpunten?

< Welk is het middelpunt van de grote cirkel? Waarom? Wat is zijn straal? Noem de grote cirkel C_0'' . Noem S_P snijpunt van driehoek PQR en rechte PP'. Noem $S_{P''}$ snijpunt van driehoek $P''Q''R''$ en rechte PP'.

< Wat is S_Q en S_Q'' ? En S_R en S_R'' ?

< Je kan nog drie andere cirkels met middelpunt M construeren. Welke? Teken ze en geef ze de volgende namen (figuur 7.5):

C_i''	$=$ de cirkel door S_P''.
C_0''	$=$ de cirkel door P''.
C_i	$=$ de cirkel door S_P.
C_0'	$=$ de cirkel door P'.



Figuur 7.5: De verdere oplossing voor een constructie van de Harlekijn.

< Leg uit waarom C_0'' ook door Q'' en R'' gaat.
waarom C_i'' ook door S_Q'' en S_R'' gaat.
waarom C_i ook door S_Q en S_R gaat.
waarom C_0' ook door Q' en R' gaat.

$<$ Probeer nu zelf de Harlekijn verder te construeren. Welke punten kies je als middelpunten M_p, M_q, M_r van de drie cirkels? Welke straal neem je hiervoor?

$<$ Wat neem je als kleine cirkel? En als kleinste cirkel?

7.3 Generiek probleem

Door na te denken over het oorspronkelijk constructieprobleem van de Harlekijn, komen we tot enkele problemen waarvan het zoeken naar de oplossing zal leiden tot nieuwe meetkundige theorie over de cirkel.

7.3.1 Eerste probleem: Voorwaarden bij het gebruik van de tip

Om de gegeven tip te mogen gebruiken, moeten we eerst de gemaakte veronderstellingen nagaan, zie figuur 7.5.

1. Waarom is driehoek $P''Q''R''$ gelijkzijdig?
2. Waarom delen de drie lijnen PP', QQ' en RR' de overstaande zijden van de driehoek $P''Q''R''$ loodrecht doormidden?
3. Waarom zijn de drie lijnen PP', QQ' en RR' concurrent? (in M)

1. en 2. tonen we dadelijk aan. 3. Doen we later.

Bewijs van 1. Dit bewijs wordt in symbolen aan de leerlingen gegeven. Ze moeten het zelf proberen te begrijpen en hier en daar aanvullen. Verder wordt het besproken in de klas. Hierbij wordt het schema van voorkennis gebruikt.

$<$ Wat is de essentie van het bewijs? (congruentie) Formuleer het bewijs eens in woorden.

$<$ Moet de gelijkzijdigheid van $\triangle P''Q''R''$ nog wel bewezen worden: je ziet toch op de schets dat dit geldt.

Gegeven:	de constructie van $\triangle P''Q''R''$ vanuit $\triangle PQR$. (via de cirkels Cp, Cq, Cr) $\triangle PQR$ is gelijkzijdig. $P, P', P'', Q, Q', Q'', R, R', R''$
Te bewijzen:	$\triangle P''Q''R''$ is gelijkzijdig.

Bewijs: De gelijkzijdigheid van $\triangle P''Q''R''$ zal aangetoond worden door te bewijzen dat de driehoeken $\triangle P''MQ''$, $\triangle Q''MR''$ en $\triangle P''MR''$ congruent zijn. Waarom is dit zo? Wel,

$|MP| = |MQ| = |MR|$ want ....
(M is snijpunt van de drie middelloodlijnen van $\triangle PQR$).

dus $\triangle PMR \cong \triangle PMQ \cong \triangle QMR$ want .... (zzz)

daarom is $\widehat{PMQ} = \widehat{QMR} = \widehat{PMR}$

Bovendien zijn de hoeken $\widehat{PMQ}$, $\widehat{QMR}$ en $\widehat{PMR}$ precies de hoeken $\widehat{P''MQ''}$, $\widehat{Q''MR''}$ en $\widehat{P''MR''}$.

$|MP''| = |MQ''| = |MR''|$ want ....
($|MP''| = |MP| + |PP$, $|MQ''| = |MQ| + |QQ''|$ en $|MR''| = |MR| + |RR''|$. Maar $|MP| = |MQ| = |MR|$ vermits P,Q en R op een cirkel met middelpunt M liggen.)

De congruentieëigenschap ZHZ geeft dan dat ....

□

Bewijs van 2. Dit bewijs gebeurt alleen in woorden, aan de hand van de schets. De leerlingen proberen eerst zelf.

(Op de schets is de constructie van de middelloodlijn op het lijnstuk $P''Q''$ zichtbaar in de cirkels C_p en C_q . Analoog werd de middelloodlijn op $P''R''$ geconstrueerd met behulp van de cirkels C_p en C_r en de middelloodlijn op $Q''R''$ werd geconstrueerd met behulp van de cirkels C_q en C_r .)

7.3.2 Tweede probleem: Waarom is de afstand van een punt van de cirkel tot het middelpunt steeds dezelfde?

Als we een eigenschap willen bewijzen, moeten we teruggaan op vroegere eigenschappen. Bekijken we het logisch schema van voorkennis en het logisch schema van definities. Dan blijkt dat er over de cirkel nog geen eigenschappen zijn en zelfs geen definitie. Daar mee zullen we dan ook starten.

We gaan op zoek naar een definitie voor cirkel.

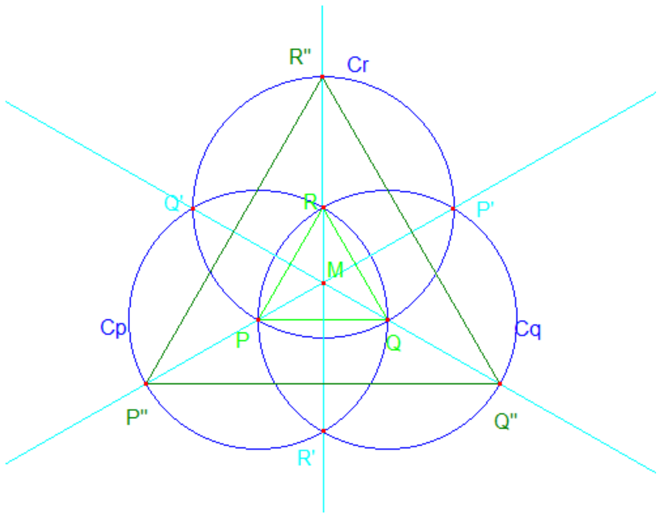
7.3.3 Derde probleem: Waarom zijn de middelloodlijnen van een gelijkzijdige driehoek concurrent?

Deze eigenschap handelt over de driehoek. Hiervan is de euclidische theorie al gekend. Door gebruik te maken van vroeger geziene eigenschappen over de middelloodlijnen van een driehoek, kan het bewijs gevonden worden.

< Welk gevolg heeft deze eigenschap voor de zwaartelijnen van een gelijkzijdige driehoek?

< Kan je dit probleem veralgemenen naar een willekeurige driehoek? Denk je dat de drie middelloodlijnen van een willekeurige driehoek nog steeds concurrent zijn? Zijn de zwaartelijnen en deellijnen van een willekeurige driehoek ook concurrent?

We gaan op zoek naar een eigenschap over de concurrentie van de drie middelloodlijnen/ zwaartelijnen/ bissectrices van een willekeurige driehoek.



Figuur 7.6: Concurrentie van de middelloodlijnen van een gelijkzijdige driehoek.

7.3.4 Vierde probleem: De speciale ligging van enkele figuren op de schets van de Harlekijn

De onderlinge ligging van de grote cirkel C''_0 en de grote driehoek $P''Q''R''$

We noemen C''_0 de **om**geschreven cirkel van driehoek $P''Q''R''$.

$<$ Waar bevindt zich het middelpunt van deze cirkel?

$<$ Teken dezelfde onderlinge ligging voor een gegeven cirkel en een willekeurige driehoek.

$<$ Definieer zelf de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek.

$<$ Waar ligt nu het middelpunt van de omgeschreven cirkel?

$<$ Formuleer hierover zelf een eigenschap.

We gaan op zoek naar een eigenschap over de ligging van het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een willekeurige driehoek.

De onderlinge ligging van de grote driehoek $P''Q''R''$ en de cirkel C''_i

We noemen C''_i de ingeschreven cirkel van driehoek $P''Q''R''$.

$<$ Waar bevindt zich het middelpunt van deze cirkel?

$<$ Teken dezelfde onderlinge ligging voor een gegeven cirkel en een willekeurige driehoek.

$<$ Definieer zelf de ingeschreven cirkel van een gegeven driehoek.

< Waar ligt nu het middelpunt van de ingeschreven cirkel?

< Formuleer hierover zelf een eigenschap.

We gaan op zoek naar een eigenschap over de ligging van het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een willekeurige driehoek.

< Zie je in de Harlekijn nog andere ingeschreven cirkels?

De onderlinge ligging van de kleine cirkel en de drie cirkels

We construeerden de kleine cirkel zodat hij 'raakt' aan de drie cirkels.

< Wanneer raakt een cirkel aan een andere cirkel?

Zoek de definitie voor rakende cirkels.

< Waar ligt het middelpunt van de cirkel die aan de drie gegeven cirkels raakt?

7.3.5 Samenvatting van het generiek probleem:

We gaan op zoek naar een definitie voor:

- cirkel.
- ingeschreven en omgeschreven cirkel van een driehoek.
- raaklijn aan een cirkel.
- rakende cirkels.

We gaan op zoek naar een eigenschap over:

- de afstand van een punt op de cirkel tot het middelpunt van de cirkel.
- de concurrentie van de drie middelloodlijnen/zwaartelijnen/bissectrices van een willekeurige driehoek.
- de ligging van het middelpunt van de in/omgeschreven cirkel van een willekeurige driehoek.
- de ligging van het raakpunt van cirkel en raaklijn.
- de ligging van het middelpunt van een cirkel die aan een gegeven cirkel raakt.

7.4 Denkactiviteiten

7.4.1 Op zoek naar definities

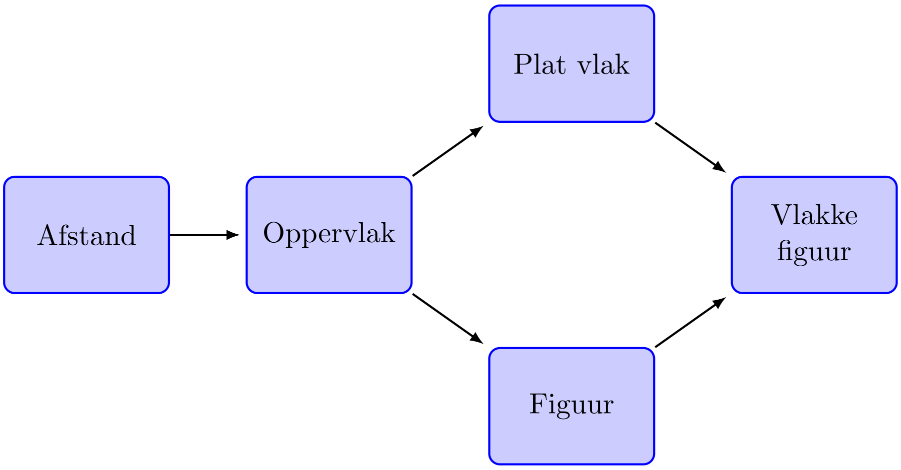
Activatie van de voorkennis. Het logisch schema van definities toon de 23 definities uit het eerste boek van de Elementen van Euclides. De definitie van cirkel moeten we nog aanvullen. Wat erboven ligt, kennen we reeds.

De definitie die we voor de cirkel geven, moet in dit schema passen.

Bovendien zullen we in de definitie van cirkel de typische eigenschappen van de cirkel proberen weer te geven zodat we daarmee van elke meetkundige vlakke figuur kunnen nagaan of het een cirkel is of niet.

Het euclidisch vlak. Definities die met cirkels verband houden, zullen gaan over vlakke figuren.

Het logisch definitieschema leert ons:



Ook bestaan er verbanden tussen punt en vlak. De uiteinden van een oppervlak zijn lijnen. De uiteinden van een lijn zijn punten. Dus bestaat een euclidisch vlak uit euclidische punten. Een punt is “dat wat geen afmetingen heeft”.

Filosoferen over het euclidisch vlak. Een punt is “dat wat geen afmetingen heeft”. Bekijk de vormen om je heen. Een bol, tafel, stoel, bord, hoofd,... hebben afmetingen, namelijk lengte, breedte en hoogte. Een punt is dat wat geen afmetingen meer heeft.

Euclides zag de ruimte als volledig gevuld met punten. Punten bestaan wel in ons denken, maar niet in de realiteit. Ze bestaan in een ideale wereld: de denkwereld. Het zijn geen fysisch grijpbare dingen zoals atomen of elektronen.

Als we slechts twee van de drie dimensies bekijken, werken we in een euclidisch vlak. Een vlak dat volledig opgevuld is met punten. Deze punten kan je wel voorstellen als stippen, maar feitelijk mag je ze niet voorstellen. Het helpt echter om na te denken.

Materiaal: Een transparant met stippen stelt het euclidisch vlak voor.
Op een andere transparant staan enkele meetkundige figuren getekend.
Wanneer deze laatste op de eerste gelegd wordt en een lichtbron (overheadprojector) eronder wordt gehouden, zien de leerlingen in dat de figuren uit stippen bestaan.

< Welke verschillen zijn er volgens jou tussen het euclidisch vlak en een fysisch vlak?

- In onze leefwereld hangt een voorwerp af van het standpunt van de waarnemer.
- Ook een vlak voorwerp verandert van vorm wanneer we het vanuit een ander standpunt bekijken.
- In de euclidische ruimte/vlak kunnen alleen verplaatsingen gebeuren waarbij de vorm van de figuren hetzelfde blijft: hoeken en afstanden.
- In een euclidische ruimte/ vlak spelen kleur, geur en smaak geen rol.
- Realistische voorwerpen hebben vaak een onvolmaakte vorm. Vlakke voorwerpen zijn niet echt vlak: ze hebben een dikte.

7.4.2 Op zoek naar eigenschappen

Activatie van de voorkennis

Het logisch schema over de voorkennis toont de stellingen die door de leerlingen al gekend zijn.

Zelf eigenschappen vinden en formuleren

Stap 1. Het formuleren van een conjectuur

Een conjectuur is een uitspraak waarvan je vermoedt, maar niet zeker weet, dat ze waar is.

- Maak een schets van de algemene situatie.
- Haal hieruit ideeën, maar geen feiten.
- Ga na of je zelf tegenvoorbeelden kan ontdekken, door verschillende situaties te checken.
- Klopt je bewering in elke mogelijke situatie?

Stap 2. Bewijs van de bewering

Hierdoor wordt de conjectuur een stelling.

- Noteer eerst zorgvuldig het gegeven en te bewijzen.
- Zoek in je voorkennis naar eigenschappen die verband houden met het onderwerp.

- Maak een logische opeenvolging van uitspraken die je van het gegeven naar het te bewijzen voeren.
- Van belang is vooral de clou van het bewijs, de geest van het argument.

7.5 Denkpisteplanning

Hieronder volgt een concrete invulling van de denkactiviteiten die de leerlingen zullen moeten uitvoeren om tot de oplossing van de generieke problemen te komen.

7.5.1 Op zoek naar een definitie voor cirkel

< Maak je zakken leeg en haal er de vlakke voorwerpen uit.

< In welke voorwerpen herken je een ronde vorm?

< Welk verschil is er tussen een ovaal en een cirkel?

< Kan je van een ovaal een cirkel maken en omgekeerd?

Materiaal: een ijzeren, beweeglijke ovaal.

Denkoefening voor thuis:
Een geitje dat aan een paal vastgebonden is met een touw, kan een cirkelvormig grasland afeten. Hoe moeten we het geitje vastmaken (met hoeveel palen en koorden) opdat het een ovaalvormig stuk gras kan afeten?

Materiaal: maquette van een vastgebonden geitje.

< Op het veld construeerden we een cirkel met koord en paaltje. Hoe doen we dit gewoonlijk op papier? Doe dit op de bovenste helft van een leeg blad.

< Probeer nu eens op de onderste helft een even grote cirkel met de losse hand te tekenen.

Doe dit zo juist mogelijk.

< Wat gaat fout bij het tekenen? Hoe kan je dit verbeteren?

< Als je een vaas moet tekenen die links en rechts er hetzelfde uitziet, hoe doe je dat?

< Welke symmetrie heeft een cirkel volgens jou?

Zoek dit uit door de bovenste cirkel te vouwen.

< Hoe kan je deze symmetrie gebruiken om de cirkel beter te tekenen?

Welke eigenschappen heeft een cirkel volgens jou?

< Welke zijn noodzakelijk om de cirkel als dusdanig te herkennen?

< Geef een definitie voor cirkel.

7.5.2 Op zoek naar een eigenschap over de concurrentie van de drie middelloodlijnen/zwaartelijnen/bissectrices van een willekeurige/gelijkzijdige driehoek

< Geef de definitie voor middelloodlijn, zwaartelijn en bissectrice van een driehoek.

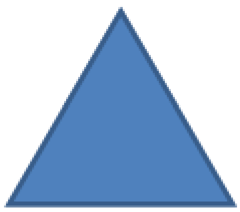
< Ken je een andere definitie voor de bissectrice van een paar snijdende rechten? En voor de middelloodlijn van een lijnstuk?

< Construeer de drie soorten lijnen in de volgende situaties: (gebruik hiervoor verschillende kleuren)

Materiaal:	Een stukje karton waarop de leerlingen per twee mogen werken. Met passer en liniaal. Op het karton staan verschillende soorten driehoeken afgebeeld.

1. Een gelijkzijdige driehoek

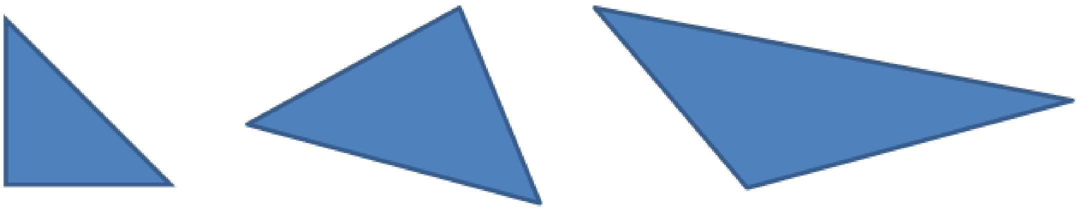
< Wat merk je op in verband met de concurrentie van de drie lijnen?



2. Een willekeurige driehoek

< Vallen middelloodlijnen, zwaartelijnen en bissectrices nog steeds samen?

< Wat merk je op in verband met de concurrentie van de drie middelloodlijnen ? En van de zwaartelijnen? En wat met de bissectrices?



7.5.3 Op zoek naar een definitie voor omgeschreven cirkel van een willekeurige/gelijkzijdige driehoek en naar een eigenschap over de ligging van diens middelpunt

Individuele opdrachten

< Zoek in de Harlekijnschets naar voorbeelden en tegenvoorbeelden van een cirkel die omgeschreven is aan een driehoek.

< Geef nu zelf een definitie voor de omgeschreven cirkel van een driehoek.

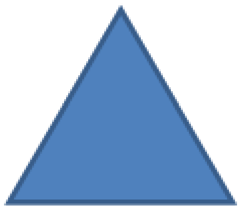
< Zoek voor de volgende driehoeken het middelpunt van hun omgeschreven cirkel.

Materiaal:	Een stukje karton waarop de leerlingen per twee mogen werken. Op het karton staan verschillende soorten driehoeken afgebeeld. Een stukje koord en punaises.

1. Een gelijkzijdige driehoek

< Waar plaats je de punaise? Ze moet het middelpunt van de omgeschreven cirkel aangeven.

< Construeer met behulp van het koordje de omgeschreven cirkel. Is hij juist getekend? Waaraan wijt je eventuele fouten?

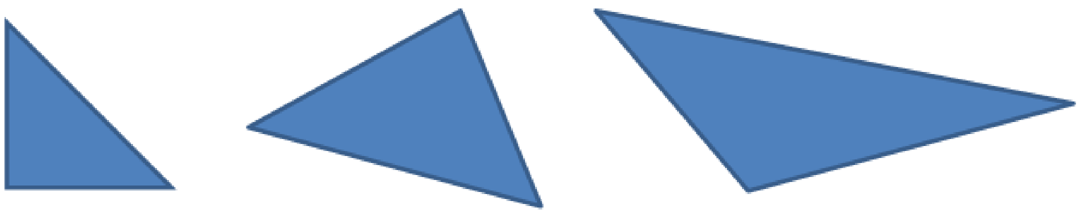


2. Een willekeurige driehoek

< Waar plaats je de punaise? Ze moet het middelpunt van de omgeschreven cirkel aangeven.

< Construeer met behulp van het koordje de omgeschreven cirkel. Is hij juist getekend? Waaraan wijt je eventuele fouten?

< Kan je de ligging van dit middelpunt meetkundig beschrijven?



Klassikale bespreking van de resultaten

< Wie had een omgeschreven cirkel die mooi door de drie hoekpunten van de driehoekenging?

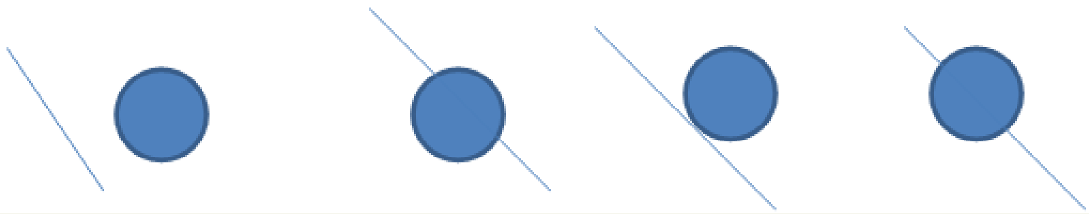
< Vond je het middelpunt lukraak of gebruikte je hiervoor eigenschappen? Zo ja: welke? Waarom deed je dat?

7.5.4 Op zoek naar een definitie voor raaklijn aan een cirkel en naar een eigenschap over de ligging van dit raakpunt

Materiaal: magneetbord per twee leerlingen, magneten, transparanten met lijn en cirkel erop.

< Beweeg de cirkel en de lijn over het magneetbord.

< Welke posities kunnen ze allemaal tegenover elkaar innemen? Maak hiervan telkens een schets.



Materiaal: magneetbord per twee leerlingen, magneten, transparanten met lijn en cirkel erop. transparant met stippen, die het euclidisch vlak voorstelt.

< Bekijk de vorige situaties nu in het euclidisch vlak. Wat is typisch voor elk geval in verband met het aantal snijpunten die cirkel en lijn hebben? Bedenk zelf een naam voor de rechte in elk geval.

< Geef nu een definitie voor een raaklijn aan een cirkel. Het midden van een koorde kan gevonden worden als snijpunt van de koorde met een speciale lijn. Welke? Kan je dit verklaren?

< Gebruik nu deze eigenschap om de ligging van het raakpunt van raaklijn en cirkel exact te bepalen. Laat hiervoor de koorde verschuiven op je magneetbord tot ze een raaklijn wordt. Formuleer hierover nu zelf een eigenschap. Moet je deze eigenschap nog bewijzen?

7.5.5 Op zoek naar een definitie voor ingeschreven cirkel van een willekeurige/gelijkzijdige driehoek en naar een eigenschap over de ligging van diens middelpunt

Individuele opdrachten

< Zoek in de Harlekijnschets naar voorbeelden en tegenvoorbeelden van een cirkel die ingeschreven is aan een driehoek.

< Ontleed het woord ‘ingeschreven’ en vergelijk met ‘omgeschreven’.

< Geef nu zelf een definitie voor de ingeschreven cirkel van een driehoek.

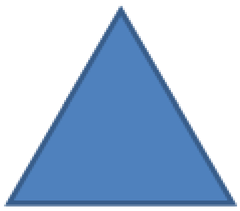
< Zoek voor de volgende driehoeken het middelpunt van hun ingeschreven cirkel.

Materiaal: Een stukje karton waarop de leerlingen per twee mogen werken.
Op het karton staan verschillende soorten driehoeken afgebeeld.
Een stukje koord en punaises.

1. Een gelijkzijdige driehoek

   < Waar plaats je de punaise? Ze moet het middelpunt van de ingeschreven cirkel aangeven.

   < Construeer met behulp van het koordje de ingeschreven cirkel. Is hij juist getekend? Waaraan wijt je eventuele fouten?

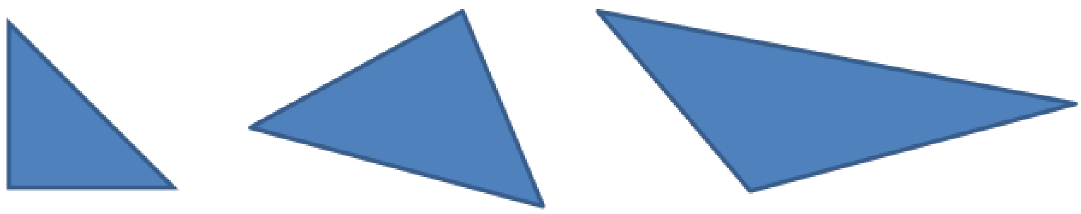


2. Een willekeurige driehoek

   < Waar plaats je de punaise? Ze moet het middelpunt van de ingeschreven cirkel aangeven.

   < Construeer met behulp van het koordje de ingeschreven cirkel. Is hij juist getekend? Waaraan wijt je eventuele fouten?

   < Kan je de ligging van dit middelpunt meetkundig beschrijven?



Klassikale bespreking van de resultaten

< Wie heeft een ingeschreven cirkel die mooi raakt aan de drie zijden van de driehoek?

< Vond je het middelpunt lukraak of gebruikte je hiervoor eigenschappen? Zo ja: welke? Waarom deed je dat?

7.6 Abstracte formulering

De definities en conjectures worden exact geformuleerd.

1.	Definitie.	Een cirkel is een vlakke figuur die uit punten bestaat die allen even ver van een gegeven punt liggen (het middelpunt).
	Eigenschap.	De afstand van elk punt van de cirkel tot het middelpunt is dezelfde.
2.	Eigenschap.	De middelloodlijnen van een gelijkzijdige/ willekeurige driehoek zijn concurrent. Zo ook de deellijnen en de zwaartelijnen.
3.	Definitie.	De omgeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die de hoekpunten van de gegeven driehoek bevat.
	Eigenschap.	Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek is het snijpunt van de middelloodlijnen van de driehoek.
4.	Definitie.	Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die met de cirkel slechts één punt gemeen heeft.
	Eigenschap.	Een rechte is raaklijn aan de cirkel in het punt A asa de rechte in A loodrecht staat op de middellijn door A.
5.	Definitie.	De ingeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die de drie zijden van de driehoek raakt.
	Eigenschap.	Het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek is het snijpunt van de drie deellijnen van de driehoek.

7.7 Denkactiviteiten

We proberen in te zien of de vorige conjectures waar zijn. Hiervoor proberen we een bewijs te leveren. Daarbij nemen we volgende principes in acht:

1. Een stelling heeft geen uitzonderingen. Een wiskundige bewering moet juist zijn voor elke mogelijke situatie.

2. Ook duidelijke stellingen moeten bewezen worden. Een bewijs mag niet steunen op een schets.

3. Een bewijs moet algemeen zijn.

4. De gegevens en het te bewijzen van een stelling moet je duidelijk onderscheiden.

5. De omgekeerde van een stelling is niet noodzakelijk een stelling.

7.8 Abstracte theorie

7.8.1 Bewijs van de concurrentie van de drie middelloodlijnen, zwaartelijnen en bissectrices in een willekeurige driehoek

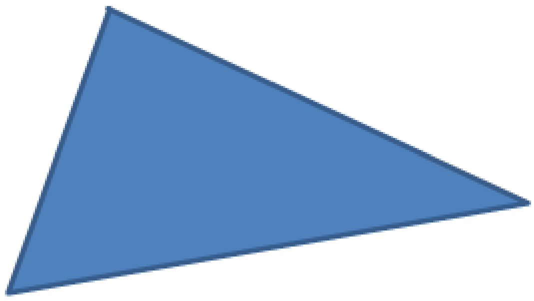
Concurrentie van de drie middelloodlijnen

$<$ Wat is de middelloodlijn op een lijnstuk?

$<$ Voer de constructie van de middelloodlijn op het getekende lijnstuk uit.

$<$ Welk kenmerk van middelloodlijn gebruik je hier?

$<$ Lees nu aandachtig de volgende redenering.
Maak er een schets bij en vul de ontbrekende stappen zelf aan.



Gegeven:

- $\triangle PQR$ is een willekeurige driehoek.
- l, m, n zijn middelloodlijnen op de zijden PQ, QR en PR.

Te bewijzen: ....

Bewijs:

Idee van het bewijs: De concurrentie van drie lijnen die in eenzelfde vlak liggen, kan bewezen worden door aan te tonen dat het snijpunt van twee van deze lijnen ook op de derde lijn ligt.

1. Twee middelloodlijnen l en m zijn snijdend.
   Immers indien $l \,||\, m$ zou zijn, dan zou
   ....
   en dit is onmogelijk omdat PQR een driehoek is.

2. Stel $l \cap m = M$. Dan zal M ook tot n behoren. Immers,

   - De voorwaarde opdat een punt tot een middelloodlijn van een lijnstuk behoort is dat ....
   - Dus zal M tot n behoren, omdat we weten dat:
     - M behoort tot l, dus is ....
     - M behoort tot m, dus is ....

   Bijgevolg zal ....
   en dus zal M tot n behoren.
   (wtbw.)

Concurrentie van de drie bissectrices

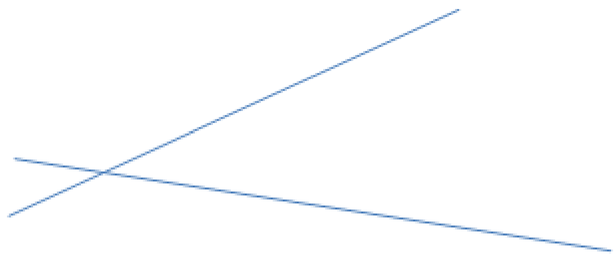
Een analoge redenering kan je maken om te bewijzen dat de drie bissectrices van een willekeurige driehoek concurrent zijn.

< Wat is een bissectrice van een paar snijdende rechten?

< Wat gaat er volgens jou veranderen in de redenering doordat we nu met bissectrices werken?

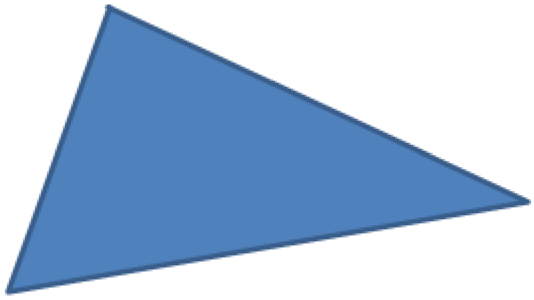
< Voer eerst de constructie uit van de bissectrice van een paar snijdende rechten.

< Welk kenmerk van bissectrice gebruik je hierbij?



< Lees nu aandachtig de volgende redenering. Verander ze waar nodig.

Maak er een aangepaste schets bij en vul de ontbrekende stappen zelf aan.



Gegeven:

- $\triangle PQR$ is een willekeurige driehoek.
- l, m, n zijn middelloodlijnen op de zijden PQ, QR en PR.

Te bewijzen: ....

Bewijs:

Idee van het bewijs: De concurrentie van drie lijnen die in eenzelfde vlak liggen, kan bewezen worden door aan te tonen dat het snijpunt van twee van deze lijnen ook op de derde lijn ligt.

1. Twee middelloodlijnen l en m zijn snijdend.

   Want indien $l \parallel m$ zou zijn, dan zou

   ....

   en dit is onmogelijk omdat $\triangle PQR$ een driehoek is.

2. Stel $l \cap m = M$. Dan zal M ook tot n behoren. Immers,

   - De voorwaarde opdat een punt tot een middelloodlijn behoort is dat ....
   - Dus zal M tot n behoren, omdat we weten dat:
     - M behoort tot l, dus is ....
     - M behoort tot m, dus is ....

   Bijgevolg zal

   ....

   en dus zal M tot n behoren.
   (wtbw.)

Concurrentie van de drie zwaartelijnen

< Wat is een zwaartelijn in een driehoek?

< Wat gaat er volgens jou veranderen in de redenering doordat we nu met zwaartelijnen werken?

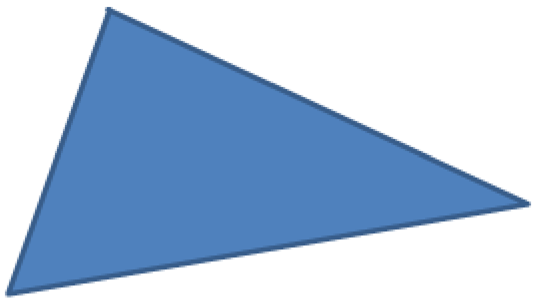
< Probeer nu zelf een bewijs voor de concurrentie van de zwaartelijnen in een driehoek te geven.

Maak eerst een schets.

7.8.2 Bewijs dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een willekeurige driehoek het snijpunt is van de drie middelloodlijnen

De eigenschap

- < Maak een schets.



- < Formuleer zelf de eigenschap in “als..dan”-vorm.

  . . . .
- < Noteer hieronder het gegeven en gevraagde.
- < Wat zal de clou van het bewijs zijn?
- < Stel het bewijs nu zelf op.

Gegeven: . . . .

Te bewijzen: . . . .

Bewijs: . . . .

Toepassingen van deze eigenschap.

Toepassing 1

- < Hoe vind je het middelpunt van een gegeven cirkel? Voer dit uit op de schets.
- < Welke eigenschap kan je hier voor gebruiken?

Toepassing 2

< Hoeveel punten zijn er nodig om een cirkel volledig vast te leggen? Leg uit.

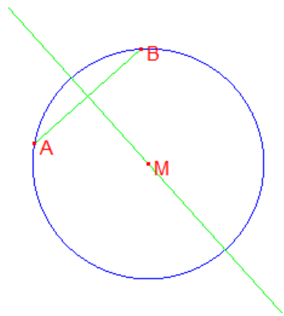
7.8.3 Bewijs dat een rechte raaklijn is aan een cirkel in het punt A van de cirkel asa de rechte in A loodrecht staat op de middellijn door A

Eigenschap. *Als een rechte een cirkel raakt in een punt A, dan staat de rechte loodrecht op de middellijn door A.*

Definitie. *Het apothema van een koorde van een cirkel is het lijnstuk dat vanuit het midden van de koorde loodrecht op de koorde staat.*

Hulpeigenschap. *Het apothema van een koorde van een cirkel gaat door het middelpunt van de cirkel (en is dus middellijn).*

Bewijs:



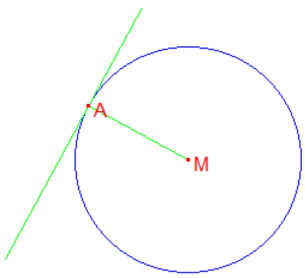
Het apothema gaat door het midden van de koorde en staat er loodrecht op (definitie van apothema).

Het is dus de middelloodlijn van deze koorde. De middelloodlijn bevat alle punten die op eenzelfde afstand van de twee eindpunten A en B van de koorde liggen (kenmerk van middelloodlijn).

Het middelpunt M van de cirkel ligt ook op dezelfde afstand van de punten A en B (definitie van cirkel). Dus behoort M tot de apothema.

(wtbw)

Bewijs van de eigenschap over de raaklijn:



Verschuif het punt B in de richting van het punt A, langs de cirkel.

< Wat gebeurt er met de koorde en met het apothema?
(De lengte van de koorde [AB] verkleint, de lengte van het apothema [PM] vergroot.)

< Wat gebeurt er als B samenvalt met het punt A?
(De rechte door A en B wordt de raaklijn aan de cirkel, en het apothema wordt de straal.)

Het apothema van een koorde [AB] staat loodrecht op deze koorde. De raaklijn staat dus loodrecht op de straal.

(wtbw)

Omgekeerde eigenschap

< Formuleer zelf de omgekeerde eigenschap van de vorige.

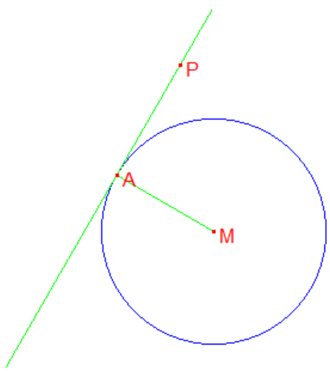
< Geldt deze eigenschap ook?

< Kan je dit bewijzen?

< Formuleer het gegeven en te bewijzen en maak een schets.

Gegeven: . . . .
(PA loodrecht op AM)
. . . .

Te bewijzen: . . . .
(PA is een raaklijn aan de cirkel in A)
. . . .



Bewijs: Stel dat er meer dan een snijpunt zou zijn van de cirkel en de lijn, namelijk A en P met $A \neq P$. Dan zullen we aantonen dat de afstand van P tot M niet gelijk is aan de straal van de cirkel maar groter moet zijn.
Toepassing van de stelling van Pythagoras op driehoek $\triangle AMP$ leert ons dat de schuine zijde $|PM|$ van deze rechthoekige driehoek groter is dan de rechthoekszijde $|AM|$.
Maar $|AM|$ is de straal van de cirkel.
Vermits $|PM|$ strikt ($P \neq M$) groter is dan de straal van de cirkel, kan P niet op de cirkel liggen.
(wtbw)

Besluit: Als een rechte in een punt A van een cirkel loodrecht staat op de middellijn door A, dan is de rechte een raaklijn aan de cirkel in A.

Kenmerk

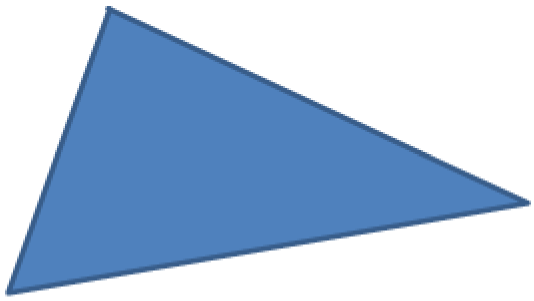
< Voeg de voorgaande eigenschap en haar omgekeerde eigenschap samen . Dit geeft een kenmerk voor raaklijn aan een cirkel. Formuleer dit.

< Geef nu een nieuwe definitie voor raaklijn.

7.8.4 Bewijs dat het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een willekeurige driehoek het snijpunt is van de drie bissectrices

De eigenschap.

< Maak een schets.



< Formuleer zelf de eigenschap in "als..dan"-vorm.

. . . .

< Noteer hieronder het gegeven en gevraagde.

< Wat zal de clou van het bewijs zijn?

< Stel het bewijs nu zelf op.

Gegeven: . . . .

Te bewijzen: . . . .

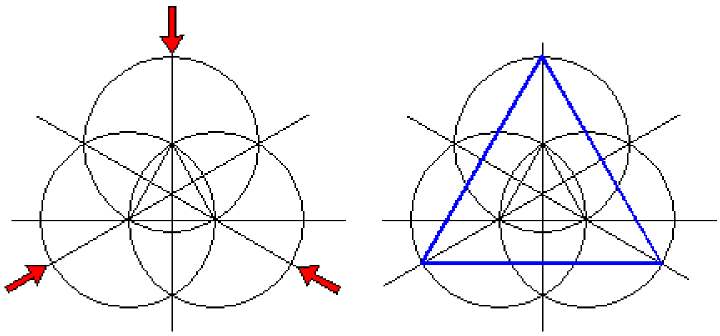
Bewijs: . . . .

7.9 Theoretische oplossing

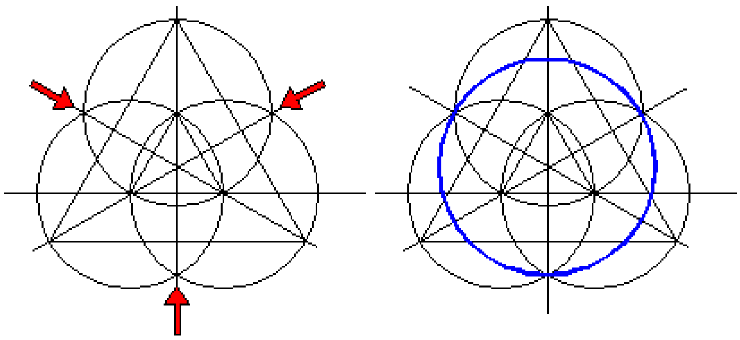
De algoritmevorm voor de constructies wordt opgesteld

De tekeningen in dit hoofdstuk zijn afkomsting van de website van Bert Janssen (Janssen, z. j.).

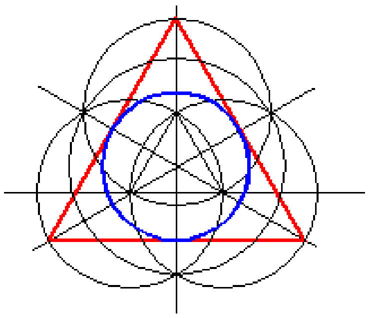
1. Begin met het basispatroon dat je in elke graancirkel terugvindt: construeer een gelijkzijdige driehoek zoals hieronder getoond wordt.



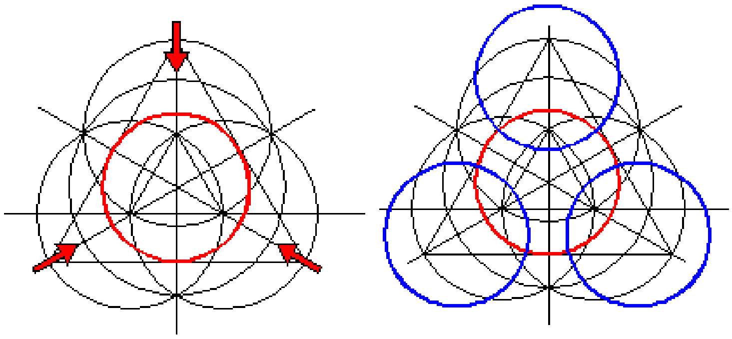
2. Construeer nu een cirkel met als centrum het midden van de driehoek, en door de drie snijpunten van vorige constructie .



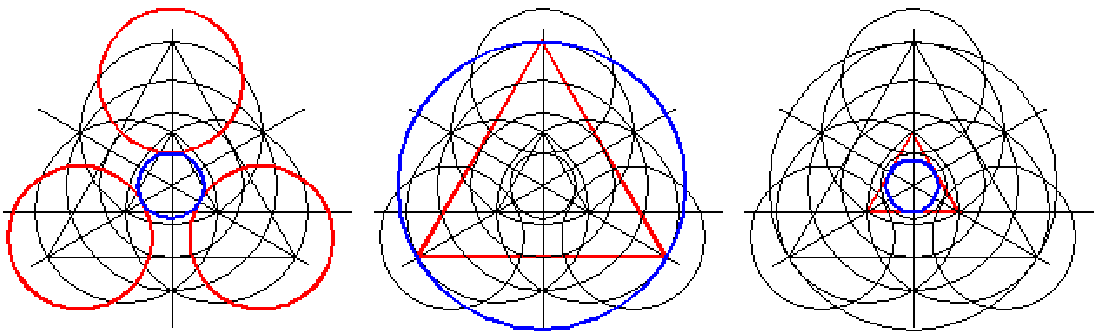
3. Construeer een cirkel met hetzelfde middelpunt, en rakend aan de grote driehoek.



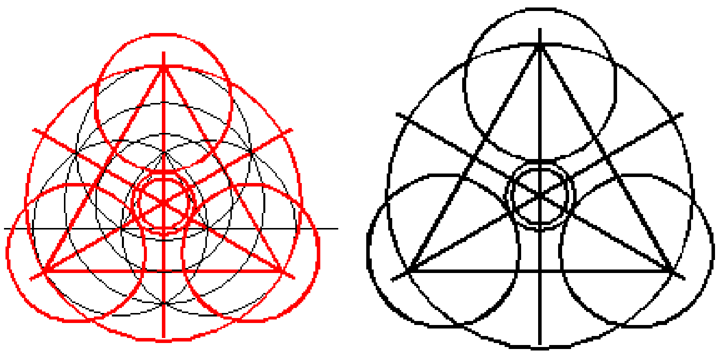
4. Construeer drie cirkels met dezelfde straal als de cirkel uit 3., en met als middelpunten de aangeduide snijpunten.



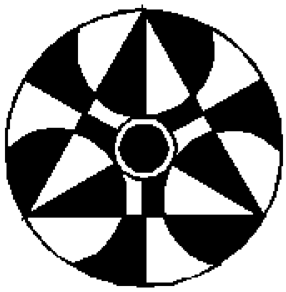
5. Nog drie cirkels moeten geconstrueerd worden. Alledrie hebben ze hun middelpunt centraal in de figuur. De eerste cirkel raakt aan de vorige drie cirkels, geconstrueerd in 4. De tweede omschrijft de grote driehoek. De derde is ingeschreven in de kleine driehoek.



6. Verwijder nu overbodige lijnen, en kies de nodige objecten uit.



7. Kleur de plaatsen waar het graan platligt, zwart. Laat die plaatsen wit waar het graan nog rechtop staat.



7.10 Denkactiviteiten

De constructie van de verschillende onderdelen van de Harlekijn wordt nu verantwoord door het citeren van de gebruikte stelling.

Materiaal:	werktekst.

7.11 Concrete oplossing

De constructie wordt nu stapsgewijs uitgevoerd door de leerlingen op een groot stuk karton, met behulp van punaises, koord en stift.

Materiaal:	werktekst, groot stuk maquettekarton, koord, punaises, algoritme met werkwijze, potlood, verfrolletje.

THE END.

7.12 Gebruikte schema's tijdens de lessenreeks

Van de 23 eerste definities van Euclides maakte ik een logisch schema. Dit bevindt zich in bijlage A.2.3.

Een logisch schema van de voorkennis van de leerlingen betreffende middelloodlijn en bissectrice bevindt zich in bijlage A.2.2.

Van de euclidische meetkunde die de leerlingen van ASO in vorige jaren bestudeerden, maak ik een samenvatting (in bijlage A.1), aan de hand van DELTA 1,2 A en B (Wolters Plantyn). Daarna stel ik deze leerstof voor in een logisch schema, dat zich in bijlage A.2.1 bevindt.

Deel III

De eerste onderzoekscyclus, Berlaar

Inleiding bij het onderzoek te Berlaar

De eerste cyclus van het onderzoek wordt uitgevoerd van september tot december tijdens het schooljaar 2010-2011. Ik krijg hiervoor de medewerking van Els Vanlommel in het H. Hart van Mariainstituut te Berlaar en zeventien leerlingen uit het vierde jaar. Ik leerde Els Vanlommel tijdens een lesstage kennen als een prima wiskundelerares die meer dan 10 jaar leservaring heeft en een frisse kijk op didactiek. Het onderzoek in Berlaar wordt uitgevoerd in een van haar klassen, namelijk 4D1E . Dit is een klas die volgens Els en haar collega's bestaat uit 17 sterke leerlingen, waarvan 7 leerlingen de optie economie volgen en 10 leerlingen de optie latijn. Ze krijgen 5 uur wiskunde per week.

Hoofdstuk 8

Voorbereidende fase van het onderzoek te Berlaar

8.1 Overzicht van het vooronderzoek te Berlaar

(September, oktober 2010)

8.1.1 Vaststelling van het aanvangsniveau

Om het aanvangsniveau vast te stellen van de leerlingen doe ik een eerste klassikaal experiment te Berlaar tijdens de turnles in maart van 2009–2010. De vaststelling van het Van Hiele denkniveau gebeurt door een schriftelijke test, en de vaststelling van de kijk van de leerlingen op wiskunde gebeurt in het schooljaar 2010–2011 met de leerlingen van 4D1E.

Om deze leerlingen te leren kennen, worden ze door mezelf geobserveerd tijdens verschillende wiskundelessen. Van interessante klasdiscussies en oplossingen voor taken die tijdens deze lessen plaatsvinden worden geluidsopnames gemaakt. Met bereidbare en spraakzame leerlingen houd ik korte gesprekjes tijdens deze lessen, die ook worden opgenomen.

Om bovendien een zo goed mogelijk beeld te krijgen van de kijk van de leerlingen op meetkunde, worden tijdens de middagpauze interviews afgenomen van drie verschillende leerlingen uit 4D1E. Deze drie leerlingen zijn door Els Vanlommel aan mezelf voorgesteld als een sterke, zwakkere en middelmatige leerling. Tijdens elk interview moet een leeling gedurende een uur meetkundeproblemen oplosen, en probeer ik zijn denkwijze te achterhalen.

8.1.2 Bepaling van de einddoelen

Einddoel van de lessenreeks is dat de leerlingen denkniveau 3 bereiken. Bovendien hoop ik dat hun positieve kijk op wiskunde gevoed wordt. Een positieve algemene kijk op wiskunde en op meetkunde moet na de lessenreeks sterker aanwezig zijn bij de leerlingen.

8.1.3 Formulering van de gepaste onderwijsactiviteiten

Hier wordt gezocht naar onderwijsactiviteiten die de gewenste kijk op wiskunde en meetkunde kunnen helpen voeden.

8.2 Vaststelling van het aanvangsniveau te Berlaar

8.2.1 Klassikaal experiment te Berlaar in maart van het schooljaar 2009–2010.

Dit experiment vindt plaats op het einde van het vorig schooljaar, namelijk op 18 maart 2010. Het wordt uitgevoerd met leerlingen van een vierde jaar latijn, die de leerstof van de cirkel reeds bestudeerden. Tijdens twee lesuren L.O. wordt door mezelf op de speelplaats van de school doorheen enkele klassikale opdrachten nagegaan of de leerlingen spontaan de kennis uit de wiskundeles gaan gebruiken in deze context. Ik doe dit experiment enerzijds om te zien of en hoe de leerlingen hun wiskundekennis gebruiken in een andere context dan de wiskundeklas. Anderzijds is het mijn bedoeling om hun niveau te leren kennen, om daarna een lessenreeks te kunnen opstellen.

Locatie is de speelplaats van de school. Beschikbaar materiaal is een bolletje koord, krijt, spijkers, een hamer, een winkelhaak, een passer en een rolmeter van 25 meter. Ook zijn er drie ballen ter beschikking. De klas wordt in twee groepen verdeeld: de eerste groep telt 12 leerlingen, de tweede groep 11. Gedurende een uur kan ik om beurten met elke groep werken. Onder het voorwendsel dat ik hun reactiesnelheden kom meten tijdens het spurten, laat ik de leerlingen klassikaal een aantal opdrachten uitvoeren, die hieronder beschreven staan.

Opdracht 1. De leerlingen moeten op de speelplaats in een cirkel gaan staan met een gegeven middelpunt, en dan om beurt naar het midden spurten. Bedoeling van deze opdracht is om te zien of de studenten aan de cirkelvorm denken. Ze moeten hem ook construeren. Hiervoor is er een bolletje koord en krijt ter beschikking.

Opdracht 2. In opdracht 2 moeten de leerlingen zich een geziene constructie uit de wiskundeles voor de geest halen tijdens de turnles, namelijk de constructie van de omgeschreven cirkel aan een gegeven driehoek. Deze gebruikt de constructie van de middelloodlijnen op een lijnstuk. Er is krijt, koord, en een winkelhaak ter beschikking, en ook een rolmeter van 25 meter lang.

Een volledige beschrijving van het experiment gebeurt in bijlage B.3.

8.2.2 Vaststelling van het Van Hiele denkniveau in 4D1E (schooljaar 2010-2011)

Het Van Hiele denkniveau wordt vastgesteld voor de zeventien leerlingen van 4D1E in het begin van het schooljaar 2010-2011. Klas 4D1E bestaat uit 10 leerlingen latijn en 7 leerlingen economie-wiskunde. Per week krijgen de leerlingen in deze ASO-richting vijf uren wiskunde. Volgens de leerkracht is het een sterke klas.

Op 25 oktober 2010 ga ik via een schriftelijke test na of het tweede Van Hiele denkniveau bereikt is voor deze leerlingen. De lessenreeks over de cirkel die ze later van mij zullen krijgen is van het derde denkniveau en vereist een beheersing van het tweede niveau, het denkniveau van de informele deductie. Voor het opstellen van deze test laat ik mij inspireren door de aanbevelingen van de Van Hieles (zie 4.6). Hieronder omschrijf ik wat de vragen uit de test juist nagaan.

Vraag 1. Kunnen de leerlingen een getekende figuur beschrijven met een minimaal aantal eigenschappen?

Vraag 2. Kunnen de leerlingen de definitie van rechthoek en parallellogram correct gebruiken om aan te tonen dat elke rechthoek ook een parallellogram is?

Vraag 3. Kennen de leerlingen het verschil tussen een definitie en een stelling?

Vraag 4. Een aantal uitspraken vormen de verantwoording voor de constructie van de bissectrices van een paar snijdende rechten. Kunnen de leerlingen deze uitspraken in de juiste logische volgorde plaatsen?

Vraag 5. De stelling van Pythagoras moet geformuleerd en bewezen worden. Voor het bewijs krijgen de leerlingen een schets en een bewijs 'met gaten'.

Een volledige beschrijving van de test met modelantwoorden staat in bijlage B.4.1

8.2.3 Vaststelling van de algemene kijk van de leerlingen van 4D1E op wiskunde

Een vijftal wiskundelessen van 4D1E te Berlaar, gegeven door Els Vanlommel, worden door mezelf geobserveerd op 29 en 30 september en op 5, 6 en 7 oktober 2010. Tijdens het eerste semester wordt geen meetkunde gegeven in Berlaar, zodat ik ook geen vaststellingen kan doen over de kijk van de leerlingen op meetkunde. Wel kan ik gegevens verzamelen over hun kijk op wiskunde in het algemeen. Het lijkt mezelf zinvol dit te doen tijdens de lessen die door Els gegeven zijn, omdat de leerlingen zich dan in hun vertrouwde omgeving bevinden, en zo stilaan aan mijn aanwezigheid kunnen wennen. Het zal me ook helpen een goede keuze te maken voor de individuele interviews achteraf. Ook leer ik ondertussen zelf de mogelijkheden en het niveau van de leerlingen kennen.

De lessen die ik observeer zijn vooral lessen waarin oefeningen gegeven worden. Zo stoor ik het minst wanneer ik in het klaslokaal rondwandel en korte gesprekjes aanknoop met de leerlingen. Tijdens deze mini-interviews zoek ik naar relevante informatie over de kijk op wiskunde zoals samengevat in AK 1 - AK 10 (zie 3.3.3). Na observatie van de lessen op 29 en 30 september 2010 vertaal ik deze algemene kijk op wiskunde naar zienswijzen in verband met de concrete leerstof, namelijk de euclidische deling van veeltermen.

In bijlage B.5.1 beschrijf ik concreet welke vragen en beoordelingsschema ik wil gebruiken tijdens de mini-interviews. Een beschrijving van de observaties en van de afgenomen mini-interviews staat in bijlage B.5.3.

8.2.4 Vaststelling van de kijk van de leerlingen van 4D1E op meetkunde vóór het volgen van de lessenreeks

Drie leerlingen uit 4D1E worden gedurende ongeveer een uur apart geïnterviewd door mezelf. Dit gebeurt tijdens de middagpauze van 21, 22 en 25 oktober 2010. Een zwakkere (leerling B5), een middelmatige (leerling B9) en een sterkere (leerling B8) leerling worden door Els aan mij voorgesteld, en nemen om beurt deel aan een interview. Ze weten dat het interview kadert in een onderzoek naar denkmethodes van leerlingen en beseffen dat er geen punten aan vasthangen. Tijdens het interview zoekt de leerling naar een oplossing voor vier opdrachten die ik hem geef. In deel 1 van bijlage B.6 staan deze opdrachten volledig beschreven, met een modeloplossing. Hieronder som ik deze opdrachten op in het kort.

Probleem 1. Waarom een grasveld schuin oversteken in plaats van eromheen te gaan?

Probleem 2. Welke posities van de speelplaats kan je innemen als je even ver van twee palen wil gaan staan?

Probleem 3. Wat mag wel en niet afgelezen worden van een euclidische schets?

Probleem 4. Formuleer zelf een eigenschap over de gelijkheid van de basishoeken van een trapezium en bewijs deze eigenschap ook.

Terwijl de leerling luidop zoekt naar een oplossing van het gestelde probleem, probeer ik zelf zoveel mogelijk van zijn gedachten te achterhalen en vast te stellen wat zijn kijk is op meetkunde. In het bijzonder worden EK 1-14 nagegaan zoals beschreven in 3.4.7. Een geluidsopname legt elk interview vast (zie bijlage B.2.3), ook worden de notities bewaard die de leerling maakte tijdens het interview.

8.3 Formulering van het einddoel

De verwerking van de gegevens uit het vooronderzoek wordt besproken in hoofdstuk 10 in het kader van de retrospectie op het onderzoek te Berlaar. Het gaat hier om het turnexperiment, het onderzoek naar de algemene kijk op wiskunde, de interviews ter bepaling van de kijk op meetkunde, en de test ter bepaling van het Van Hiele denkniveau. Na verwerking van de gegevens kunnen besluiten geformuleerd worden en het einddoel van een te geven lessenreeks kan bepaald worden.

Uit het turnexperiment in maart 2010 besluit ik dat tijdens de lessenreeks duidelijk moet worden gemaakt waarom met passer en liniaal gewerkt wordt in de euclidische meetkunde. Landmeetkunde is een zeer natuurlijke probleemcontext om euclidische meetkunde in te leiden. In dit licht besluit ik te kiezen voor het *zoeken naar de constructie van een graancirkel*. Het mysterieuze karakter daarvan zou extra motiverend moeten zijn voor de leerlingen

Uit het onderzoek naar de algemene kijk van de leerlingen uit 4D1E dat plaatvond in oktober en september 2010 in Berlaar besluit ik dat deze vrij goed is. Ik zal mij in het vervolg van het onderzoek vooral op de *specifieke kijk op meetkunde* richten.

De interviews voor het onderzoeken van de kijk op meetkunde van de leerlingen van 4D1E werden gehouden eind oktober 2010. Hierin werden *EK 2, 3, 4, 5, 7', 10, 13 en 14* effectief onderzocht. Uit dit onderzoek blijkt dat tijdens de lessenreeks aan alle onderzochte EK's gewerkt moet worden, omdat de scores erg negatief zijn. Bovendien blijkt dat op logische formuleringen gewerkt moet worden.

Uit de test die afgenomen werd eind oktober bij de zeventien leerlingen van 4D1E blijkt dat het tweede Van Hiele denkniveau bij de leerlingen niet helemaal bereikt is. Leerlingen moeten nog leren *herkennen in gewoon taalgebruik wat gegeven is en wat te bewijzen.* Ook moet aandacht gegeven worden aan *wat een definitie is en wat een stelling.* Op *logische schema's* moet dus nog geoefend worden, alsook op het *zelf maken van deductieve bewijsjes.*

8.4 Ontwikkeling van een hypothetisch leertraject

Vanuit de literatuurstudie bouwde ik in hoofdstuk 7 een model op voor een lessenreeks die tegemoet komt aan de 10 algemene en de 14 meetkundige visies op wiskunde uit 3.3.3 en 3.4.7. Hierbij hield ik rekening met de mogelijkheden die in de literatuur beschreven werden (zie 4.10) om aan de kijk van leerlingen op wiskunde te werken (zie hoofdstuk 6).

Dit model uit hoofdstuk 7 moet om verschillende redenen aangepast worden voor het lesexperiment in Berlaar. Enerzijds is er slechts een beperkte tijd voor het onderzoek beschikbaar, namelijk zes lesuren. Dit betekent dat de lessenreeks uit hoofdstuk 7 moet ingekort worden. Daarom laat ik het zelf zoeken op de constructie van de Harlekijn grotendeels weg, en geef de leerlingen een tip. Niet alle stellingen worden behandeld, er wordt gekozen voor de stelling van de ingeschreven cirkel van een driehoek, en het kenmerk van raaklijn. Anderzijds moet rekening gehouden worden met de besluiten die in het vooronderzoek werden getrokken. Hierdoor zal extra aandacht gegeven worden aan het logisch redeneren en formuleren. Dit wordt geïntegreerd in de lessen, en niet apart besproken. Ook gaat bij het lesbegin veel aandacht uit naar het begrijpen waarom met passer en liniaal gewerkt wordt. Bovendien vertelde Els Vanlommel me dat de definitie van cirkel en het raakbegrip reeds gekend is door de leerlingen van 4D1E, dus dit hoeft niet meer behandeld te worden.

8.5 Een lessenreeks voor Berlaar

De aangepaste lessenreeks voor Berlaar wordt beschreven in hoofdstuk 9.2. Zie bijlage B.1 voor de bijhorende lesvoorbereiding, werktekst en powerpointpresentatie.

Ook tijdens het geven van de lessen werd de lessenreeks nog bijgestuurd. Ik merkte op dat EK 5 en EK 13 vrij snel aanvaard werden, terwijl EK 14 en EK 3 een hardnekkiger probleem waren. Hierop heb ik dan ook ingespeeld tijdens les 4, 5 en 6.

Hoofdstuk 9

Fase van het lesexperiment te Berlaar

9.1 Planning van het lesexperiment

Het lesexperiment vindt plaats in 4D1E te Berlaar in november 2010. Het bestaat uit twee delen: eerst wordt de lessenreeks voor Berlaar gegeven die hiervoor speciaal werd opgesteld en beschreven in 8.5. Hiervan worden geluidsopnames gemaakt en een verslag. Nadat de lessenreeks gegeven is wordt een sterke, zwakkere en middelmatige leerling geïnterviewd. Tijdens dit interview worden gegevens verzameld over de aandachtspunten van de lessenreeks.

9.2 Het geven van de lessenreeks

Tijdens zes lesuren meetkunde op 15, 16, 17, 18, 19 en 22 november 2010 wordt de lessenreeks in Berlaar gegeven in 4D1E. De eerste twee lessen worden gegeven door Els Vanlommel en mezelf, de volgende lessen alleen door mezelf. Tijdens alle lessen was Els Vanlommel aanwezig. De werktekst uit bijlage B.1 wordt gebruikt. Hieronder geef ik een beschrijving van het verloop van de lessen te Berlaar, met daaraan in cursief een verantwoording toegevoegd voor de verschillende lesonderdelen van elk van de lessen in termen van de EK of de AK die ze zouden moeten voeden.

LES 1. Het probleem van de Harlekijn wordt gesteld

(15 november 2010)

1. Om wat sfeer in de klas te brengen, legt de leerkracht voor de les een bundeltje graanhalmen neer, goed zichtbaar voor alle leerlingen. Op het bord schrijft ze in het groot de vraag: "Is de Harlekijn construeerbaar door mensen?"

   Om de leerlingen uit te leggen wat de Harlekijn is, namelijk een graancirkel, en om het mysterieuze karakter van graancirkels te benadrukken, toont de leerkracht een eerste filmpje van enkele minuten. Het is een stukje uit de canvasreportage van 2007 over graancirkels. Het toont verschillende getuigenissen van mensen die een graancirkel bij Waterloo zagen maken, door aliens.

   Dit is een poging om door te dringen in de gedachtenwereld van de leerling (EK 13). Het filmpje is erg realistisch en actueel. Het moet aangeven dat wiskunde gaat over eerlijke, *menselijke vragen (AK 4). Deze toepassing zal de 14-jarige leerlingen interesseren door haar mysterieus karakter.*

2. Daarna toont de leerkracht een foto van de graancirkel waarvoor tijdens de volgende lessen onderzocht zal worden of hij door mensen construeerbaar is: de Harlekijn. Hij dook op in Engeland in 1997. Bij deze foto zullen leerkracht en leerlingen samen nadenken of de constructie van een graancirkel wel een probleem is, en wat dan juist de knelpunten zijn. Weer wordt een filmpje van enkele minuten getoond. Hierop construeren een viertal gemaskerde personen in het donker een graancirkel. Ze construeren de contouren van de oppervlakken die in de graancirkel voorkomen, ze werken met koorden en paaltjes.

3. De figuren die getekend zullen moeten worden, worden opgesomd. Hiervoor worden benamingen gekozen die natuurlijk zijn: grote cirkel, grote driehoek enzovoort.

   Dat wiskundige notaties vrij mogen gekozen worden, is een verwijzing naar EK 5 en dat meetkundige figuren natuurlijk zijn is een verwijzing naar EK14.

4. Nu volgt een uiteenzetting door de leerkracht waarin de historiek van de euclidische meetkunde aan bod komt. Daarbij worden duidelijk de filosofische principes van Euclides' Elementen uitgelegd. (Plato en Aristoteles)

   Een eerste bedoeling van dit lesonderdeel is de lessen te verpersoonlijken. Dit is weer een poging om in de persoonlijke gedachtenwereld van elke leerling door te dringen (EK 3).

   Bovendien geeft deze uitleg ook een verklaring voor vragen die de leerlingen zich kunnen stellen, zoals: "waarom moeten wij in meetkunde gekende dingen definieren? Waarom bewijzen geven voor eigenschappen? Wat is een bewijs? Waarom mogen we niet gewoon aflezen van een schets wat we zien?"(EK 14) Het deductief systeem wordt verantwoord en toegelicht. Ook dat is volgens mij nodig om EK 3 aan te moedigen: om deductief te kunnen redeneren moet de logische opbouw van de meetkunde gekend zijn.

   Tenslotte wordt gewezen op het karakter van meetkundige figuren: ze kunnen nooit exact voorgesteld worden (EK 2).

5. Tot slot van deze uiteenzetting toont de leerkracht zelfgemaakte logische schema's over de eerste 3 definities van Euclides en van de voorkennis van de leerlingen (zie bijlage A.2.3 en A.2.1).

   Wanneer de leerlingen inzien hoe de meetkunde deductief is opgebouwd, zullen ze ook sneller van deze opbouw zelf gebruik kunnen maken voor het bewijzen van nieuwe eigenschappen, of voor het oplossen van problemen (EK 3).

LES 2. Het constructieprobleem van de Harlekijn wordt meetkundig bekeken

(16 november 2010).

1. Eerst wordt de tabel p. 4 en 5 van de werktekst ingevuld via een klasgesprek. In deze tabel vragen leerlingen en leerkracht zich af wat wel en wat niet af te lezen valt uit de Harlekijnschets. Vertrokken wordt van een onderzoek naar de symmetrie die in de figuur aanwezig is.

   Dit is een directe oefening op EK 14. Fouten worden door medeleerlingen of leerkracht rechtgezet. Ok EK 2 komt hier aan bod. Het aflezen van eigenschappen uit een schets is deels verboden doordat een schets steeds te onnauwkeurig wordt afgebeeld.

2. Nog heel wat gegevens ontbreken voor de constructie van de Harlekijn. Nu krijgen de leerlingen een tip. Deze wordt op bord stap per stap uitgevoerd en de leerlingen tekenen mee.

   Hierbij wordt nog eens over het tekenen van meetkundige figuren nagedacht. Meetkundige figuren zijn in wezen denkbeeldig dus elke schets is gebrekkig (EK 2 en 14).

   In de tip worden alleen euclidische constructies gebruikt. De drie eerste postulaten van Euclides geven aan welke dit zijn. Weer wordt de link met de realiteit van de constructie van een graancirkel gelegd (EK 13).

3. Nu wordt met de leerlingen klassikaal nagegaan aan welke voorwaarden voldaan moet worden om de tip voor de Harlekijnconstructie te kunnen gebruiken.

   Opdat de tip zou bruikbaar zijn, moeten een aantal dingen onderzocht worden: zo bijvoorbeeld de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een driehoek (EK 4, 5).

4. De leerkracht formuleert vier generieke problemen die ontstaan uit het Harlekijnprobleem. Er zal een euclidische theorie ontwikkeld moeten worden over de cirkel *(EK 4, 5).*

5. Er wordt op twee manieren naar de oplossing van het eerste probleem gezocht. Door gissen en missen en door deductief te redeneren. In de werktekst p. 8 construeren de leerlingen in een van de drie driehoeken de middelloodlijnen. Hoewel bij de drie voorbeelden concurrentie vermoed wordt uit de schets, mag hieruit nog geen eigenschap afgeleid worden, want een schets is nooit nauwkeurig genoeg *(EK 5, 6a).* De leerkracht zet dit extra in de verf door de zichtbare concurrentie op de schets van de leerlingen te confronteren met de schets op het bord. Hier werden de 3 middelloodlijnen niet concurrent getekend (EK 2). Een deductieve redenering over hetzelfde onderwerp levert een bewijs *(EK 6a, 7).* Het bewijs op p. 9 moet door de leerlingen zelf aangevuld worden.

   Het bewijs op p. 9 is in woorden gegeven, om de leerlingen te tonen dat dit ook kan. Bovendien geeft het beter de redenering weer dan een bewijs in symbolen, dat eerder een soort berekening kan lijken. Begrip primeert op formalisme (EK 7).

6. De leerlingen moeten nu zelf het lokaal logisch schema van middelloodlijn uitbreiden met de nieuw ontdekte eigenschap over de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een driehoek. Dit gebeurt op p. 10 van de werktekst.

   Enerzijds zien de leerlingen nu in dat ze zelf eigenschappen kunnen formuleren en bewijzen (EK 5). Anderzijds is dit opstellen van een logisch schema een hulp om achteraf deductief te kunnen redeneren (EK 3).

LES 3. Op zoek naar het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek door gissen en missen

(17 november 2010).

Uit het vooronderzoek maar ook uit de vorige twee lessen blijkt dat aan EK3 nog serieus gewerkt moet worden. Niet alleen het feit dat een bewijs op deductieve wijze verloopt, maar ook het deductief zoeken naar de oplossing van een gesteld probleem moet nog veel aandacht krijgen. De leerlingen geloven dit nog niet. Het heeft niet veel zin om dit steeds weer te zeggen. Het lijkt mij veel zinvoller om het hen te laten ervaren. Daarom krijgen ze in les 3 ruim de tijd om *door gissen en missen op zoek te gaan naar het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek. In les 4 zal door deductief na te denken ditzelfde probleem opgelost worden.*

1. De leerlingen krijgen elk twee stukjes maquettekarton. Eén met een grote en één met een kleine driehoek erop getekend: willekeurige driehoeken, met allerlei vormen (zie bijlage B.1). De leerlingen gebruiken passer, potlood, liniaal en krijgen een speldje om eventueel in het gezochte middelpunt te prikken. Zo wordt voor 34 driehoeken gezocht naar het middelpunt van hun ingeschreven driehoek. Deze werd eerst door de leerlingen zelf gedefinieerd als de cirkel die aan de drie zijden van de driehoek raakt.

   Definities kunnen zelf gegeven worden vanuit een realistisch probleem (EK 4). Stellingen kunnen zelf gezocht en geformuleerd worden (EK 5).

   Zonder na te denken beginnen 16 van de 17 leerlingen ijverig met het tekenen van de middelloodlijnen van de driehoeken. De zeventiende leerling slaagt er in om het speldje op zicht juist te prikken. Ze tekent zonder moeite de ingeschreven cirkel van haar kleine driehoek. Voor de grote driehoek lukt het niet zo best. Wanneer de 16 andere leerlingen het gevonden snijpunt van de middelloodlijnen als middelpunt voor een cirkel nemen, blijkt deze niet voor hun twee driehoeken te raken aan de drie zijden. Het is dus niet de oplossing. Een hint van de leerkracht doet hen inzien dat ze wel het middelpunt van de omgeschreven cirkel gevonden hebben.

   Een stelling over de positie van het gezochte middelpunt kunnen we maar formuleren als deze geldt voor elke mogelijke situatie (EK 6a). Door te gissen hebben de leerlingen gemist.

2. Zonder lang na te denken, beginnen de leerlingen aan een tweede poging. Ze proberen met de zwaartelijnen of de hoogtelijnen. Een enkele leerling gebruikt de bissectrices. Ook de poging van de zwaartelijnen en hoogtelijnen mislukt, dus moeten het de bissectrices zijn. Tijdens deze tweede poging voert de leerkracht een gesprek met de leerlingen. Waarom zullen zwaartelijnen en hoogtelijnen niet altijd het gezochte middelpunt leveren en de bissectrices wél? Welke eigenschappen hebben bissectrices? De voorkennis van de leerlingen wordt geactiveerd en ze vinden het antwoord in het kenmerk van bissectrices.

   Een deductieve redenering gebruiken om een nieuw probleem op te lossen blijkt een goed alternatief voor gissen en missen (EK 3).

LES 4. Noodzaak van een deductieve bewijsvoering voor eigenschappen

(18 november 2010)

Na de vorige les zien de leerlingen wel in dat een deductieve redenering ook tot de oplossing leidt voor het gestelde probleem. Of ze écht geloven dat ze beter deductief kunnen redeneren, . . . dat denk ik niet. Bovendien hebben ze eigenlijk gelijk: voor één concreet voorbeeld kan je misschien beter gissen. Met wat geluk prik je immers direct in de roos. Dus moet ik hen laten begrijpen waarom dit gissen niet volstaat in wiskunde. Ziehier mijn opzet:

Tijdens deze les zitten de leerlingen in een U-vorm, zonder banken, schrijfgerief of werktekst. Ze hebben niets nodig, want er gaat alleen nagedacht worden.

1. **Eigenschap over het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek.**

   De leerkracht vraagt naar de mening van de leerlingen over het volgende: ze toont een zelfgemaakte schets van een ingeschreven cirkel aan een driehoek (zie bijlage B.1).

   De schets is groot en met zeer dunne lijnen getekend. Het snijpunt van de bissectrices van de driehoek wordt als middelpunt van een cirkel genomen. Deze raakt aan de drie zijden van de driehoek.

   Op $34 + 1 = 35$ voorbeelden bleek dat het middelpunt van de ingeschreven cirkel het snijpunt is van de drie bissectrices van de driehoek. Mogen we dit dan als eigenschap formuleren?

   Zowel EK 6a, 7 en 14 worden hier aangekaart. Het is een poging van de leerkracht om te peilen naar het geloof van de leerlingen in de noodzaak van een bewijs. Ook EK 3 wordt hier nogmaals getest.

   Zoals verwacht, zijn er nog steeds een aantal leerlingen die denken dat we vanuit de 35 voorbeelden wel kunnen besluiten dat de eigenschap zal gelden voor elke driehoek. De leerkracht legt uit dat de eigenschap blijkt te gelden voor de 35 concrete voorbeelden, maar daarom niet voor elke denkbare driehoek. Aan de leerlingen wordt dan gevraagd even de ogen te sluiten en zich een driehoek voor te stellen. Heel groot of heel klein. Een denkbeeldige driehoek is een wiskundige figuur volgens Plato (EK 2). En kennis van denkbeeldige figuren kan dan ook alleen door denken verkregen worden. Dus om een eigenschap te kunnen formuleren moeten we nadenken. Redeneren. Met de ogen toe maken de leerlingen stap per stap de redenering die leidt tot het vinden van het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek als het snijpunt van diens drie bissectrices. De oplossing van het probleem is gevonden voor een denkbeeldige driehoek, en zal gelden voor elke concrete driehoek. Het bewijs van het vermoeden is geleverd, dus hebben we een nieuwe stelling gevonden.

   Met dit gedachtenexperiment probeer ik door te dringen in de persoonlijke denkwereld van elke leerling afzonderlijk (EK 13). Het sluiten van de ogen, en het gezellig bijeen zitten in een kring helpt hierbij. Door het sluiten van de ogen neemt de leerling ook afstand van het materiele. Hij richt zich op denkbeeldige vormen, meetkundige vormen dus. En is meer geneigd tot nadenken (EK 3, 7). Wanneer de redenering voltooid is, beschouwt de leerkracht het bewijs als geleverd (EK 8.)

   Vervolgens komt het bewijs op bord, in woorden. Het wordt via een klasgesprek terug opgebouwd.

   Tijdens de redenering benoemt de leerkracht de gebruikte eigenschappen en definities als "de stelling van Wout" of de "definitie van Mathias" (EK 5 en EK 3).

   Er wordt nagegaan of de omgekeerde stelling ook geldt. In het bewijs worden de stappen één na één omgekeerd. De verantwoording hiervoor wordt gegeven.

   Hier wordt gewerkt op de logische formuleringen.

2. **Eigenschap over de ligging van het raakpunt tussen cirkel en raaklijn.**

   De leerlingen formuleren eerst zelf de definitie van raaklijn aan een cirkel. Ze zagen in analyse de raaklijn aan een parabool. Daarna toont de leerkracht een grote schets op papier van een driehoek en zijn ingeschreven cirkel (zie bijlage B.1). Hierop blijkt dat de juiste positie van het raakpunt van een zijde met de cirkel, op een schets zeker niet af te lezen valt (EK 2). Zelfs niet op een zeer nauwkeurige schets. Het is dus nodig hierover na te denken. En naar eigenschappen te zoeken. Weer op een deductieve wijze.

   De leerkracht noteert op bord. De leerlingen zitten in een kring en noteren niet, maar denken mee na. *Vanuit een bestaand probleem wordt gezocht naar nieuwe stellingen en definities, namelijk over het raakpunt van cirkel en raaklijn.*

   Leerling B10 ziet in dat M middelpunt is van de ingeschreven cirkel van een driehoek asa M even ver van de drie zijden van de driehoek gelegen is. Ook dit vraagt een exact bewijs. Maar eerst wordt de eigenschap over de middelloodlijn van een koorde gegeven, door een vraaggesprek aan bord. *(EK 3, 8)*

LES 5. Bewijs van de "eigenschap van Wout" door opeenvolgende eigenschappen te bewijzen. Een lokaal logisch schema

(19 november 2010)

Bij het starten van de les wordt aan de leerlingen een blad gegeven met een logisch schema van de eigenschappen die nodig zijn om de "eigenschap van Wout" te bewijzen.

Zie hiervoor onderstaand schema.

Eigenschap 1.

ALS $[AB]$ koorde is van C_M,
DAN bevat de middelloodlijn op $[AB]$
het middelpunt M.

$\downarrow$

Eigenschap 2.

ALS r raaklijn is in A aan C_M,
DAN r staat loodrecht op AM.

$\downarrow$

Omgekeerde eigenschap van 2.

ALS r een lijn is door A
en r staat loodrecht op AM
DAN r is raaklijn in A aan C_M.

$\downarrow$

Kenmerk.

r is raaklijn in A aan C_M ASA r is loodrecht op AM.

$\downarrow$

Eigenschap van Wout.

ALS C_M raakt aan de drie zijden van een driehoek,
DAN heeft M dezelfde afstand tot deze drie zijden.

Eén voor één worden deze eigenschappen aan bord door de leerkracht bewezen in woorden. De leerlingen noteren. Zij bedenken steeds de volgende stappen of verantwoordingen. De leerkracht stelt hiervoor gerichte vragen.

Door deze werkwijze handelt les 5 volledig over het bewijzen van eigenschappen door toepassing van de deductieve methoden (EK 3). Tijdens de laatste les wil ik dan ook extra aandacht schenken aan het oplossen van problemen door deductief te redeneren (ook EK 3).

LES 6. Constructie van de Harlekijn op een groot tekenblad

(22 november 2010)

Als antwoord op het oorspronkelijk gestelde probleem, en als toepassing van alle geziene stellingen en definities over de cirkel, krijgen de leerlingen in groepjes van vier de opdracht om de Harlekijn te tekenen (EK 13). Tijdens deze laatste les wil ik graag zeer sterk de nadruk leggen op de mogelijkheid om gericht te zoeken naar de oplossing van een meetkundeprobleem (EK 3).

Zie bijlage B.1 voor een schets van de Harlekijn.

Wanneer de leerlingen de klas binnenkomen zijn de banken reeds in groepjes van vier samengezet. Elke groep beschikt over een groot tekenblad van 110 op 75 cm dat rust op een groot karton. Ook speldjes, draad en passer, liniaal en potlood zijn ter beschikking.

De leerlingen begrijpen snel dat ze de Harlekijn zullen moeten tekenen. Elke leerling krijgt een blad met de opgave van de tekenopdracht, waarop hij zijn naam invult. Een voorbeeld hiervan staat in onderstaande figuur. Deze bladen werden achteraf ingevuld als taak.

Tekenopdracht.

1. Construeer de "grote driehoek"van de Harlekijn zoals dit werd besproken in de tip.

   EERST DENKEN.
   DAN PAS TEKENEN!

   < Welke soort lijnen zijn de drie constructielijnen voor de grote driehoek?

   < Zijn deze lijnen concurrent? Waarom?

2. Teken de 'grote cirkel' van de Harlekijn. Dit is de omgeschreven cirkel aan de grote driehoek.

   < Waar moet het middelpunt van de omgeschreven cirkel liggen? Waarom?

   < Wat is zijn straal?

3. Teken de 'kleinste cirkel' van de Harlekijn. Deze is de ingeschreven cirkel van de kleine driehoek.

   < Waar ligt het middelpunt van deze cirkel? Waarom?

   < Waar vind je de raakpunten van deze cirkel met de zijden van de kleine driehoek? Waarom?

   < Wat is de straal van de kleinste cirkel?

4. Teken de omgeschreven cirkel aan de drie punten die op de schets aangegeven zijn met een pijltje. Bepaal de drie snijpunten van de symmetrieassen met deze omgeschreven cirkel. Zo vind je de drie middelpunten van de 'drie cirkels'. De straal van de 'drie cirkels' is de straal van de ingeschreven cirkel van de grote driehoek. Teken de 'drie cirkels'.

5. Teken een cirkel met als middelpunt het snijpunt van de drie constructielijnen, die door het punt gaat dat aangegeven is door twee pijltjes. Raakt deze cirkel aan de drie cirkels? Dan heb je de 'kleine cirkel' van de Harlekijn gevonden.

   < Denk hierover na: waarom heeft de kleine cirkel bovengenoemd middelpunt en straal?

6. Verwijder nu de lijnen die je voor de Harlekijn niet nodig hebt.

7. Kleur de oppervlakken in. Laat die oppervlakken wit waar het graan blijft rechtop staan.

Voordat de leerlingen aan de tekenopdracht beginnen moeten ze eerst op een vraag antwoorden, die ik aan elk van hen persoonlijk stel. Namelijk, "geloof jij écht dat je de geziene eigenschappen van vorige lessen nodig hebt om de Harlekijn goed te kunnen construeren?". Hierbij wordt onder 'goed' verstaan dat de 'kleine cirkel' zal raken aan de 'drie cirkels' wanneer je hem construeert op de wijze die op het opgaveblad wordt beschreven (punt 4. van de tekenopdracht).

Eén leerling (B6) durft toegeven dat hij al de geziene eigenschappen niet nodig denkt te hebben. Hij wordt uitgedaagd om het dan zo te proberen. Hij zet zich apart van de rest. Zoals verwacht, slaagt hij niet in de proef van de kleine cirkel. Bij hem raakt deze aan twee zijden, maar is wel 4 cm van de derde zijde verwijderd. Hij startte met de constructie van de grote cirkel. Daarin tekende hij een grote driehoek. Daar liep het al fout: zijn driehoek was allesbehalve gelijkzijdig. En het ging van kwaad naar erger.

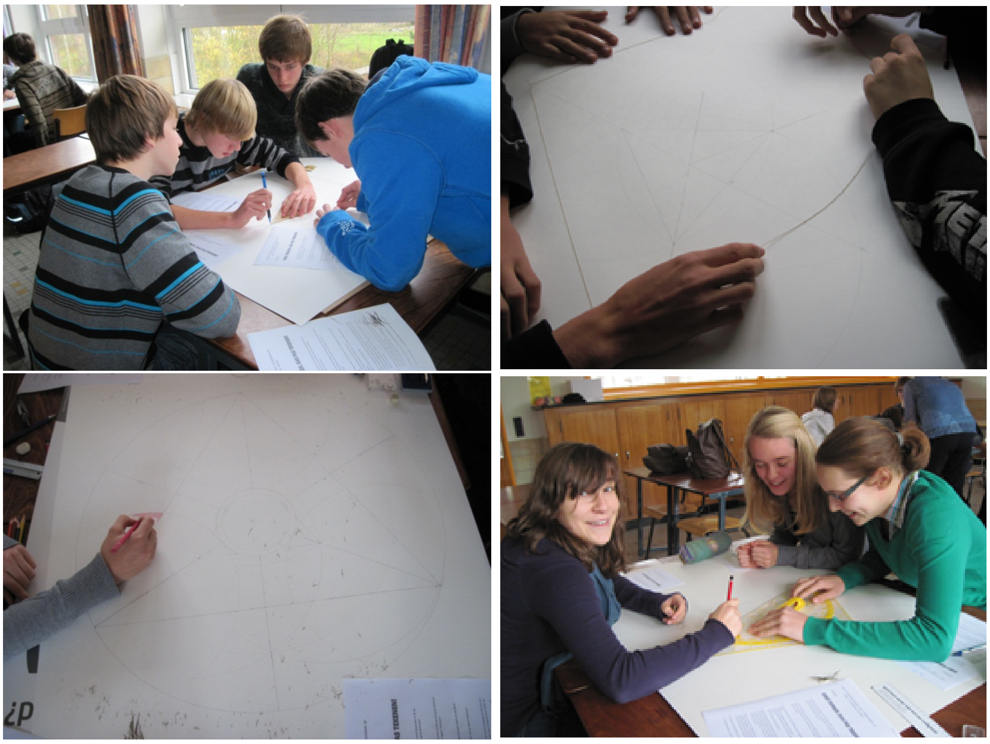
Figuur 9.1: Leerling B6

De rest van de klas volgt de procedure op het opgaveblad. Ook zij worden uitgedaagd: ze moeten bij elke stap kunnen uitleggen waarom deze verantwoord is. Daartoe dienen de vraagjes van het opgavenblad. Drie van de vier groepen lukken in de proef. De laatste groep was nog niet volledig klaar. Het construeren van de cirkels en lange lijnen verliep bij hen niet zo vlot: dit moest met koord en spelden gebeuren. Uiteindelijk volgt een bespreking van de resultaten.

Van al deze lessen worden geluidsopnames gemaakt. Deze bevinden zich in bijlage B.2.4. In bijlage B.7.1 worden relevante stukken uit de lessen beschreven.

9.3 Interviews na het geven van de lessenreeks

Een week na het geven van de lessenreeks worden drie leerlingen uit 4D1E geïnterviewd. Tijdens een semi-gestructureerd interview van ongeveer een uur zal ik nagaan of mijn pogingen om de kijk van de leerlingen op meetkunde te voeden, vruchten hebben afgeworpen. Hiervoor zal ik niet alleen onderzoeken of er een verandering is opgetreden in de verschillende aspecten van EK 2, 3c, 4, 5, 7' b en e, 10 en 13d. Ook zal ik aan de leerling zelf vragen waaraan deze



Figuur 9.2: de tekenopdracht

verandering volgens hem te wijten is. Hieronder beschrijf ik de drie problemen die aan elke leerling voorgeschoteld worden tijdens zijn interview.

Probleem 1. Hoe moet een geitje vastgemaakt worden door de boer opdat het een bepaalde vorm van grasland zou kunnen afeten? (figuur 9.3)

Probleem 2. De omtrekshoek op een middellijn van de cirkel.

Probleem 3. Waar maakt een smoutebol vetvlekken op de papieren puntzak waarin hij zit?

Een volledige beschrijving van de opdrachten uit deze interviews met hun modelantwoorden staat in bijlage B.8.1

De geluidsopnames van deze interviews zitten in bijlage B.2.5.

9.4 Commentaar door Els Vanlommel na het geven van de lessenreeks te Berlaar

9.4.1 Mail van Els na de lessenreeks op 28/11/2010

In een mailtje vroeg ik Els naar reacties van de leerlingen op de lessenreeks die ik de week ervoor gegeven had. Zij antwoordde als volgt:

> Ze vonden het plezant, dat hebben ze duidelijk laten horen. Ze merken een groot verschil in de aanpak want ze zegden bij het begin van de les: “ah ja, nu hebben we terug gewone wiskunde”.

Figuur 9.3: geitje

Zelf heb ik de indruk dat ze meer doordrongen zijn van het 'deductieve' gegeven in wiskunde. Ze gaan nu zelfs soms te ver terug in hun verklaringen ;-) Dit zal wellicht een tijdelijk effect zijn (zoals altijd wanneer je een gedragswijziging probeert te bekomen), maar toch: als ze op die manier regelmatig op het belang van theorie en deductie worden gewezen, kan het op termijn niet anders dan dat dit vlotter zal gaan.

Ik weet niet of dit duidelijk is, maar zal dit wel verduidelijken als ik je nog spreek.

Groeten

Els

9.4.2 Gesprek met Els na de lessenreeks

(eind december 2010)

Enkele weken na het geven van de lessenreeks nodig ik Els Vanlommel uit voor een kort gesprek. Aan de hand van nota's die ze tijdens de lessenreeks maakte, vertelt Els mij wat haar bedenkingen zijn bij de gegeven lessen. Een geluidsopname van dit gesprek bevindt zich in bijlage B.2.6. Hieronder vat ik de belangrijkste punten samen.

Deductief redeneren. "Het experiment is zinvol geweest want ik merk dat er bij de leerlingen vooral rond het deductief werken iets is blijven hangen, en dat was toch het grote punt. Ik heb het gevoel dat ze daar toch bewuster mee bezig zijn. Ik merkte dit op bij het zien van bewijzen — en dat ging dan niet over meetkunde maar over functies.

Sommige leerlingen willen deductief redeneren wel te ver terug doortrekken. Soms vanuit onzekerheid. Tijdens de analyselessen merkte ik op dat de houding van bijvoorbeeld leerling B11 veranderd is. Ik zie dit als een tijdelijk fenomeen, dat echter wel een attitude kan worden door te herhalen. Dat merk je vaak als je op een item de nadruk legt, tijdelijk heeft dat een effect, maar wanneer je dat niet meer herhaalt, verdwijnt dat."

De geest van een bewijs. "De geest van een bewijs is van belang, maar voor een examen moeten de leerlingen een bewijs correct kunnen verwoorden en noteren. Voor leerlingen is dat moeilijk. Het opschrijven kunnen ze niet, en dat wordt net op een examen gevraagd. Een mondeling examen is het overwegen waard. Maar je moet ook aandacht besteden aan het opschrijven. Hoe kan je dat doen en toch het bovengenoemd evenwicht bewaren? Misschien moet je aan de leerlingen duidelijk maken welke stappen er zijn. Zodat ze zien dat het opschrijven, het formaliseren de eindstap is. Je zou kunnen een schema voorstellen aan de leerlingen van hoe een bewijs wordt opgesteld, hoe een bewijs ontstaat. De laatste stap daarbij zou dan het opschrijven zijn, het formaliseren. Na noteren en formaliseren kan je nog eens terug naar de clou gaan. Zo leren de leerlingen hoe ze moeten studeren. Alles wat leerlingen gebruiken in een bewijs moet vooraf gedefinieerd zijn, daar maken leerlingen veel fouten tegen, en bij het formaliseren is dat het belangrijkste."

Bij het kringgesprek. "Iedereen heeft zijn eigen leerstijl. Sommige leerlingen hebben het nodig van te kunnen schrijven terwijl ze denken. Dat structureert tegelijk de gedachten. Sommigen hebben dat niet nodig. Goed bij het kringgesprek was dat de leerlingen uit hun gewone context gehaald werden. Ze mogen dan misschien wel iets hebben om te noteren. Maar het was positief omdat het de aandacht vestigde op de herkenbaarheid van wiskunde in het dagelijks leven. Bovendien werd er zo apart aandacht gegeven aan het nadenken over de aanpak, en dat gebeurt niet wanneer de leerlingen achter een bank zitten: dan beginnen ze eerder te rekenen. Ik vond het knap. Het was op een bepaald moment enkel denken en redeneren."

Het gebruik van logische schema's. "Ik vind logische schema's heel goed. Ik ben daarover aan het denken, hoe ik daar zelf mee kan gaan werken. Want je moet voor alles wel nagaan welke tijd het vraagt. Schema's moeten door de leerlingen gemaakt worden, ze moeten correct zijn en nagekeken worden, ze moeten aangevuld worden als er een nieuwe eigenschap bijkomt enzovoort.

Die logische schema's zijn zeker zinvol, maar nu worden ze zowat gedropt. Normaal bouw je zoiets op. Wanneer de leerlingen dit tijdens de duur van een heel jaar kunnen aanleren, dan wordt het voor hen een werkinstrument."

Het Harlekijnprobleem. "Ik denk dat het goed was van met graancirkels te werken. Het maakte dat de leerlingen meer betrokken waren bij de lessen. Het verwees goed naar de beliefs over toepassen in het dagelijks leven. En door het Harlekijnprobleem kwamen de leerlingen in aanraking met praktische problemen. Want op een tekenblad ligt het voor de hand dat je bijvoorbeeld een tekendriehoek gebruikt. De context dwingt de leerlingen ertoe om rekening te houden met de praktische problemen en dit denk dat dit toch wel belangrijk is.

Misschien moet je de leerstof beperkter houden, zodat je meer aandacht kan geven aan de beliefs. Wat je bijvoorbeeld zou kunnen doen is slechts een stuk uit de constructie geven. Of met behulp van Cabri de constructie op het einde van de les eens vlug tonen. Dat hoeft maar een kwartiertje of zo te duren, en is een goede afsluiter van de lessenreeks. Dan antwoord je op de vraag van het begin: kan de Harlekijn geconstrueerd worden? Je komt bij de totale constructie van de Harlekijn uit, ook al zag je tijdens de lessenreeks maar een deelprobleem. Wanneer je er een deelprobleem uitpikt kan je meer aandacht geven aan het werken met een logisch schema of aan het opschrijven van bewijzen. Want dat is voor leerlingen toch wel belangrijk. Deductieve bewijzen maken vergt oefening."

De constructieopdracht van de laatste les. Het construeren achteraf was voor de zwakkere groepen zinvol, het was voor hen een zelfbevestiging.

Hoofdstuk 10

Retrospectieve fase van het onderzoek te Berlaar. Verwerking van de gegevens

10.1 Planning van de retrospectie op het onderzoek in Berlaar

Voor de retrospectie volg ik de richtlijnen van Drijvers (5.1.3) en zal ik in dit hoofdstuk de verkregen gegevens verwerken, om ze in hoofdstuk 11 te interpreteren in het kader van de vooropgestelde onderzoeksvraag.

In dit hoofdstuk worden de gegevens verwerkt die verkregen werden tijdens het vooronderzoek of voor, tijdens en na het lesexperiment. Hoe deze gegevens verkregen werden, en waaruit ze bestaan, staat beschreven in hoofdstukken 8.2 en 9. Het verwerken van deze gegevens betekent bijvoorbeeld het uittypen van de geluidsopnames van de interviews en van de gegeven lessenreeks. Om een waarde toe te kennen aan de beliefs vanuit gedane uitspraken leerlingen, worden codes gegeven aan beliefs, en ook aan de antwoorden van de leerlingen. Aan de hand van deze codes wordt dan een cesuur opgesteld, en een waarde toegekend aan de beliefs die tijdens het onderzoek bij de leerlingen bleken.

Vijf mogelijke waarden worden gegeven: − −, −, 0, + en + +. Aan de cesuur van een EK ken ik de waarde 0 toe. Geeft een leerling blijk van een zeer goede kijk op de onderzochte kwestie, krijgt hij een + +. Indien zijn kijk op de kwestie gewoon goed is, krijgt hij een +. Een − − verdient de leerling wanneer zijn kijk tegengesteld is aan wat hij moet zijn of zeer slecht. Hij verdient een − wanneer zijn kijk op de zaak slecht is. Een * betekent dat de leerling over het betreffende onderwerp niet werd ondervraagd.

10.2 De verwerking van de gegevens uit het klassikaal experiment te Berlaar

Dit betreft de verwerking van de gegevens uit het experiment dat beschreven wordt in 8.2.1. Tijdens dit experiment werden door mezelf markante dingen genoteerd. Op basis daarvan maakte ik achteraf dit verslag.

10.2.1 Resultaten van het experiment

Tegen mijn verwachtingen in verliepen beide opdrachten heel vlot. Wel bleken er in elke groep één of twee leerlingen de boventoon te voeren. Het waren waarschijnlijk ook sterkere wiskundeleerlingen, want hun redeneringen waren foutloos. Toch merkte ik soms op dat enkele leerlingen tegensputterden bij te ingewikkelde redeneringen. Een leerling suggereerde bij de constructie van de cirkel rond het sjaaltje, om allemaal in het midden te gaan staan, en daarna achteruit te stappen. Gelukkig lag er wat snoep onder het sjaaltje, zodat de anderen gemotiveerd waren om toch wat nauwkeuriger te werken.

De constructie van het middelpunt van de omgeschreven cirkel bracht ook wat deining met zich mee. Hoewel het juiste voorstel vrij snel door een leerling gedaan werd, waren de anderen toch niet echt bereid om zoveel werk te doen. Ze dachten dat de constructie van de middelloodlijn sneller en makkelijker kon.

In de eerste groep konden ze door argumenten van nauwkeurigheid wel overhaald worden om de middelloodlijnen te construeren met koord en krijt. De vermoeidheid van het uurtje turnen speelde waarschijnlijk mee bij de tweede groep. Eén van de jongens hieruit bleef immers hardnekkig volhouden dat deze constructies véél te lang zouden duren, en dat hij het gezochte middelpunt sneller kon vinden door gewoon te meten. Ik heb het hem dan maar laten doen.

Tegelijkertijd heb ik wel een drietal leerlingen gevraagd om het middelpunt met koord en krijt te zoeken. Dit bleek een juiste beslissing, want gelukkig waren de drie leerlingen eerst klaar. De jongen probeerde door zijn afstanden steeds wat aan te passen, een punt te vinden dat even ver van de drie gegeven kruisjes lag. Hij was er volgens eigen zeggen bijna, toen de anderen de oplossing vonden.

10.2.2 Besluiten uit het experiment

Een beetje teleurgesteld in mijn eigen klassikale aanpak, besloot ik voor de rest van de thesis zeker de leerlingen individueel te ondervragen. Ik heb wel kunnen zien wat de groepsleider dacht, maar niet voldoende wat de anderen dachten. En ik heb wel wat gezichten gezien die soms leken te twijfelen. Ook wel een opmerking over het waarom van deze wiskundige aanpak tijdens de turnles. Hier had ik graag dieper op ingegaan.

Ook maakte ik het voornemen om duidelijk aan bod te laten komen waarom in de euclidische meetkunde met passer en liniaal gewerkt wordt. Omwille van de uitgestrektheid van een speelplaats is het mogelijk een cirkel en andere figuren erg groot te tekenen, waardoor het overzicht hierop voor de leerlingen verloren gaat. Dit is een goed argument om op de eigenschappen van figuren een beroep te doen, of ze in het leven te roepen. ‘Ten velde’ lijkt mij de natuurlijke context om lessen euclidische meetkunde in te leiden.

Tenslotte bleek dat de kennis van de leerlingen over de cirkel wel in orde was. Bovendien gebruikten ze deze kennis dadelijk in een nieuwe context.

Over hun kijk op wiskunde, of meetkunde in het bijzonder ben ik door deze gezamelijke aanpak niet veel te weten gekomen.

10.3 De verwerking van de gegevens uit de van Hiele test in 4D1E

10.3.1 Op 25 oktober 2010 ging ik via een schriftelijke test na of het tweede Van Hiele denkniveau bereikt is voor de leerlingen van 4D1E te Berlaar.

Vraag	1	2	3	4	5
−−	0	4	3	3	0
−	2	8	4	3	5
0	10	1	6	10	6
+	2	0	4	1	1
++	3	2	0	0	5

Tabel 10.1: De resultaten van de Van Hiele test te Berlaar

10.3.2 Om de antwoorden uit deze tests te verwerken, *codeer ik eerst de antwoorden op de vijf vragen uit de van Hiele test*. Dit gebeurt in bijlage B.4.2.

Voorbeeld: Aan het meten van de hoeken of zijden van de getekende figuur in opdracht 1, wordt een code 1a gegeven. Het kennen van de definitie van parallellogram en rechthoek krijgt code 2c.

10.3.3 *Aan elke vraag wordt een waardeoordeel toegekend op basis van deze codering.* Het toekennen van deze waardeoordelen gebeurt ook in bijlage B.4.2.

Voorbeeld: Een leerling die gegevens en te bewijzen omkeert in opgave 2 krijgt een −− (2a). Beseft de leerling wat gegeven en te bewijzen is (2b) en kent hij bovendien de definities van parallellogram en rechthoek (2c) dan krijgt hij een + voor opdracht 2.

10.3.4 *De resultaten van de test* voor de 17 leerlingen van 4D1E worden in tabel 10.1 beschreven.

De tabel geeft per vraag weer hoeveel leerlingen uit 4D1E een bepaalde score haalden.

10.3.5 *Besluiten uit de Van Hiele test*

De meeste leerlingen uit 4D1E (namelijk 15 van de 17) scoren 0 of meer op vraag 1. Dit betekent dat de meeste leerlingen een figuur correct kunnen beschrijven. Uit de oplosing voor vraag 2 blijkt dat slechts twee van de 13 leerlingen beseffen wat gegeven en te bewijzen is in deze opdracht. Het herkennen van een definitie of een stelling op basis van de logische formulering gebeurt door 10 van de 17 leerlingen met 1 foutje. Elf van de 17 leerlingen slagen erin om een logisch schema op te bouwen waarin niet meer dan 1 fout zit. Twaalf leerlingen geven van de stelling van Pythagoras een juiste logische formulering.

Uit de Van Hiele test mag tenslotte afgeleid worden dat het tweede denkniveau voor de meeste leerlingen van 4D1E bereikt is. Ze herkennnen meetkundige vormen en hun eigenschappen. Ook kunnen ze een formele redenering begrijpen. Zelf een bewijs opstellen vanuit premissen is nog moeilijk. De leerlingen beseffen niet wat gegeven en gevraagd is in een formulering.

10.4 De verwerking van de gegevens uit de lesobservaties en mini-interviews in 4D1E

10.4.1 Om de algemene kijk van de leerlingen van 4D1E vast te stellen, werden tijdens de lessen algebra van zeven leerlingen uit deze klas mini-interviews afgenomen. Dit experiment werd beschreven in 8.2.3. In bijlage B.5.3 *schrijf ik relevante klasdiscussies of gesprekjes uit.*

10.4.2 De algemene kijk op wiskunde zoals beschreven in 3.3.3 wordt verfijnd in deelaspecten en toegepast op de euclidische deling. In bijlage B.5.1 *krijgen deze deelaspecten van de AK's een code.*

Voorbeeld: Het mooi vinden van een oplossingsmethode of bewijs krijgt code AK1a. Het al dan niet geloven in een meerwaarde van samenwerken in wiskunde krijgt code AK6a.

10.4.3 Aan de hand van deze codes voor de deelaspecten van de AK's wordt in bijlage B.5.2 een *waardeoordeel toegekend aan de antwoorden* van de leerlingen tijdens de mini-interviews.

Voorbeeld: Vindt een leerling een wiskundebewijs elegant of mooi (AK 1a), dan krijgt hij een + voor AK 1. Ziet een leerling het esthetische van wiskunde niet in (AK 1a), dan krijgt hij een 0 voor AK 1.

Resultaten van de mini-interviews zijn:

Leerling	B6	B8	B5	B4	B2	B14	B9
AK 1	0	+	-	*	*	0	+
AK 2	0	+	*	*	*	*	*
AK 3	-	0	++	0	+	0	*
AK 4	*	*	+	*	*	*	+
AK 5	*	*	-	+	+	*	*
AK 8	*	*	++	*	*	*	*
AK 9	*	*	++	*	*	*	*
AK 10	-	+	0	*	*	*	*

Tabel 10.2: De resultaten van de mini-interviews te Berlaar

10.4.4 *Besluiten uit de mini-interviews en de lesobservaties:* Niet elke AK werd hier grondig onderzocht. Niet voor alle leerlingen heb ik resultaten. Ook ontbreken resultaten voor AK 6 en 7 volledig. Maar niet getreurd, de EK's lijken mij belangrijker dan de AK's omdat ze concreter zijn. En zij moeten nog onderzocht worden.

Toch zal ik — uit de gegevens die ik hier over de AK's verzamelde en uit de observaties — enkele besluiten trekken. De leerlingen kennen de schoonheid van een wiskundige theorie niet. Ook beseffen ze niet volledig de keuzevrijheid in notaties. Geloven ze wel echt dat bewijzen nodig zijn? Ze zien het belang van leren denken wel in. Wiskunde valt voor hen niet uit de hemel. Samen wiskunde doen en leren uit elkaars werkwijzen, doen ze te weinig. Ze weten wat begrip is, en dat wiskunde tijd vraagt. Maar ze hebben nog niet echt een zicht op wat wiskunde juist is.

10.5 De verwerking van de interviews die vóór het geven van de lessenreeks werden afgenomen in 4D1E

10.5.1 Uittypen van de interviews

Om de kijk van de leerlingen van 4D1E op meetkunde vast te stellen, werden tijdens de middagpauzes op 21, 22 en 25 oktober 2010 in Berlaar van drie leerlingen een persoonlijk interview afgenomen. Dit experiment werd beschreven in 8.2.4.

In bijlage B.6.2 werden de drie interviews die afgenomen werden van leerlingen uit 4D1E voordat de lessenreeks gegeven werd, volledig uitgetypt. Markante uitspraken of handelingen werden met geel gemarkeerd.

10.5.2 Omschrijving en codering van de EK's en hun deelaspecten die getest worden in de interviews vóór de lessenreeks

Tijdens de verwerking van deze interviews merkte ik op dat een aantal van de opgesomde meetkundevisies overlappen met een andere. De euclidische kijk EK1 bijvoorbeeld, wordt geconcretiseerd in EK 4 en 5. Daarom zal EK 1 tijdens de interviews niet meer ter sprake gebracht worden. De aandacht zal uitgaan naar EK 4 en 5. EK 6 a en b worden behandeld als deelaspecten van EK 4 en 5. De EK's 7 en 8 worden samengevat in EK 7'.

Andere EK's — namelijk EK 9, 11 en 12 — lijken mij niet essentieel voor het vinden van een oplossing voor een meetkundig probleem. Daarom zal ik ze voorlopig niet meer beschouwen. De EK's die ter sprake zullen komen tijdens deze interviews zijn dus EK 2, 3, 4, 5, 7', 10, 13 en 14.

Uit de antwoorden die de leerlingen tijdens de interviews gaven, bleek dat een onderverdeling in deelaspecten van deze EK's wenselijk was. Ik maakte deze onderverdeling, waarbij ik deelaspecten van een EK aangeef met de letters a, b, c, enzovoort. Dit beschrijven van deelaspecten gebeurt vanuit de vooropgestelde codering van de EK's zoals aangeduid in 3.4.7. Deze wordt voortdurend aangepast vanuit de vaststelling van onverwachte uitspraken die tijdens de interviews door de leerlingen gemaakt worden. Dit resulteert in de omschrijving van de EK's hieronder.

EK2. De euclidische ruimte —het euclidisch vlak— vertoont verschillen met onze leefruimte —het fysisch vlak—

a.
1. In de euclidische ruimte -vlak- worden objecten losgekoppeld van hun omgeving.
2. Kleur, geur en smaak worden irrelevant.
3. Onvolmaakte vormen worden volmaakt.
4. Niets wordt in perspectief gezien, wel in ware grootte en vorm.
5. Elke richting is gelijkwaardig.
6. Bij het verplaatsen van figuren in een euclidische ruimte treden geen vervormingen op: hoeken, afstanden blijven bewaard.
7. Meetkundige figuren hebben geen dikte.

b.
1. Een schets is steeds een onvolmaakte voorstelling van een meetkundige figuur, omdat de nauwkeurigheid nooit groot genoeg is.
2. Een schets is steeds een onvolmaakte voorstelling van een meetkundige figuur, omdat de lijndikte nooit fijn genoeg is.

EK3. Deductie is een doeltreffende en gerichte manier om een probleem op te lossen

a. Gissen en missen leidt niet snel genoeg tot een bevredigende oplossing.
b. Door te zoeken naar tegenvoorbeelden kan je een idee krijgen over de nodige voorwaarden waaronder een eigenschap zal gelden.
c. Door te vertrekken van het gevraagde kan je op deductieve wijze informatie vergaren die de oplossing dichterbij brengt.

EK4. Definities zijn niet willekeurig gekozen, maar beschrijven een zinvolle realiteit waarvan ze de essentiele kenmerken opsommen

a.
  1. Definities kunnen zelf geformuleerd worden. Ze staan voor een werkelijkheid.
  2. De formulering van een definitie moet niet gememoriseerd worden.
  3. De formulering van een definitie moet in het logische definitieschema van Euclides passen.
  4. De logische vorm van een definitie is een equivalentie: een definitie is een nodige en voldoende voorwaarde voor een object om tot een bepaalde klasse van wiskundeobjecten te behoren (een “als en slechts als”).

b. Voor een begrip kan vaak één of meer alternatieve definities gegeven worden.
c.
  1. Aan de hand van een definitie moet nagegaan kunnen worden welke objecten aan de gestelde eisen voldoen en welke niet.
  2. Definities zijn vaak een vertrekpunt voor nieuwe eigenschappen.

d. Het logisch definitieschema verdiept het inzicht in de oorsprong van een definitie.

EK5. Stellingen zijn beweringen over de gedefinieerde objecten die zelf geformuleerd kunnen worden

a.
  1. Een stelling kan door mezelf gevonden worden.
  2. Een stelling moet juist zijn in elke mogelijke situatie.

b.
  1. Bij het formuleren van een stelling is het logisch verband tussen de verschillende zinsonderdelen van belang. Wat premisse is en wat gevolg moet duidelijk weergegeven worden.
  2. Bij de formulering van een stelling helpt de formulering van de stellingen uit de voorkennis.
  3. Elke stelling heeft haar plaats in het logisch eigenschappenschema.
  4. De formulering van een stelling in het schema is juist en logisch.

c. Wiskundetaal verschilt van de dagelijkse omgangstaal.
d. Zekerheid omtrent de geldigheid van een stelling vraagt om een bewijs.
e. Een tegenvoorbeeld van een stelling weerlegt deze stelling.

EK7’. Een bewijs voor een stelling kan zelf gevonden worden

a. Een bewijs is een logische opeenvolging van waarheden, die vertrekken van het gegeven en leiden naar het beweerde.

  1. Het is belangrijk om zelf bewijzen te maken, het is een denkoefening.
  2. Ik kan zelf een juist bewijs maken.

b. Een bewijs in woorden is een volwaardig bewijs.

c. Een bewijs mag niet steunen op een schets. Plato eiste de schets-onafhankelijkheid van beweringen opdat ze 'waar' zouden zijn.

d.
1. In een bewijs is de geest van het argument belangrijker dan het formalisme. De 'clou' van het bewijs moet duidelijk zijn.
2. Doel van een bewijs is de lezer te overtuigen van de waarheid.
3. Een schets kan inspiratie geven om de idee van een bewijs te ontdekken.

e.
1. Om een bewijs te vinden moet je nadenken over wat gegeven is en wat te bewijzen.
2. Een bewijs vinden vereist nadenken over de strategie.
2' Je moet gaan zoeken tussen geziene eigenschappen. Hierbij kan een logisch schema helpen.
3. Een bewijs vinden vereist nadenken over de bruikbaarheid van gekende eigenschappen.
4. Om na te gaan of een uitspraak bruikbaar is in een bewijs kan je haar inhoud nagaan en zien of ze bijvoorbeeld handelt over hetgeen je wil gaan bewijzen.
5. Wanneer je een reeks bruikbare uitspraken hebt gevonden, moet je deze kunnen verantwoorden vanuit je voorkennis.
6. De ware uitspraken die relevant zijn voor het bewijs moeten in een goede logische volgorde gezet worden.

EK10. De euclidische meetkunde is meer dan het verzamelen van wiskundige kennis

a. De historiek van de meetkunde geeft heel wat informatie over haar deductieve werkwijze:
1. Wat zijn definities, stellingen, axioma's, postulaten?
2. Wat is een bewijs?

b. Filosoferen zoals de voorgangers van de euclidische meetkunde geeft een inzicht in de denkwijze van deze meetkunde.
1. Om een probleem juist te kunnen mathematiseren is een beetje filosofie over meetkundige objecten nodig. Een meetkundig object is een abstractie van een bestaand object.
2. Waarom moet een stelling bewezen worden?
3. Waarom worden definities gegeven, ook al weet iedereen wat bedoeld wordt?
4. Wat mag je uit een schets aflezen, en waarom is dat zo?
5. Waarom gebeuren constructies met passer en liniaal?

EK13. Euclidische meetkunde kent veel practische toepassingen

a. De geziene definities en stellingen zijn bruikbaar bij toepassingen in de wiskundeles.

b. De geziene definities en stellingen zijn bruikbaar bij toepassingen in andere vakken. Er zijn vakoverschrijdende verbanden van meetkunde met inhouden uit de lessen Exploratie (landmeten), Aardrijkskunde (aardbevingen), Fysica (kinematica), Nederlands (verwoorden van stellingen, werkwijzen, enz.).

c. De geziene meetkunde is bruikbaar in onze maatschappij: bij toepassingen in landmeetkunde, kunst,...

d. De geziene meetkunde is bruikbaar bij toepassingen in het eigen dagelijks leven.
1. Bij het mathematiseren van het probleem maak je wiskundige abstracties van reele objecten.
2. Op een schets stel je meetkundige objecten voor.

3. In het probleem kan je een euclidisch vraagstuk ontdekken.
4. Tijdens de oplossing van het probleem blijf je best niet plakken aan het realistisch probleem.
5. Voor een verklaring van je oplossing steun je best niet alleen op je gevoel.
6. De eigenschap die de verklaring voor het probleem biedt, is soms dadelijk te herkennen.
7. Er kan gezocht worden naar de oplossing van het abstract probleem door een meetkundige eigenschap te gaan zoeken, of een combinatie van eigenschappen.
8. Een geciteerde eigenschap moet bruikbaar zijn en bestaan inde voorkennis.
9. Of de bekomen oplossing mogelijk is bij het gestelde probleem, moet nagekeken worden.

EK 14. Wat kan je wel en wat kan je niet aflezen uit een euclidische schets?

a. Wanneer snijden lijnen op een schets?
b. Wanneer is een punt gelegen op een lijn?
c. Wanneer zijn lijnen op een schets evenwijdig?
d. Heeft bijgevoegde tekst voorrang op de schets?
e. Wat met gegevens die afleidbaar zijn uit andere gegevens?

10.5.3 Codering voor de uitspraken van de leerlingen

In samenspel met de codering van de meetkundevisies uit 10.5.2 wordt een codering voor de uitspraken van de leerlingen tijdens de interviews gemaakt. Aan uitspraken of gedragingen van de leerling worden in deze sectie codes toegewezen van de kijk op meetkunde die met de uitspraak of het gedrag correspondeert. In deel 2 van bijlage B.6 worden codes toegekend aan de uitspraken van de leerlingen in verband met EK 2, 3, 4, 5, 7', 10, 13 en 14.

Voorbeeld: Leerling B5 denkt dat er voor een definitie maar één mogelijkheid is. Dit wijst op een kijk op meetkunde die de code EK 4 b kreeg.

10.5.4 Vastleggen van een normering voor de evaluatie van de EK's

Om de kijk van een leerling te kunnen evalueren, moeten eerst per EK evaluatienormen vastgelegd worden. Aan elke van de onderzochte EK's (of een deelaspect ervan) wordt eerst een cesuur toegekend, waaraan ik een score 0 geef. Daarna worden de prestaties omschreven die een hogere (+ of + +) of lagere (– of – –) score geven. Globaal gesproken wordt een duidelijk tekort aan een bepaalde kijk op meetkunde weergegeven door –. Waar de kijk op meetkunde erg slecht is, wordt de score – – toegekend. Presteert de leerling beter op een EK dan de cesuur, dan krijgt hij een +. Een + + verdient hij indien zijn kijk op meetkunde zeer goed is. Hieronder werk ik de evaluatienormen uit voor elke van de geteste EK's.(EK 2, 3, 4, 5, 7', 10, 13 en 14).

EK 2. Cesuurbepaling: Indien de leerling beseft dat een meetkundig object ingebeeld is, en dus niet in de realiteit kan voorkomen, dan krijgt hij een 0.

- – – De leerling begrijpt wel dat vervormingen ontstaan op een foto door het perspectief. Een dunne lijndikte voor een schets is volgens hem nodig om een goede schets te kunnen maken. Constructies met passer en liniaal zorgen volgens de leerling voor een optimale representatie.(EK 2a.1)
- – De leerling gelooft dat je meetkundige vormen nooit nauwkeurig genoeg kan voorstellen. (EK 2b.1 of 2)
- 0 De leerling beseft dat een meetkundig object een abstractie is van een realistisch object.
- + De leerling gelooft dat meetkundige objecten enkel in onze denkwereld bestaan. (EK 2c.1)
- ++ De leerling beseft dat een schets slechts een gebrekkige materiële voorstelling is van een ideaal object, dat eigenlijk niet voorgesteld kan worden. (EK 2c.2)

EK 3. Cesuurbepaling: De leerling krijgt de score 0 indien hij één of meerdere schetsen maakt en dan op zoek gaat naar een theoretische verklaring.

- – – De leerling werkt alleen empirisch. (EK 3a)
- – De leerling werkt vooral empirisch. (EK a)
- 0 De leerling denkt eerst na, maakt enkele schetsen en gaat op zoek naar een theoretische en deductieve verklaring. (EK 3a en b)
- + De leerling zoekt eerst in zijn voorkennis voordat hij uitspraken doet. (EK 3c)
- ++ De leerling vindt bruikbare eigenschappen die tot een juiste of foute deductieve redenering leiden. (EK 3c)

EK 4. Cesuurbepaling: De leerling moet voor het krijgen van de 0-score beseffen dat een definitie één van de mogelijke beschrijvingen is van een object, die een object volledig vastlegt.

- – – De leerling denkt dat hij zelf geen definitie kan formuleren. (EK 4a.1)
- – De leerling formuleert zelf een definitie als nodige voorwaarde of als voldoende voorwaarde. (EK 4a.4)
- 0 Een kenmerk van een object is een alternatieve definitie voor dat object. Een kenmerk beschrijft op alternatieve wijze de eigenschappen die een object moet hebben om aldus genoemd te mogen worden. (EK 4b en c)
- + De leerling ziet in dat de logische formulering van de definitie met een als en slechts als gegeven wordt. (EK 4a.4)
- ++ De leerling begrijpt dat een meetkundige figuur wordt gedefinieerd door het uitdrukken van een voorwaarde voor de punten van deze figuur. Deze eigenschap is voor elk punt van de figuur dezelfde. (EK 4e)

EK 5. Cesuurbepaling: De leerling krijgt een 0 indien hij gelooft dat de gezochte stelling uit probleem 4 in elke mogelijke situatie juist moet zijn, en om een bewijs vraagt. Bovendien beseft hij hoe hij tewerk moet gaan voor de formulering van de stelling.

– – De leerling formuleert alleen een uitspraak voor het concrete deel van probleem 4. Hiermee gist hij naar een algemene stelling. Een bewijs ziet hij helemaal niet zitten. (EK 5a.1)

– De leerling gokt op basis van de gegeven schets naar een algemene stelling. Voor het bewijs hiervan gist hij lukraak naar bruikbare eigenschappen. (EK 5.2 of EK 5.4)

0 De leerling gelooft dat een stelling in elke mogelijke situatie juist moet zijn, en om een bewijs vraagt. Bovendien zoekt hij via verschillende schetsen op de extra voorwaarde waaronder een stelling van gelijke basishoeken geformuleerd zal kunnen worden. (EK 5b.1)

\+ De leerling formuleert de extra voorwaarde van gelijke opstaande zijden, en ziet in dat dit kan leiden tot de gelijkheid van de basishoeken van het trapezium door vroegere eigenschappen over congruente driehoeken te gebruiken. (EK 5b.2)

++ De leerling maakt een goede verdeling van het trapezium en kiest voor de goede congruentieëigenschappen zodat hij tot een bewijs kan komen van de stelling over de gelijke basishoeken van het trapezium. (EK 5b.2)

Tijdens het verwerken van de interviews bleek dat EK 7'b en 7'd los staan van elkaar. Daarom bepaal ik voor elk een aparte cesuur.

EK 7'b. Cesuurbepaling: Een leerling die een bewijs in woorden evenwaardig vindt aan een in symbolen, krijgt een 0.

– – De leerling vindt een bewijs in symbolen beter, en inzichtelijker.(EK 7'a, d)

– De leerling vindt een bewijs in symbolen makkelijker om te noteren, en vindt geen voordelen aan een bewijs in woorden. (EK 7'd 1,2)

0 De leerling vindt een bewijs in woorden en symbolen even veel waard. (EK 7'a)

\+ De leerling heeft een lichte voorkeur voor een bewijs in woorden. (EK 7'b,d)

++ De leerling ziet in dat een bewijs in woorden beter het inzicht en de gedachtengang weergeeft dan een bewijs in symbolen. (EK 7'a, b,d)

EK 7'e Cesuurbepaling: Een leerling die een zelf gemaakte schets voor probleem 4 (deel 2) als inspiratiebron gebruikt, een hulplijn tekent om meer voorkennis te kunnen toepassen, en tussen deze voorkennis hoopt een bruikbare stelling te vinden, krijgt een 0.

– – De leerling steunt voor het bewijs op dingen die hij afleest in de schets zonder dat ze gegeven zijn. (EK 7'c)

– De leerling leest het gevraagde af uit de schets, maar zoekt naar een verantwoording via een of andere (eventueel imaginaire) eigenschap. (EK7'd.2)

0 De leerling gebruikt de schets als inspiratiebron. Hierbij trekt hij lukraak enkele hulplijnen. Zo hoopt hij een verantwoording voor de stelling te vinden in de voorkennis die hij nu kan gebruiken. (EK 7'e.1)

\+ Hij construeerde een hulplijn die hem nuttige voorkennis verschaft. De leerling gist en mist bij het opnoemen van eigenschappen die een bewijs zouden kunnen vormen voor de stelling. (EK 7'e 1 en 2)

++ De leerling steunt voor het bewijs op zijn voorkennis. Hij construeert aan de hand van de schets een hulplijn, die hem toelaat in de eigenschappen van driehoeken te gaan zoeken naar een ware uitspraken. Hieruit selecteert hij degenen die hem relevant lijken. Hij controleert of hij de stelling bewezen heeft. (EK 7'a en e.1,2,3)

EK 10. Cesuurbepaling: De leerling krijgt een 0 wanneer hij gelooft dat voor een stelling een bewijs moet gegeven worden, en dat hij een stelling niet zomaar uit een schets mag afleiden.

– – De leerling is duidelijk niet geïnteresseerd in historiek of filosofische gedachten.

– De leerling begrijpt niet waarom een bewijs nodig is of waarom je niet alles van een schets mag aflezen.

0 De leerling gelooft dat hij voor een stelling steeds een bewijs moet geven, en dat hij niet alles uit een schets mag aflezen.

\+ De leerling weet dat (door de invloeden van Aristoteles), bewijzen voor stellingen gegeven moeten worden, en dat (door Plato's filosofie) meetkundige figuren niet in realiteit bestaan.

++ De leerling kan de filosofische en historische beschouwingen uit de vorige lijn toepassen en uitleggen.

Tijdens de interviews komen de deelaspecten a, b en c van EK 13 bijna niet aan bod. Op basis van de gestelde vragen kan vooral een waardebepaling voor EK 13d gegeven worden. Daarom beschouw ik dit laatste deelaspect bij het vastleggen van een cesuur apart van EK13.

EK 13d. Cesuurbepaling: De leerling krijgt een 0 wanneer hij het gegeven probleem voorstelt door een juiste schets en het probleem herformuleert in termen van meetkundige objecten. Bovendien moet hij op zoek gaan naar de oplossing van het abstract probleem door te zoeken naar een meetkundige eigenschap.

- – – De leerling ziet in het gegeven probleem niet een bruikbare abstractie.
- – De leerling maakt een meetkundige schets van de twee probleemsituaties, maar tijdens de oplossing van het probleem blijft hij plakken aan het realistisch probleem of hij verklaart het probleem vanuit zijn gevoel.
- 0 De leerling stelt het probleem voor door een juiste schets en hij herformuleert het probleem in termen van meetkundige objecten. Bovendien gaat hij op zoek naar een oplossing van het abstract probleem door een meetkundige eigenschap te gaan zoeken, of een combinatie van eigenschappen. (EK 13d.7)
- \+ De leerling gaat op zoek naar een bruikbare eigenschap. Hij overloopt één voor één de gekende eigenschappen zonder na te denken over de bruikbaarheid.
- ++ De leerling gaat op een deductieve wijze op zoek naar een bruikbare eigenschap. Hij kijkt zelf na of de geciteerde stelling een goede oplossing biedt of hem dichter bij de oplossing kan brengen.

EK 14. Cesuurbepaling: Wanneer een leerling een gegeven (op de schets aangegeven of als tekst) niet in rekening brengt, zie ik dit als vergetelheid en krijgt hij een 0. Op voorwaarde dat hij geen onterechte dingen afleidt uit de schets.

- – – De leerling leest onterecht gegevens af op een schets. (EK 14a1,b2,c1)
- – De leerling leidt onterecht dingen af die niet gelden. (EK 14a1,b2,c2)
- 0 De leerling vergeet sommige gegevens of afleidingen te maken.(EK 14d, e)
- \+ De leerling leest alleen terechte gegevens af. (EK 14a2,b1,c2,d)
- ++ De leerling leest alleen terechte gegevens af, en vergeet geen dingen af te leiden uit andere gegevens of tekst. (EK 14a,b,c,d,e)

10.5.5 Tenslotte moet de kijk van elke leerling op meetkunde geëvalueerd worden

Met behulp van de codering van de interviews en de evaluatienormen voor de EK's wordt voor elke leerling een waardeoordeel toegekend aan de beschouwde EK of een deelaspect ervan.

Voorbeeld: Leerling B5 krijgt op EK 7'b een – – want ze vindt een bewijs in woorden 'niet wiskundig'. Leerling B8 vindt een bewijs met lettertjes handiger. Hij verdient op EK 7'b een –. Ook leerling B9 krijgt op EK 7'b een – omdat ook zij een bewijs in symbolen overzichtelijker en makkelijker vindt om te onthouden. Op EK 7'e krijgt leerling B9 een 0 omdat ze lukraak werkt in haar hulplijnen alsook in het zoeken naar eigenschappen. Een uitwerking van deze evaluatie voor de geteste EK's wordt beschreven in bijlage B.6.4.

Samengevat geeft dit de volgende resultaten voor de kijk van de leerlingen van 4D1E op meetkunde:

Kijk op meetkunde	B5 (zwak)	B8 (sterk)	B9 (middelmatig)
EK 2	−−	+ +	−−
EK 3	−−	0	−
EK 4	−	+ +	0
EK 5	−−	+	0
EK 7’b	−−	−	−
EK7’e	−	+	0
EK 10	−	+	−−
EK 13d	−−	+	−
EK 14	−−	+ +	*

Tabel 10.3: Resultaten voor de kijk op meetkunde te Berlaar, voor de lessenreeks gegeven werd.

10.5.6 Besluiten uit de interviews over de euclidische kijk (EK) van de leerlingen

De leerlingen beseffen niet echt dat een meetkundig object een abstractie is van een realistisch object (EK2). Voor het oplossen van een probleem werken ze vooral empirisch en niet deductief (EK3). De leerlingen beseffen dat een definitie een object volledig vastlegt(EK 4). De leerlingen beseffen dat een stelling in alle gevallen moet gelden, maar niet dat ze om een bewijs vraagt (EK5). Ze verkiezen een bewijs in symbolen (EK 7’b) en gebruiken een schets als inspiratiebron voor een bewijs. Hierbij gaan ze lukraak op zoek naar hulpeigenschappen of hulpconstructies (EK7’e). De leerlingen begrijpen niet waarom een bewijs nodig is en waarom een stelling niet mag afgeleid worden uit voorbeelden(EK10). Leerlingen maken wel een juiste voorstelling van een probleem, maar lossen dan het abstract probleem niet op (EK 13d). Ze durven onterecht dingen uit een schets aflezen (EK 14).

Verdere aandacht is wenselijk voor alle geteste EK’s.

10.6 De verwerking van de geluidsopnames van de gegeven lessen in 4D1E

10.6.1 In bijlage B.7.1 worden *relevante stukken uit de lessen van de lessenreeks beschreven* en ook interessante uitspraken of antwoorden van leerlingen.

10.6.2 In deel 1 van bijlage B.7.2 geef ik een code aan de beschreven lesmomenten of uitspraken aan de hand van de opsomming van EK’s met hun deelaspecten uit 10.5.2.

Voorbeeld: In les 2 geeft leerling B8 een goede verklaring voor de gelijkzijdigheid van de kleine driehoek (EK 7’a’.2) en gaat hij naar de kern van het argument (EK 7’ d.1).

In les 3 beginnen alle leerlingen dadelijk met het tekenen van de drie middelloodlijnen van de gegeven driehoeken (EK 3a).

10.6.3 *Resultaten van de waardebepaling van verschillende EK’s tijdens de lessenreeks.*

Gebruikmakend van de codering van de lesmomenten uit bijlage B.7.2 en van de evaluatienormen voor de EK’s zoals beschreven in 10.5.4 ken ik nu een waarde toe aan verschillende EK's die tijdens de lessenreeks bij de leerlingen naar voor kwamen. Dit gebeurt in deel 2 van bijlage B.7.2. Uit deze codering blijkt dat vooral EK 3, 5, 7', 13 en 14 tijdens de lessenreeks aan bod kwamen. De andere EK's komen niet expliciet ter sprake.

Voorbeeld: In les 4 vind leerling B5 geen bewijs meer nodig voor de stelling over het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek, omdat er 35 voorbeelden zijn van situaties waarin de stelling geldt (EK 3a en b). De leerlingen scoren hier op basis van de evaluatienormen uit 10.5.4 duidelijk negatief voor EK3.

Samengevat in een tabel geeft dit als resultaten:

EK 2	+ +
EK 3	–
EK 5	0
EK 7'b	0
EK 7'e	–
EK 13d	+
EK 14	–

Tabel 10.4: Resultaten van de waardebepaling van verschillende EK's tijdens de lessenreeks.

10.6.4 *Besluit uit de codering van de lessen in B.7.2 en uit de lesbeschrijving B.7.1*

Tijdens de lessenreeks blijkt dat een aantal dingen voor de meeste leerlingen ondertussen duidelijk zijn geworden:

- **EK 2b 1 en 2.** Een schets is voor de leerlingen tijdens de lessenreeks steeds een onvolmaakte voorstelling van een meetkundige figuur, omdat de nauwkeurigheid nooit groot genoeg is en omdat de lijndikte nooit fijn genoeg is.
- **EK 5 a.1, c en d.** De leerlingen geloven dat een stelling door henzelf gevonden kan worden. Ze geloven dat wiskundetaal verschilt van de omgangstaal en beseffen dat zekerheid omtrent de geldigheid van een eigenschap vraag om een bewijs.
- **EK 7' c en e.2'.** Een bewijs mag niet steunen op een schets. Plato eiste de schets-onafhankelijkheid van beweringen opdat ze 'waar' zouden zijn. Je moet gaan zoeken tussen geziene eigenschappen.
- **EK 10 b 2,4 en 5.** Waarom moet een stelling bewezen worden? Wat mag je uit een schets aflezen, en waarom is dat zo? Waarom gebeuren constructies met passer en liniaal?
- **EK 13 a.** De geziene definities en stellingen zijn bruikbaar bij toepassingen in de wiskundeles.
- **EK 14 b.** De leerlingen geloven dat een punt op een kromme ligt wanneer dit expliciet zo is aangegeven.

EK 3. blijkt nog steeds niet duidelijk. De leerlingen zien niet in dat deductie een doeltreffende en gerichte manier is om een probleem op te lossen.

10.7 Verwerking van de interviews na de lessenreeks

10.7.1 Uittypen van de interviews

Na het geven van de lessenreeks wordt nagegaan of deze lessenreeks een gunstig effect had op de leerlingen door het experiment uit 9.3. De interviews met een zwakkere (leerling B1), een middelmatige (leerling B7) en een sterkere (leerling B10) leerling worden in bijlage B.8.2 volledig uitgetypt. Weer werden markante uitspraken erin met geel gemerkt.

10.7.2 Een omschrijving en codering van de belangrijkste meetkundevisies die tijdens de interviews getest worden met hun deelaspecten

Tijdens het vooronderzoek kwamen de meetkundevisies EK 2, 3, 4, 5, 7', 10, 13d en 14 aan bod. Een codering voor deze EK's bevindt zich in 10.5.2. EK 13d wordt aangevuld met de deelaspecten 10, 11 en 12.

EK13 d. wordt aangevuld met:

10. Een soortgelijk probleem kan ideeën geven voor de oplossing van het nieuwe probleem. Dit is het gebruik van een heuristiek.
11. Tijdens het oplossen van een probleem, volg je best de werkwijze van Pólya.
12. Een probleem oplossen vergt een planning en sturing.

10.7.3 Een codering van de uitspraken uit de interviews

Een codering van de uitspraken uit de interviews gebeurt per probleem in bijlage B.8.3.

Voorbeeld: Leerling B1 vertaalt de definitie van cirkel in de realistische situatie van probleem 1 (EK 13d.1). Leerling B10 legt goed uit bij probleem 1 dat wanneer een touw gespannen is, de afstand tot het paaltje constant blijft (EK 4a.1) en er een cirkel beschreven wordt (EK 4c).

10.7.4 Het toekennen van een waardeoordeel aan de verschillende EK's

Het toekennen van een waardeoordeel aan de verschillende EK's gebeurt in deel 3 van bijlage B.8.4 door gebruik te maken van de evaluatienormen voor de EK's zoals beschreven in 10.5.4. Over EK 3 werden niet echt gegevens verzameld. Daarom krijgen de drie leerlingen hiervoor een *.

De toekenning van een waardeoordeel aan EK 2 gebeurt bij de interviews van voor de lessenreeks zoals beschreven in 10.5.2. Tijdens de tweede reeks interviews moeten dus dezelfde aspecten van deze beliefs aan bod komen. Maar in probleem 2 uit deze interviews wordt alleen EK 2b.1 onderzocht. Dat is onvoldoende volgens de waardebeoordeling van de interviews voor de lessenreeks. Omdat EK 2a en c niet ondervraagd werden in de interviews, geef ik hier dus een *.

Voorbeeld: Leerling B1 krijgt voor EK7'b een + omdat ze het bewijs in woorden begint op te schrijven, en beweert dat het mag vermits ik het zelf in de lessenreeks heb gezegd. Leerling B7 beweert dat ze blij was te horen dat een bewijs in woorden mag, omdat woorden uitleggen wat je in symbolen opschrijft. Ze krijgt voor EK7'b een ++.

De resultaten voor de kijk van de leerlingen uit 4D1E op meetkunde na het volgen van de lessenreeks zijn samengevat in tabel 10.5

Kijk op meetkunde	Leerling B1	Leerling B10	Leerling B7
EK 2	*	*	*
EK 3	–	0	+
EK 4	*	*	*
EK 5	–	*	++
EK 7'b	+	++	++
EK 7'e	0	+	++
EK 10	+	++	++
EK 13d	–	0	++
EK 14	*	*	*

Tabel 10.5: Resultaten voor de kijk op meetkunde uit 4D1E te Berlaar, na het volgen van de lessenreeks

10.7.5 Besluiten uit de interviews over de euclidische kijk (EK) van de leerlingen op wiskunde

Een vergelijking van de resultaten uit tabel 10.5 met de normering van de EK's uit 10.5.4 levert de volgende besluiten in verband met de kijk van de leerlingen van 4D1E op meetkunde, na de lessenreeks. Over EK 2, 4 en 14 kunnen geen besluiten getrokken worden. De leerlingen zoeken niet naar de oplossing van een probleem door op deductieve wijze info te verzamelen (EK3). De formulering van een stelling gebeurt door de leerlingen wel algemeen, maar voor een bewijs wordt nog geraden naar bruikbare eigenschappen (EK 5). De leerlingen vinden een bewijs in woorden beter dan één in symbolen (EK7'b) en gebruiken een schets als inspratiebron voor een bewijs (EK 7'e). De leerlingen weten dat bewijzen voor stellingen gegeven moeten worden en dat meetkundige figuren niet in de realiteit bestaan (EK 10). Ze maken wel een juiste voorstelling van een probleem, maar lossen dan het abstract probleem niet op (EK13d).

10.8 Verwerking van de gegevens uit de commentaar van Els

10.8.1 Codering van uitspraken uit de commentaar van Els.

Relevante uitspraken in de commentaar van Els krijgen hier een code toegekend die gebaseerd is op de codering van de EK's uit 10.5.2 aangevuld met 10.7.2.

In haar mail (zie 9.4.1) merkt Els op dat de leerlingen na de lessenreeks meer doordrongen zijn van het deductieve gegeven, ze zien het belang van theorie en deductie beter in. Tijdens ons gesprek (zie 9.4.2) vertelt Els me dat de leerlingen bewuster bezig zijn met deductief redeneren. Ze merkte dit op bij het zien van bewijzen — en dat ging dan niet over meetkunde maar over functies (EK7'e.5).

10.8.2 Evaluatie van EK7' vanuit deze uitspraak van Els.

Vanuit het evaluatienormen voor EK7' (zie 10.5.4) besluit ik dat de leerlingen na de lessenreeks voor EK7'e tenminste een 0 scoren. Ze gaan immers op zoek naar verklaringen in hun voorkennis.

10.8.3 Uit de rest van het gesprek met Els haal ik een bevestiging dat aan bepaalde EK's gewerkt wordt tijdens de lessenreeks. Het verschaft echter geen directe gegevens over de EK's van de leerlingen.

10.9 Samenvatting van de gevonden resultaten

Met de onderzoeksvraag in het achterhoofd, vat ik hier samen welke veranderingen optreden in de kijk op meetkunde van de leerlingen van 4D1E.

Er zijn goede resultaten voor de EK's 3,5,7'b,7'e en 10: de negatieve scores van voor de lessenreeks, verdwijnen volledig na de lessenreeks. De – – en – voor EK3 worden vervangen door – en +. Voor EK 5 veranderen – – en – in 0 en + +. Voor EK7'b veranderen – –, –, – in +, + +, + +. Voor EK7'e veranderen –, +, 0 in 0, +, + +. De –, +, – – van EK10 worden een +, + + en + +. Voor EK13d is er alleen een verbetering voor de middelmatige student.

Voor EK 2, 4 en 14 zijn er vrij negatieve scores wat de interviews betreft die voor de lessenreeks plaatsvonden. Tijdens de lessenreeks merkte ik op dat 2b1 en 2 verbeterden. Dit wordt bevestigd door het gesprek met Els Vanlommel in 9.4.2. Over EK 4 zijn er alleen resultaten van voor de lessenreeks, namelijk –, + + en 0. Hierover kan dus weinig gezegd worden. EK14 was voor de lessenreeks negatief en blijkt dit ook tijdens de lessenreeks nog steeds te zijn.

Bij deze resultaten moeten we de bedenking maken dat slechts drie leerlingen uit 4D1E getest werden. We kunnen dan ook niet echt besluiten trekken in verband met de evolutie van de EK's ten gevolge van de lessenreeks. Wel geven deze resultaten een eerste indicatie voor een positieve invloed van de lessenreeks.

Hoofdstuk 11

Retrospectieve fase van het onderzoek te Berlaar. Interpretatie van de bevindingen

11.1 Planning van de interpretatie van de bevindingen in Berlaar

"De gevonden resultaten worden vergeleken met vooraf gestelde verwachtingen. Enerzijds wordt gezocht naar verklaringen voor het eventuele verschil tussen verwachtingen en bevindingen. Anderzijds worden de conclusies van de data-analyse vertaald in feed-forward voor de tweede onderzoekscyclus. Deze feed-forward betreft aanpassingen van het HLT, van hypotheses of van de onderwijsactiviteiten." (Drijvers, 2003)

11.2 Een vergelijking van de gevonden resultaten met de verwachtingen van het onderzoek

11.2.1 Hoe droeg de lessenreeks bij tot deze veranderingen in de kijk op meetkunde van de leerlingen van 4D1E?

In 6.4 stelde ik een procesmodel op voor een lessenreeks die de veertien AK's en de tien EK's kan voeden. Dit model vermeldt bij elk lesonderdeel welke beliefs erdoor gevoed zouden moeten worden. In 8.5 werd dit procesmodel ingekort tot een lessenreeks voor Berlaar. Hoe deze lessenreeks werkelijk verliep, wordt beschreven in een reeks verslagen in 9.2 . Per les wordt het verloop beschreven en in cursief worden de EK's toegevoegd waaraan tijdens deze les gewerkt wordt. Aan de hand van het procesmodel uit 6.4 en de verslagen uit 9.2 beschrijf ik hieronder uitgebreid voor EK 2, 3, 5, 7'b, 7'e, 10 en 13d welke inspanningen gedaan werden om deze te verbeteren. Welke van de onderstaande aspecten tot de verbetering geleid hebben, kunnen we uiteindelijk niet weten.

EK 2 *Tijdens de lessenreeks verbeterde EK 2.*

De waarde voor EK2 evolueerde van $--$, $++$, $--$ naar $++$ tijdens het geven van de lessen.

Hoe werd EK 2 tijdens de lessenreeks gevoed?

(a) Tijdens de eerste les wordt in een historisch-filosofische uiteenzetting gewezen op het karakter van meetkundige figuren: ze kunnen nooit exact voorgesteld worden.

(b) Tijdens les 2 confronteert de leerkracht de leerlingen met een erg onnauwkeurige schets op het bord, waar de drie middelloodlijnen van een driehoek helemaal niet concurrent getekend zijn.

(c) Les 4 vangt aan met een gedachtenexperiment, waarin de leerlingen zich een driehoek moeten voorstellen.

(d) In het begin van les 4 vraagt de leerkracht of aan de hand van een erg nauwkeurig getekende schets tot een bepaalde eigenschap besloten kan worden.

EK 3 *Tijdens de lessenreeks verbeterde EK 3.*

Bij het vergelijken van de waarde voor EK 3 tijdens de interviews voor en na de lessenreeks blijkt $--$, 0, $-$ te wijzigen in $-$, 0 en $+$. Volgens 10.5.4 betekent dit dat de zwakke leerling niet meer volledig empirisch werkt. De sterke leerling maakt enkele schetsen en gaat dan op zoek naar een verklaring. De middelmatige leerling werkt niet langer vooral empirisch, hij gaat op zoek in zijn voorkennis voordat hij uitspraken doet.

Hoe werd EK 3 tijdens de lessenreeks gevoed?

(a) Tijdens de eerste les wordt uitgelegd waarom in meetkunde gekende dingen gedefinieerd moeten worden, waarom bewijzen gegeven worden voor eigenschappen, wat een bewijs is, of waarom we niet gewoon af mogen lezen van een schets wat we zien. Het deductief systeem wordt verantwoord en toegelicht. Om deductief te kunnen redeneren moet de logische opbouw van de meetkunde gekend zijn en begrepen.

(b) De leerlingen moeten een deductieve verklaring voor de concurrentie van de drie middelloodlijnen zelf doornemen. Dit wordt als juister alternatief aangeboden voor een empirische aanpak.

(c) De leerlingen krijgen veel tijd om te zoeken op het middelpunt van de ingeschreven cirkel van twee driehoeken. Een grote en een kleine. Het probleem moet opgelost worden voor 34 verschillende driehoeken. De leerlingen krijgen de tijd om te gissen en te missen.

(d) In les 4 kunnen de leerlingen niets noteren of met de handen doen. Ze worden alle 17 verplicht om na te denken. Zo vinden we met gesloten ogen de oplossing voor de positie van het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek.

EK 5 *Tijdens de lessenreeks verbeterde EK5.*

EK 5 werd zowel voor als na de lessenreeks getest door interviews. Dit resulteerde in de scores $--$, $+$, 0 voor de lessenreeks gegeven werd. Na de lessenreeks wezen de interviews de scores $-$, *, $++$ uit. De zwakkere leerling evolueert van $--$ naar $-$.

Dit betekent volgens 10.5.4 dat de leerling minder aan de schets blijft plakken voor de formulering van een eigenschap, en ook al weet dat hij eigenschappen moet gebruiken om een verklaring te geven. De middelmatige leerling evolueert van 0 naar $++$. Voor de lessenreeks geloofde hij al dat een stelling algemeen moet zijn en om een bewijs vraagt, na de lessenreeks kiest hij bovendien voor goede eigenschappen uit zijn voorkennis om een bewijs mee op te stellen.

Ook tijdens de lessenreeks zelf bleek EK 5 al naar de score 0 geëvolueerd te zijn (zie 10.6).

Hoe werd EK 5 tijdens de lessenreeks gevoed?

(a) Om EK 5a1 te voeden, wordt de bewering van Wout in les 3 naar hem vernoemd, en opgenomen in de volgende lessen als “de eigenschap van Wout”.

(b) Om te oefenen op het zelf formuleren van een stelling wordt de formulering van de omgekeerde eigenschap tijdens les 5 gevraagd.

(c) Om de leerlingen te laten geloven dat een eigenschap in meetkunde om een bewijs vraagt, legde ik tijdens les 1 uit vanwaar bewijzen komen, en ik besprak de Platonische zienswijze van meetkundige figuren.

(d) Tijdens les 3 lokte ik een fout antwoord uit van leerling B8 nadat we voor een aantal voorbeelden hadden geconcludeerd dat de middelloodlijnen van een driehoek concurrent zijn. De vraag of we dit nu in de boeken van Euclides mogen bijschrijven volstond om hem zijn fout te laten inzien.

(e) Tijdens les 4 vroeg ik aan de leerlingen persoonlijk of ze geloofden dat een bewijs nog nodig was voor de eigenschap over het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek nadat ze 35 voorbeelden zagen, waaronder één erg nauwkeurig getekend werd door mezelf. Alleen leerling B5 trapte erin. Toen liet ik de leerlingen de ogen sluiten en zich een driehoek voorstellen. Daarna filosofeerden we over de denkbeeldigheid van wiskundige figuren.

EK 7’b *Tijdens de lessenreeks verbeterde EK 7’b.*

Voor de lessenreeks geven de interviews als score voor EK 7’b : $--$, $-$, $-$. Na de lessenreeks geven de interviews als scores voor EK 7’b: $+$, $++$, $++$. Dit is een opvallende verbetering. De sterke en middelmatige leerlingen zien na de lessenreeks zelf in dat een bewijs in woorden beter inzicht en gedachtengang weergeeft dan in symbolen. Voor de lessenreeks vonden ze een bewijs in symbolen nog te verkiezen. De zwakkere leerling toont na de lessenreeks ook een lichte voorkeur voor een bewijs in woorden, waar hij voor de lessenreeks koos voor een bewijs in symbolen.

Hoe werd EK 7’b tijdens de lessenreeks gevoed?

Alle bewijzen die tijdens de lessenreeks aan bord komen, gebeuren in woorden.

EK 7’e *Tijdens de lessenreeks verbeterde EK 7’e.*

Een evaluatie van EK 7’e voor de lessenreeks geeft $-$, $+$, 0, en een evaluatie van EK 7’e na de lessenreeks geeft 0, $+$, $++$. De zwakkere leerling gaat van $-$ naar 0. Dit betekent dat hij niet langer zoekt naar een verantwoording dor een imaginaire eigenschap aan te halen, maar dat hij lukraak op zoek gaat naar bruikbare dingen in zijn voorkennis. De middelmatige leerling evolueert van 0 naar $++$. Hij gebruikt de schets en hulpconstructies voor het bewijs, en gaat selectiever tewerk bij het uitzoeken van bruikbare eigenschappen. De sterkere leerling blijft gissen om een bruikbare stelling voor de verantwoording van de eigenschap te vinden.

Hoe werd EK 7’e tijdens de lessenreeks gevoed?

(a) Tijdens les 1 wordt uitgelegd wat de deductieve bewijsmethode is.

(b) Tijdens les 1 toon ik een logisch schema van de eigenschappen uit de voorkennis van de leerlingen. Ook een lokaal logisch schema van middelloodlijn en bissectrice wordt getoond.

(c) Tijdens les 5 geef ik de leerlingen allemaal een blad met een schema van de stellingen. Aan de hand van dit schema leg ik uit welke de stappen zijn om de eigenschap van Wout te bewijzen.

(d) Tijdens de vijfde les zoeken de leerlingen in een vraaggesprek naar de eigenschappen die bruikbaar zijn voor het maken van een aantal bewijsjes.

EK 10 *Tijdens de lessenreeks verbeterde EK 10.*

Tijdens de lessenreeks blijken de leerlingen geen probleem te hebben met de beperking tot het gebruik van passer en liniaal. Ze aanvaarden dit gewillig, want ze begrijpen dat deze manier van werken nodig is op een graanveld en in het donker.

Tijdens de interviews blijken de scores –, +, – – te evolueren naar +, + +, + +. Dit betekent voor de zwakkere leerling dat hij voor de lessenreeks niet genteresseerd leek in historiek en filosofie. Na de lessenreeks weet hij dat door een aantal Griekse wijsgeren nu bewijzen gegeven moeten woeden en meetkundige figuren denkbeeldig zijn. De middelmatige leerling kan de filosofische en historische beschouwingen toepassen en uitleggen.

Hoe werd EK 10 tijdens de lessenreeks gevoed?

(a) Tijdens de eerste les wordt een stukje historiek en filosofie van de euclidische meetkunde gegeven.

(b) Het probleem dat gesteld wordt, is het maken van een schets op schaal voor een graancirkel. Uit de filmpjes blijkt dat hiervoor speciaal materiaal nodig is.

(c) Tijdens de tip wordt het beeld van de paaltjes en de koord verder gebruikt.

EK 13d *Tijdens de lessenreeks verbeterde EK13d niet.*

De scores voor EK 13d gaan van –, +, – naar –, 0, + +. Er is alleen een verbetering voor de middelmatige student.

Hoe werd EK 13d tijdens de lessenreeks gevoed?

(a) De meetkunde over de cirkel wordt niet gewoon gegeven, maar door de leerlingen zelf gezocht om een constructieprobleem van de Harlekijn te oplossen. Graancirkels zijn een mysterieus alternatief voor landmeetkunde, en zullen de leerlingen van het vierde jaar meer aanspreken.

(b) De constructie van de Harlekijn vergt de eigenschappen, anders lukt het niet goed. Hiervoor wordt de vraag in het begin van de 6de les gesteld en wordt leerling B6 uitgedaagd.

(c) Het opdrachtenblad van de 6de les nodigt de leerlingen uit om eerst te denken en dan te doen.

Uit 6.4 en 9.2 blijkt ook dat ook voor de EK's 1, 4, 6a, 8, 11 en 14 verbeteringspogingen gedaan werden. Maar het effect van deze pogingen kan niet nagegaan worden omdat over deze EK's geen gegevens verzameld werden.

EK 1 *Hoe werd EK 1 tijdens de lessenreeks gevoed?*

De leerlingen moeten zelf de drie eerste postulaten van de euclidische meetkunde ontdekken als de eisen van construeerbaarheid voor graancirkels. Tot deze inzichten komen zij door het bekijken van realistische filmpjes over graancirkels.

EK 4 *Hoe werd EK 4 tijdens de lessenreeks gevoed?*

(a) Uit de filmpjes van de canvasreportage komt de vraag naar de constructie van de Harlekijn eerlijk en menselijk naar boven.
(b) De schets van de leerlingen met concurrente middelloodlijnen van een driehoek, wordt geconfronteerd met de schets op het bord waarop de drie middelloodlijnen duidelijk niet concurrent getekend worden.
(c) De theorie van de cirkel blijkt nodig voor de constructie van de Harlekijn.

Op het einde van de lessenreeks bleek dat alle leerlingen behalve leerling B6 het gebruik van eigenschappen nodig vonden om de Harlekijn goed te kunnen construeren. Na zijn mislukte tekenpoging was ook hij overtuigd.

EK 6a *Hoe werd EK 6a tijdens de lessenreeks gevoed?*

(a) Uit het vermoeden van de concurrentie van de drie middelloodlijnen mag geen stelling afgeleid worden.
(b) Lukraak prikken of zomaar gokken naar het construeren van het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek lukt bij de leerlingen misschien één keer, maar geen twee keer. Elke leerling krijgt daarom een grote en een kleine driehoek om het middelpunt te zoeken. De twee driehoeken verschillen ook erg van vorm. Samen geeft dit al 34 driehoeken.

EK 8 *Hoe werd EK 8 tijdens de lessenreeks gevoed?*

Aan bord vindt een vraaggesprek plaats over het bewijs van het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

EK 11 *Hoe werd EK 11 tijdens de lessenreeks gevoed?*

(a) Er wordt een geanimeerde uitleg gegeven over de historiek en het wezen van de axiomatisch opgebouwde euclidische meetkunde.
(b) Het boek van Dijksterhuis over de euclidische meetkunde wordt doorgegeven.
(c) Schema's van de opbouw van stellingen en definities worden op powerpoint getoond en kort besproken.

EK 14 *Hoe werd EK 14 gevoed?*

De schets van de Harlekijn wordt ontleed in een klasdiscussie. De leerlingen bespreken wat ze denken te kunnen afleiden uit deze schets.

11.2.2 De verwachtingen die gesteld werden evolueerden tijdens het onderzoek

Bij aanvang van de thesis (zie inleiding) was de verwachting een lessenreeks te maken over de cirkel die zou bijdragen aan de ontwikkeling van een positieve kijk van de leerlingen op wiskunde in het algemeen en meetkunde in het bijzonder. Na een literatuurstudie zoals beschreven in 3.3 en 3.4 werd de kijk op wiskunde en meetkunde geconcretiseerd in een opsomming van tien AK's en veertien EK's in respectievelijk 3.3.3 en 3.4.7.

Toen uit het vooronderzoek in Berlaar bleek dat de AK's van de leerlingen vrij goed waren, werd de aandacht van deze studie in **10.4.4** gericht op de EK's. Slechts een deel van de EK's werden effectief onderzocht, namelijk EK 2, 3, 4, 5, 7', 10, 13 en 14. In sectie 10.5.2 worden deze EK's uit noodzaak verfijnd.

11.2.3 Een vergelijking van de gevonden resultaten met de verwachtingen

1. In plaats van EK 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 en 14 werden slechts EK 2, 3, 4, 5, 7', 10 en 13 effectief onderzocht.

2. De oorspronkelijke EK's uit 3.4.7 werden verfijnd naar deelaspecten zoals beschreven in 10.5.2 en 10.7.2.

3. Bij EK13d is er geen echte verbetering.

11.3 Verklaringen voor het verschil tussen verwachtingen en bevindingen

1. Slechts EK 2, 3, 4, 5, 7', 10 en 13 werden effectief onderzocht.

   Een eerste verantwoording hiervoor wordt gegeven in 10.5.2: sommige van de vooropgestelde EK's uit 3.4.7 bleken te overlappen of irrelevant voor probleemoplossen.

   Anderzijds was de tijd voor het onderzoek beperkt. De interviews konden slechts een uur in beslag nemen, want ze vonden plaats tijdens de middagpauze. Niet alle EK 's konden tijdens dit uur op een doeltreffende wijze getest worden.

2. De EK's uit 3.4.7 werden onderverdeeld in deelaspecten tijdens de verwerking van de interviews in 10.5.2 en 10.7.2.

   De oorspronkelijke codering uit 3.4.7 werd opgesteld tijdens de literatuurstudie. Ze wordt voortdurend aangepast vanuit de vaststelling van onverwachte uitspraken die tijdens de interviews door de leerlingen gemaakt worden. De manier van denken van leerlingen kon pas tot in de details doorgrond worden na een dieper gesprek met de leerlingen.

3. Waarom zijn er geen betere resultaten voor EK13d?

   De pogingen die ik deed om EK13d te verbeteren, waren niet echt succesvol.

   (a) De meetkunde over de cirkel wordt niet gewoon gegeven, maar door de leerlingen zelf gezocht om een constructieprobleem van de Harlekijn te oplossen. Graancirkels zijn een mysterieus alternatief voor landmeetkunde, en zullen de leerlingen van het vierde jaar meer aanspreken.

   (b) De constructie van de Harlekijn vergt de eigenschappen, anders lukt het niet goed. Hiervoor wordt de vraag in het begin van de 6de les gesteld en wordt leerling B6 uitgedaagd.

   (c) Het opdrachtenblad van de 6de les nodigt de leerlingen uit om eerst te denken en dan te doen.

   Toch gaf Els me in haar commentaar na de lessenreeks (9.4.2) een extra bevestiging voor sommige van deze pogingen.

   Goed bij het kringgesprek vond Els dat de leerlingen uit hun gewone context gehaald (EK13) werden, het was positief omdat het de aandacht vestigde op de herkenbaarheid van wiskunde in het dagelijks leven (EK13d). Bovendien werd er zo apart aandacht gegeven aan het nadenken over de aanpak (EK13d.1&2), en dat gebeurt volgens haar niet wanneer de leerlingen achter een bank zitten: dan beginnen ze eerder te rekenen. Het was op een bepaald moment enkel denken en redeneren (EK 13d.4).

Het werken met graancirkels maakte de leerlingen meer betrokken bij de lessen. Het verwees goed naar de beliefs over toepassen in het dagelijks leven. De context dwingt de leerlingen ertoe om rekening te houden met de practische problemen en dit denk dat dit toch wel belangrijk is (Ek13d.9).

Waarom is EK13d dan niet verbeterd?

Ook dat legt Els me uit in haar commentaar na de lessenreeks. Ze zegt in 9.4.2: “Ik zie dit als een tijdelijk fenomeen, dat echter wel een attitude kan worden door te herhalen. Dat merk je vaak als je op een item de nadruk legt, tijdelijk heeft dat een effect, maar wanneer je dat niet meer herhaalt, verdwijnt dat.”

11.4 Feed-forward voor de tweede onderzoekscyclus

11.4.1 De onderzoeksvraag

Slechts een beperkt aantal beliefs kunnen tijdens een interview van een uur nagegaan worden. De lijst van 10 algemene en 14 meetkundebeliefs die ik vooropstelde, was veel te lang. Zelfs de acht beliefs , namelijk EK 2, 3, 4, 5, 7’, 10, 13 en 14, konden niet grondig onderzocht worden. Tijdens het volgende onderzoek zal ik mij op minder beliefs toeleggen.

11.4.2 Het verzamelen van de gegevens

Interviews voor de lessenreeks

De interviews die afgenomen werden tijdens het vooronderzoek waren niet erg gestructureerd. Ik dacht dat deze ongestructureerdheid een voorwaarde was voor de betrouwbaarheid van de uitspraken die door de leerlingen gedaan zouden worden. Al doende zag ik in dat dit niet juist is. De verwerking van de interviews werd moeilijker doordat ik bij de verschillende leerlingen andere vragen stelde, en doordat de vragen niet erg gespecificeerd waren. Ook maakt het de resultaten minder betrouwbaar. Een voornemen dat ik hieruit maak, is van de volgende interviews meer te structureren en bij elke leerling dezelfde vragen te stellen.

Bovendien bleek een verfijning van de meeste beliefs noodzakelijk. Deze was pas op te stellen na het afnemen van de eerste reeks interviews, omdat ik pas dan volledig kon doordringen in de gedachtenwereld van de leerlingen. Een fijnere codering van de beliefs zal bijdragen voor de volgende reeks interviews tot een betere structurering.

Interviews na de lessenreeks

Deze interviews waren al meer gestructureerd. De verwerking was eenvoudiger doordat op voorhand nu een codering van de verfijnde beliefs ter beschikking was. Tijdens deze interviews werden andere leerlingen gekozen dan tevoren. Wel wordt weer een sterke, middelmatige en zwakkere leerling uitgenodigd. Deze keuze van leerlingen werd veroorzaakt doordat de leerlingen niet graag twee middagpauzes opofferen. Voordeel van een andere keuze van leerlingen is dat ze tijdens de tweede reeks interviews niet beïnvloed kunnen zijn door de opmerkingen die ik tijdens de eerste reeks interviews maakte.

Opmerkingen bij de vragen van de interviews

1. De vragen die gesteld worden tijdens de interviews voor en na de lessenreeks moeten goed overeenkomen, zodat de deelaspecten nauwkeurig beoordeeld kunnen worden en zodat een juist waardeoordeel aan de antwoorden gegeven kan worden.

2. Alle deelaspecten van een onderzochte kijk op meetkunde moeten gedetailleerd vastgelegd en gecodeerd worden voor het aanvangen van een interview. Dit was niet mogelijk tijdens de eerste onderzoekscyclus omdat ik het denken van de leerlingen nog niet zo nauwkeurig kende. Ik leerde de deelaspecten vanuit de interviews.

11.4.3 De gebruikte lessenreeks

Opstellen van een lessenreeks

De methode van ontwikkelingsonderzoek vereist het voorstellen van een concrete lessenreeks. Het geven van deze lessen drukt mezelf met mijn neus op de realiteit.

Een lesuur is zeer kort — niet echt 50 minuten lang — en de leerkracht staat onder druk om een programma af te werken. De leerlingen laten nadenken, of taken zelf laten uitzoeken kost veel meer tijd dan alles aan te brengen. Het loont echter de moeite om hierin naar een evenwicht te zoeken, want de kijk van leerlingen op wiskunde wordt anders vervormd.

Geven van de lessenreeks

Bij het geven van de lessenreeks moest ik mij nog erg concentreren op de te geven lesinhouden. Nu ik weet hoe in D1E de lessen verlopen zijn, kan ik mij voor een volgend experiment nog meer toeleggen op het veranderen van hardnekkige beliefs. Alternatieven voor werkvormen kunnen gezocht worden. Ook kunnen er meer gegevens omtrent de beliefs van de leerlingen tijdens de lessen verzameld worden, door mini-interviews en door de leerlingen na elke les een vragenlijst te laten invullen.

LES 1. De Harlekijn en euclidische meetkunde. Tijdens het afspelen van de filmpjes wordt er regelmatig gelachen. De klas luistert geboeid. Een leerling merkt op dat hij zo'n graancirkel in het donker wel eens wil gaan maken. Om snel te gaan discussiëren we niet over de mogelijkheid van constructie.

→ Hier zou ik beter wel op ingaan en de leerlingen laten aanvoelen dat ze vastlopen en dus eigenschappen nodig hebben.

Het stuk over historiek doceer ik en stel geen vragen waardoor ik ook geen besluiten kan trekken over de beliefs.

→ Hier zou ik beter wat vragen stellen om te zien of de leerlingen het begrepen hebben.

→ Bijvoorbeeld vragen waarom Plato en Aristoteles zo dachten: waarom mag je niks aflezen van een schets, of waarom moet je op vorige stellingen steunen en zo een bewijs maken.

LES 3. De leerlingen krijgen het onvolledig bewijs op werktekst en moeten dit zelf proberen te begrijpen. Dit neemt erg veel tijd en ze kunnen er niet goed weg mee. Ze moeten het thuis verder doornemen. Els neemt het bewijs volledig met hen door ... Is dat nodig?

→ Heb ik het niveau van de leerlingen van 4D1E overschat, of kunnen ze inderdaad zelf bewijsjes opbouwen? Een leerling zou aan het bord kunnen proberen terwijl de rest van de klas hem helpt.

→ Leerlingen moeten stapsgewijs aanleren van bewijsjes te maken.

LESSEN ALLEMAAL Om uit de lessen meer gegevens omtrent de beliefs te kunnen halen, zou ik de leerlingen een kleine vragenlijst per dag kunnen meegeven.

LES 5. Dit is een les met veel bewijsjes. Ik werk hier aan logisch formuleren, en bouw met de leerlingen bewijsjes op via een klasgesprek. Ik laat ze zoeken naar een volgende stap (ze moeten zelf een eigenschap vinden= verantwoordingen). Dit zou wat afwisseling mogen hebben. In plaats van zelf te leiden, kan ik een leerling of een groep leerlingen laten leiden (zij spelen dan de jury). Het is wel van belang dat de leerlingen een juist bewijs op bord krijgen. Niet alle leerlingen komen aan bod.

Voor het bewijs van eigenschap 3 geef ik als tip dat het een bewijs uit het ongerijmde moet zijn. De leerlingen haperen erg wanneer ik vraag wat dit is. Concretiseren wat een bewijs uit het ongerijmde voor de derde eigenschap inhoudt, lukt ook niet. Ik moet een tip geven om te zeggen hoe we moeten beginnen.

Deel IV

De tweede onderzoekscyclus,O.-L.-Vr.-Waver

Inleiding bij het onderzoek te Onze-Lieve-Vrouw-Waver

De tweede cyclus van het onderzoek werd uitgevoerd van februari tot april tijdens het schooljaar 2010-2011. Ik krijg hiervoor de medewerking van Vera Mues in het Sint-Ursula-Instituut (SUI) te Onze-Lieve-Vrouw-Waver, en twintig leerlingen van 4Lat A. Het onderzoek in Waver zal korter zijn en meer concreet dan in Berlaar. De beliefs uit de vorige onderzoeksvraag worden geconcretiseerd en beperkt. De interviews worden meer gestructureerd.

Hoofdstuk 12

Voorbereidende faze van het onderzoek te Onze-Lieve-Vrouw-Waver

12.1 Overzicht van het onderzoek te Onze-Lieve-Vrouw-Waver (SUI)

Tijdens de retrospectie van de eerste onderzoekscyclus besloot ik dat de tweede cyclus er ietwat anders zou uitzien dan de eerste. Enerzijds wil ik me vooral verdiepen in de kijk die de leerlingen van SUI hebben op deductie. In 12.2 formuleer en codeer ik de verschillende deelaspecten van deze 'belief' (KD) en in 12.3 beschrijf ik bovendien een evaluatie ervan. Ik herformuleer de onderzoeksvraag als volgt:

Hoe draagt de voorgestelde lessenreeks voor SUI-Waver bij tot een verbetering van de kijk op deductie van de leerlingen?

Anderzijds zal ik de interviews met de leerlingen meer structureren zodat de verwerking achteraf makkelijker wordt. Tijdens deze interviews zal ik er ook op letten op twee of meer manieren te peilen naar dezelfde aspecten van een KD. Ook wordt er steeds op indirecte wijze naar de kijk van de leerling gevraagd. Op deze wijze hoop ik de objectiviteit en juistheid van de resultaten te vergroten.

Om kennis te maken met de leerlingen van 4latA volg ik gedurende een week de wiskundelessen die door Vera Mues gegeven worden. Om het beginniveau van deductief redeneren te bepalen, neem ik bij de leerlingen een schriftelijke test af. Van twee middelmatige leerlingen neem ik een interview af tijdens de middagpauze. Daarna worden drie lessen gegeven door mezelf waar ik vooral aan de kijk op deductie wil werken. Na een week worden opnieuw twee leerlingen geïnterviewd.

12.2 Codering van de deelaspecten van een kijk op deductie

KD1 handelt over het logisch verband tussen onderdelen van een wiskundige bewering en over logische afleidingsregels in wiskundeteksten.

KD 1a1. Kent de leerling de juiste betekenis van een implicatie?

- een implicatie is waar tenzij de oorzaak waar is en het gevolg vals.
- een implicatie is niet omkeerbaar.
- een implicatie wordt bewezen door de waarheid van de oorzaak te veronderstellen en die van het gevolg aan te tonen.
- modus ponens
- contrapositie

Kan de leerling in een stelling of uitspraak het causaal verband ontdekken?

KD1a 2. Kent de leerling de juiste betekenis van een equivalentie?

- twee uitspraken zijn equivalent als de eerste uit de tweede volgt en de tweede uit de eerste.
- een equivalentie is waar wanneer beide leden waar zijn.
- een definitie kan door een equivalentie weergegeven worden.
- een kenmerk is een alternatieve definitie.
- een equivalentie wordt bewezen door de twee betreffende implicaties aan te tonen.
- een ware uitspraak vervangen door een equivalente uitspraak, geeft een ware uitspraak.

Kan de leerling in een definitie of uitspraak de equivalentie ontdekken?

KD1b. Gelooft de leerling dat een wiskundige bewering niet tegelijk waar en onwaar kan zijn?

1. Dat een stelling waar moet zijn in alle gevallen.
2. Dat een stelling wordt weerlegd door één tegenvoorbeeld.
3. Dat een bewijs de waarheid van een stelling bevestigt.

KD1c. (ivm logische afleidingsregels in wiskundeteksten) Gelooft de leerling dat de volgende afleidingsregels ervoor zorgen dat afgeleide uitspraken uit waarheden automatisch nieuwe waarheden zijn?

1. $\dfrac{a \wedge b}{a} \qquad \dfrac{a \wedge b}{b}$
2. $\dfrac{a \to b \quad a}{b}$
3. $\dfrac{\neg a \quad a}{F}$
4. $\dfrac{\neg\neg a}{a}$
5. $\dfrac{a \vee b \quad \neg a}{b} \qquad \dfrac{a \vee b \quad \neg b}{a}$

6. $\dfrac{a \vee b \quad a \to c \quad b \to c}{c}$

7. $\dfrac{a \leftrightarrow b}{a \to b} \qquad \dfrac{a \leftrightarrow b}{b \to a}$

8. $\dfrac{\forall x \in V\big(A(x)\big) \quad v \in V}{A(v)}$

9. $\dfrac{\exists x \in V\big(A(x)\big) \quad \forall x \in V\big(\neg A(x)\big)}{F}$

KD1d. Gelooft de leerling dat er in een wiskundige theorie beginwaarheden ter beschikking moeten zijn om daaruit nieuwe waarheden af te leiden aan de hand van de afleidingsregels uit KD1c?

1. definities : nodige en voldoende voorwaarden waaraan een object moet voldoen
2. axioma's : algemene logische waarheden voor elke theorie
3. postulaten : speciale voorschriften voor een bepaalde wetenschapstak

KD 2 handelt over deductie die nodig is tijdens het bewijzen van gegeven eigenschappen of uitspraken.

KD 2 (deductie voor bewijs) Gelooft de leerling de volgende uitspraken:

1. Doel van een bewijs is de lezer te overtuigen van de waarheid.
2. Een bewijs in woorden is een volwaardig bewijs.
3. Uit een schets mag je geen waarheden afleiden.
4. In een bewijs is de geest van het argument belangrijker dan het formalisme.
5. Een bewijs kan je zelf opstellen:
   (a) je moet eerst de gegevens en het gevraagde filteren uit een expliciete logische formulering van de bewering.
   (b) aan de hand van 5a en met behulp van een schets kan je naar een idee zoeken voor het bewijs.
   (c) je kan op zoek gaan naar bruikbare eigenschappen voor het bewijs in een logisch schema. In de formulering van deze eigenschappen is het expliciete logisch verband belangrijk.
   (d) Je moet de gemaakte beweringen in een logische volgorde zetten door gebruik te maken van de logische afleidingsregels.

Graag had ik hier nog ingegaan op de link tussen deductie en inventie, maar doordat de leerlingen in O.L.V.-Waver zo weinig ervaring met bewijzen hebben, achtte ik dit niet zinvol.

12.3 Cesuurbepaling en toekenning van een waardering aan de kijk op deductie

KD 1a1

– –	de leerling gelooft dat een implicatie steeds omkeerbaar is,
–	de leerling kan voor een bewering steeds de juiste 'als. . . dan'- formulering vinden.
0	de leerling gelooft niet dat een implicatie steeds omkeerbaar is, en kan steeds een juiste expliciete formulering van een causaal verband in een formulering vinden.
+	de leerling weet bovendien hoe hij een implicatie moet bewijzen.
++	de leerling begrijpt volledig de betekenis van een implicatie in de wiskunde en kan beweringen op correcte wijze met 'alsdan' formuleren.

KD 1a2

– –	de leerling gelooft dat een equivalentie geldt wanneer één van de twee implicaties gelden.
–	de leerling kan voor een voor een bewering steeds de juiste 'als en slechts als'-formulering vinden.
0	de leerling gelooft dat een equivalentie de twee implicaties inhoudt.
+	de leerling weet bovendien hoe hij een equivalentie moet bewijzen.
++	de leerling begrijpt volledig de betekenis van een equivalentie in de wiskunde en kan beweringen op correcte wijze met 'als en slechts als' formuleren.

KD 1b

– –	de leerling gelooft dat één voorbeeld voldoende is om een stelling te verifiëren.
–	de leerling gelooft dat enkele voorbeelden of schetsen volstaan om een stelling te formuleren in het algemeen.
0	de leerling gelooft dat een stelling waar moet zijn in alle mogelijke gevallen.
+	de leerling gelooft dat een bewijs voor het algemeen geval de waarheid van een stelling bevestigt.
++	de leerling gelooft dat hij een uitspraak kan ontkrachten door een tegenvoorbeeld te geven.

KD 1c

– – de leerling gelooft dat een bewijs overbodig is.

– de leerling gelooft dat een bewijs een soort berekening is, waarbij je formules vervangt door gelijke formules.

0 de leerling gelooft dat een bewijs dient om de waarheid van de bewering na te gaan.

\+ de leerling gelooft dat een bewijs een opeenvolging is van ware uitspraken, vertrekkend bij het gegeven en eindigend bij de gewenste uitspraak.

++ de leerling gelooft dat deze opeenvolging logisch moet opgebouwd zijn en dat deze logica kan uitgedrukt worden in afleidingsregels. Gebruikte eigenschapen en stelling moeten waar zijn. Hierbij is ook het logisch verband tussen verschillende onderdelen van een uitspraak van belang (zo kan van een definitie bijvoorbeeld slechts één implicatie echt gebruikt worden).

KD 2

– – de leerling gelooft dat je bewijzen moet van buiten leren, en dat ze door anderen gemaakt moeten worden.

– de leerling gelooft dat je een bewijs kan verstaan en dat woorden in een bewijs verduidelijkend werken.

0 de leerling gelooft dat je een bewijs zelf kan maken, vertrekkend van de gegevens en het te bewijzen. Ook weet de leerling dat hij in de redenering van een bewijs gebruik maakt van eigenschappen of definities uit zijn voorkennis.

\+ de leerling gelooft dat hijzelf een bewijs kan opstellen door een strategie te zoeken die van het gegeven naar het gevraagde leidt en probeert zelf bruikbare eigenschappen te selecteren door naar de inhoud van de eigenschappen te kijken.

++ de leerling gelooft dat je rekening moet houden met de logische verbanden die in de gebruikte beweringen zitten en dat je hiermee logische afleidingen kan maken die aan regels gebonden zijn.

12.4 Vaststelling van het aanvangsniveau te O.L.Vr.-Waver

12.4.1 Meetkundetoets in 4latA

Op 17 februari 2011 doe ik een schriftelijke toets te O.L.Vr.-Waver waarin ik peil naar enkele aspecten van de kijk op deductie van de leerlingen van 4latA. Ook test ik hun logisch denkvermogen. Voor het opstellen van deze test laat ik mij inspireren door 'De taal van de wiskunde' van Nederpelt (1984). Hieronder omschrijf ik wat de vragen uit de test juist nagaan.

Vraag 1. Aan de hand van de formulering van de stelling van Pythagoras wordt nagegaan of de leerlingen een uitspraak op juiste wijze met 'als. . . dan' beschrijven.

Vraag 2. Er wordt nagegaan of de leerlingen geloven dat de omgekeerde van een stelling steeds geldt, en waarom.

Vraag 3. De leerling moet een aantal uitspraken met 'als. . . dan' of 'asa' herschrijven en erbij vermelden of ze definitie of stelling zijn.

Vraag 4. De leerling moet de logische volgorde van een aantal uitspraken vinden.

Vraag 5. De leerling moet zelf een bewijsje opstellen.

Vraag 6. Hier worden een aantal waarom-vragen gesteld over bewijzen, definities en stellingen.

Een volledige beschrijving van de test met modelantwoorden staat in bijlage C.3.1.

12.4.2 Interviews met leerlingen van 4latA

Tijdens de middagpauze op 22 en 24 februari 2011 neem ik een interview af van respectievelijk leerling W7 en leerling W12. Dit zijn twee middelmatig sterke leerlingen uit 4latA die mij door Vera werden voorgesteld. Ik zal bij hen nagaan welke kijk op deductie ze hebben. Tijdens het interview zoekt de leerling naar een oplossing voor vier opdrachten die ik hem geef. In bijlage C.4.1 staan deze opdrachten volledig beschreven, met een modeloplossing. Hieronder som ik deze opdrachten op in het kort.

Probleem 1. De leerling moet het verschil ontdekken tussen uitspraken uit de dagelijkse omgangstaal en wiskundige uitspraken.

Probleem 2. Beseft de leerling dat een bewijs gegeven moet worden om de waarheid van een uitspraak na te gaan?

Probleem 3. Gebruikt de leerling eigenschappen uit de wiskundeles voor een dagelijks probleem?

Probleem 4. Kent de leerling logische schema's van eigenschappen?

12.5 Verwerking van de gegevens uit het vooronderzoek te O.L.Vr.-Waver

12.5.1 Verwerking van de gegevens uit de test in 4latA

1. De test werd uitgevoerd op 17 februari 2011 door 18 leerlingen van 4latA. Modelantwoorden bevinden zich in bijlage C.3.1.

2. Aan de hand van de codering voor de kijk op deductie uit 12.2 wordt een codering opgesteld voor de antwoorden van elke leerling op de test in bijlage C.3.2.

   Voorbeeld

   Of leerlingen de betekenis van een implicatie juist kennen, probeer ik af te leiden uit hun antwoorden op de opgaven 1, 2 en 3.

   Leerling W3 denkt dat de omgekeerde van een ware uitspraak steeds waar is en keert de implicatie in opgave 3 om. Leerling W1 gelooft in opgave 2 niet dat een implicatie steeds omkeerbaar is en vindt voor de beweringen in opgave 1c en 1d de juiste 'als... dan'-formulering. In opgave 3 b,c,e,f vindt ze de juiste formulering.

3. Met behulp van de evaluatie voor elke KD uit 8.2.3 wordt voor elke leerling per KD een waardeoordeel gegeven. Ook dit gebeurt in bijlage C.3.2.

   Voorbeeld.

Leerling W1 gelooft in opgave 2 niet dat een implicatie steeds omkeerbaar is en vindt voor de beweringen in opgave 1c en 1d de juiste 'als... dan'- formulering. In opgave 3 b,c,e of f vindt ze de juiste formulering. Uit opgave 6.7 blijkt dat ze weet hoe ze een implicatie moet bewijzen. Ze krijgt een + voor KD1a1.

Leerling W3 beweert in opgave 6 dat een bewijs dient om te tonen vanwaar eigenschappen komen en om de leerstof beter te begrijpen. Een bewijs is volgens haar een rednering over hoe je aan een stelling geraakt. Het bewijs uit opgave 5 vangt ze aan door de basisregel voor het berekenen van een opppervlakte te geven. Ze krijgt een – voor KD1c.

Leerling W2 geeft haar bewijs in opgave 5 in woorden. Ze krijgt een – voor KD 2 omdat ze nergens vermeldt hoe je vanuit gegevens naar gevraagde met overgaan.

4. Resultaten van de toets in 4latA wat de kijk op deductie betreft: tabel 12.1

   In deze tabel geef ik het aantal leerlingen per vraag die eenzelfde score behaalden.

KD	1a1	1a2	1b	1c	2
– –	9	12	1	1	1
–	3	2	8	9	6
0	4	3	8	4	7
+	2	0	1	4	4
++	0	1	0	0	0

Tabel 12.1: De resultaten van de meetkundetoets te O.L.Vr.-Waver

5. Besluiten uit de test.

   Uit de resultaten in deze tabel en de cesuurbepaling van 8.2.2 blijkt dat de helft van de leerlingen uit 4latA – – scoren op KD1a1. Ze geloven met andere woorden dat een implicatie steeds omkeerbaar is. De betekenis van een equivalentie is nog slechter gekend. 11 van de 18 leerlingen scoren hierop een – –. De helft van de leerlingen gelooft dat een stelling waar moet zijn in enkele gevallen. De andere helft gelooft dat een stelling waar moet zijn in alle gevallen. De meeste leerlingen geloven dat een bewijs een soort berekening is. Slechts een viertal leerlingen beseffen dat het in een bewijs met ware uitspraken gewerkt wordt. Elf leerlingen blijken wel te geloven dat je een bewijs zelf kan opstellen en dat je vertrekken moet van het gegeven om naar het te bewijzen toe te gaan. Dat je hierbij op zoek moet gaan naar stellingen in je voorkennis beseffen vier van hen.

12.5.2 Verwerking van de gegevens uit interviews voor de lessenreeks in O.l.Vr.-Waver

1. Tijdens een interview test ik KD 1a1, KD 1a2, KD1b, KD1c enKD2 zoals beschreven in 12.2. De codering van de uitspraken van de leerling gebeurt door zijn uitspraken te markeren in de kleur van de bijpassende KD. Dit gebeurt in bijlages C.4.2 en C.4.4. Zie bijlage C.2.1 voor de geluidsopnames van deze interviews.

KD 1a1	groen
KD 1a2	blauw
KD 1b	roos
KD 1c	geel
KD 2	rood

Voorbeeld

W7 Ja dat zou kunnen helpen omdat je dan ziet hoe alles uit elkaar volgt. Je kijkt naar wat je wil bewijzen, en vanwaar je begint en je kijkt naar waar die pijltjes allemaal toegaan en hoe je van het een naar het ander geraakt. Zo kan je zien waar je uitkomt als je iets doet.

W7 Je moet geen definities gaan gebruiken van vierkanten en parallellogrammen als je bezig bent met een cosinusregel of zo.

H Mag je in “als een vierkant, dan ook een rechthoek” de pijl omkeren?

W7 Nee.

W12 Vrij zeker toch. Wij hebben dat altijd zo gezien: als het ene waar is dat dan het andere waar is en andersom ook.

H Een bewering in wiskunde, mag die fout zijn?

W12 Neen, want dan mag je er niet mee werken.

H Hoe gaan we zo een bewijs nu verder maken, of kan je dat zelf niet maken?

W12 Ik weet niet dat je dat zelf kunt maken eigenlijk. Ik heb dat ook nog nooit gedaan.

2. Aan de hand van 12.3 en voorgaande codering wordt een evaluatie opgesteld voor de kijk op deductie van elke leerling in bijlages C.4.3 en C.4.5.

   Voorbeeld. Leerling W7 beseft dat een implicatie niet steeds omkeerbar is, maar slaagt er niet steeds in om uit een uitspraak de juiste implicatie te vinden. Ze krijgt een – voor KD 1a1. Leerling W7 weet dat voor een kenmerk de pijlen in de twee richtingen moeten gelden, en dat een definitie een asa is. Ze krijgt een 0 voor KD 1a2.

   Leerling W12 gelooft niet echt dat een implicatie steeds omkeerbaar is. Hij scoort geen 0 maar een – voor KD 1a1 omdat hij deze implicatie omkeert omdat ze fout is. Bewijzen is iets wat “ze” volgens leerling W12 doen om te zien of een uitspraak klopt die je eigenlijk al weet vanuit vele voorbeelden. Hij scoort een 0 voor KD 1c.

3. De resultaten van beide interviews zet ik in de volgende tabel:

	Leerling W7	Leerling W12
KD 1a1	–	–
KD 1a2	0	–
KD 1b	0	0
KD 1c	0	0
KD 2	+	– –

Tabel 12.2: De resultaten van de interviews voor de lessen te O.L.Vr.-Waver

4. *Besluiten*

   Beide leerlingen kunnen voor een uitspraak niet steeds de juiste implicatie formuleren. Voor een equivalentie kunnen ze dat wel. Ze geloven dat een stelling waar moet zijn voor alle gevallen, en dat een bewijs de waarheid van een bewering nagaat. Een leerling gelooft dat ze zelf een bewijs kan maken en zoekt naar een strategie door hulplijnen te trekken en eigenschappen te selecteren. De andere leerling denkt dat bewijzen door anderen gemaakt moeten worden.

12.6 Bepaling van de einddoelen

Uit de test die afgenomen werd in 4latA blijkt gewerkt moet worden op de juiste betekenis van een implicatie en equivalentie. Er moet op gewezen worden dat een implicatie niet steeds omkeerbaar is. Ook moet gewezen worden op het feit dat een bewijs in meetkunde vaak geen berekening is maar een opeenvolging van ware uitspraken afkomstig uit de voorkennis van de leerlingen.

Uit de interviews blijkt dat er nadruk moet gelegd worden op het feit dat een bewijs de waarheid van een uitspraak aantoont en dat er in bewijzen met waarheden gewerkt wordt. Ook blijkt een explicitering van de afleidingsregels die in een bewijs gebruikt worden, nodig. De leerlingen moeten actief een bewijs mee opstellen. Hiervoor moeten logica en logische schema's eerst uitgelegd worden.

12.7 Ontwikkeling van een hypothetisch leertraject

In hoofdstuk 6 bouwde ik een model op voor een lessenreeks die aan 10 algemene en 14 meetkundebeliefs tegemoetkomt. Vanuit deze lessenreeks bouw ik drie nieuwe lessen op die vooral werken op deductief redeneren. De context van de Harlekijn-graancirkel blijft behouden. Op zoek naar een effectieve aanpak van de lessen doe ik nieuwe ideeën op in literatuur. Ik verzamel informatie over het gebruik van logische schema's en bekijk het voorbeeld van de projectgerichte aanpak van Phoenix Park School, zoals beschreven door Jo Boaler (Boaler, 2009). Ook bestudeer ik "De taal van de wiskunde" van R.P.Nederpelt (Nederpelt, 1984) en de cursus Logica van prof. Denef.

12.7.1 Literatuurstudie over het gebruik van logische schema's en het boek van Jo Boaler

Op `http://www.leren.nl/cursus/leren_en_studeren/actief_leren/visueel_schema.html` wordt een uiteenzetting gegeven van het gebruik van visuele schema's. Hieruit haal ik de volgende ideeën: "Een visueel schema is een model van gedachten, informatie of kennis. Met een visueel schema kun je beter nadenken en leren. Je ziet in één oogopslag structuur in de informatie en je komt makkelijker op nieuwe ideeën. Een lijn tussen twee begrippen geeft een relatie aan, bijvoorbeeld 'dit veroorzaakt dat' ".

Omdat de hersenen niet lineair werken, sluit een visueel schema beter aan bij de werking van onze hersenen dan een tekst. Het lezen van tekst verloopt langzamer en kost meer energie.

Redenen om een visueel schema te gebruiken zijn er genoeg. Zo kan je met een schema beter onthouden. Enerzijds omdat je bij beelden met de rechterhelft van de hersenen gaat werken, die beter onthoudt. Anderzijds omdat je makkelijk nieuwe kennis aan bestaande kennis kan linken. Overzicht houden over de beschikbare informatie lukt ook beter met een schema. Bovendien stimuleert een schema de creativiteit vermits je snel en makkelijk structuur kan aanbrengen bij het genereren van nieuwe ideeën. Nieuwe ideeën kunnen makkelijker onderzocht worden.

In hoofdstuk 1 van "The Elephant in the Classroom"(Boaler, 2009) probeert Jo Boaler te begrijpen waarom kinderen geholpen moeten worden om wiskunde liever te doen. Veel leerlingen haten wiskunde, dus veel volwassenen vrezen wiskunde en vermijden het ten allen prijze. De titel van het boek : "Er zit een olifant in de klas", refereert naar een idee die erg belangrijk is, maar waarover niemand spreekt. In wiskundeklassen staat er vaak een erg grote olifant in een hoek. Deze olifant is de idee dat succes in wiskunde een teken van algemene intelligentie is en dat sommige mensen wiskunde kunnen en andere niet. Zelfs wiskundeleerkrachten (de minder goeie) denken dat het hun taak is om uit te maken wie wiskunde kan, en wie niet. Deze idee is totaal verkeerd want in veel wiskundeklassen wordt een erg beperkt onderwerp onderwezen, dat in wezen niets te maken heeft met de wiskunde die in de maatschappij of door wiskundigen gebruikt wordt. Methodes die door de leerkrachten getoond worden, moeten gekopiëerd en herhaaldelijk nauwgezet gereproduceerd worden. Natuurlijk zijn slechts weinigen goed in zo'n beperkte manier van werken. Wat in de scholen onderwezen wordt is geen wiskunde, maar een vreemde gemuteerde versie van het eigenlijke onderwerp. Wanneer men echter de échte wiskunde gaat onderwijzen dan zijn velen succesvol. De echte wiskunde houdt probleemoplossen in op verschillende werkwijzen en het zelf ontwikkelen van ideeën en voorstellingen.

Wat precies misgaat in de klassen beschrijft Jo Boaler in haar tweede hoofdstuk. Volgens haar moeten leerlingen meer kunnen nadenken tijdens het leren, meer kunnen praten waarover ze leren, en moet de realiteit meer betrokken worden. Leren zonder nadenken, is uit den boze. Door de leerlingen standaardvragen en typeoefeningen te laten oplossen, ontwikkelen ze immers de overtuiging dat nadenken niet nodig is tijdens wiskundelessen en dat je vooral goed moet opletten wat de leerkracht doet. De natuurlijke nieuwsgierigheid van de leerlingen wordt vernietigd. Ze worden gefrustreerd omdat ze niet weten waarom methodes werken en hoe ze ineen passen. Het is beter om de leerlingen tijdens het leren vragen te laten stellen, onderzoek te laten doen, de kans geven van echte problemen op te lossen en niet alleen het herhalen van standaardprocedures.

Ook praten over wiskunde is nodig. Luisteren is een passieve act die geen echt intellectueel engagement vereist. Leerlingen hebben het nodig van te praten over wiskunde om te weten of ze het echt verstaan (eventueel uitleggen aan medeleerlingen). Bovendien is het erg moeilijk van te redeneren en te controleren wanneer je stil moet werken. En dit redeneren en controleren is net erg belangrijk in wiskunde. Ook ontstaat door het praatverbod de foute belief dat wiskunde alleen een set van regels en methodes uit boeken is terwijl het een onderwerp is waarover je ook zelf een mening kan hebben. Een adolescent wil zelf ideeën geven, zelf zijn intellect gebruiken en zelf sturen in welke richting hij werkt. Tenslotte is praten een act van reconstructie en verdiept dus het begrip. Tijdens het verbaliseren moet de leerling zijn ideen reconstrueren in zijn hoofd.

In wiskundeproblemen wordt vaak een pseudo-context geschapen, waarin het gezond verstand van de leerling niet meer telt. Een effect hiervan op langere termijn is dat contexten later genegeerd worden en dat wiskunde onwerkelijk en mysterieus wordt waarvoor kennis uit de wereld niet nodig is. Het is beter van een realistische context te scheppen die iets bijdraagt.

In hoofdtuk 3 beschrijft Jo Boaler twee alternatieven voor een traditionele aanpak van wiskundelessen. Eerst beschrijft ze de projectgerichte aanpak van Phoenix Park School. Observaties tijdens wiskundelessen in deze school leren haar dat tijdens de lessen wiskunde heel wat chaos heerst en dat er weinig orde en controle is. De leerlingen werken aan projecten die wiskundige methodes vereisen. Ze krijgen de vrijheid in de keuze van hun partners, het project en de gevolgde werkwijze. Bij het begin van de les geeft de leerkracht het probleem rond het bord. De leerlingen denken na en praten erover. Dan stuurt de leerkracht de leerlingen terug naar hun plaats om te werken: alleen of in groep. Elke groep volgt zijn eigen werkwijze. De keuze van de projecten die gegeven worden is overdacht. Ze sluiten aan bij de interesse van de leerlingen en moeten gelegenheden scheppen om belangrijke concepten en methodes te leren. De leerlingen uit de Phoenix Park School hebben de overtuiging dat wiskunde een flexibel problemsolving instrument is.

Wanneer de auteur vervolgens de traditionele aanpak van Amber Hill School beschrijft, valt het op dat daar rust en stilte in de klas is, dat de vragen die gesteld worden kort zijn, en dat er eerst een beetje uitleg gegeven wordt en daarna oefeningen gemaakt worden. De leerlingen werken er per twee, en ze werken hard maar ze doen niet graag wiskunde. Ze memoriseren regels en procedures.

Ook bestudeerde Jo Boaler de effecten van deze verschillen in aanpak tussen Phoenix Park School en Amber Hill. Bij nationale tests scoort Phoenix Park School beter dan Amber Hill, ook zonder expliciete voorbereiding op de test. Bij het maken van toepassingen uit de realiteit ondervond de auteur dat Phoenix ook beter scoort dan Amber Hill. Door interviews op schoolverlaters testte Jo Boaler het gebruik van wiskunde buiten de school. Ook hier waren de leerlingen van Phoenix Park meer bereid om wiskunde buiten school te gebruiken. Ze konden voorbeelden geven van het gebruik van wiskunde in hun leven.

Ex-studenten (24 j.) van Phoenix Park werken in meereisende jobs en benaderen job en leven positiever dan die van Amber Hill. Het boek van Jo Boaler "experiencing school mathematics" (Boaler, 1997) over de studie van Amber Hill en Phoenix Park won een nationale prijs in Engeland.

Een ander alternatief voor een traditionele aanpak is de communicatieve aanpak van bijvoorbeeld Raiside High School (California). De leerkrachten van deze school herschreven de curricula tijdens de zomervakanties. Het nieuwe curriculum werd georganiseerd rond grote wiskundige ideeën zoals "wat is een lineaire functie?" De focus ligt op verschillende representatiemethoden zoals woorden, symbolen, tabel, grafiek, object, . . . en de overgang ertussen. Leerlingen leggen hun werk uit aan elkaar en werken samen in groepjes. Elke leerling heeft zijn eigen bijdrage. De leerlingen helpen elkaar en beschouwen, visualiseren, en beschrijven patronen.

12.7.2 Eisen voor het HLT vanuit de literatuurstudie

Uitgangspunt is weer het realistisch en motiverend probleem van de Harlekijn. Omdat er mij slechts drie lessen ter beschikking staan, zal ik het probleem van de Harlekijnconstructie grondig moeten inkorten. Er zal gezocht worden op delen uit de constructie van deze graancirkel. Zo belanden de leerlingen bij de vertrouwde euclidische meetkunde. De structuur van het HLT is die van een probleemoplossingsproces. Dit stemt overeen met de projectgerichte aanpak die Jo Boaler in haar boek verdedigt. Bovendien zal ik er ook op letten dat de leerlingen tijdens de lessen veel kunnen nadenken en vrij kunnen praten waarover ze leren.

Het maken van logische schema's zal zeker aan bod komen, vermits het accent van de lessen ligt op een juiste kijk op deductief redeneren. Dit betekent in het schema van prof. Van Oystaeyen (figuur 4.2) dat de denkactiviteiten B en C uitgebreid behandeld zullen worden en dat veel aandacht zal uitgaan naar de abstracte formulering van uitspraken en bewijzen.

12.7.3 HLT voor een lessenreeks over deductie

Hieronder vul ik concreet de verschillende stappen in die in het proces van probleemoplossing gezet worden. In rood geef ik aan op welke KD ik werk tijdens die stap.

Concreet probleem:

Zoek een constructie voor de Harlekijncirkel die 's nachts uitvoerbaar is op een veld.

Denkactiviteiten A: KD 1c

1. Door het tonen van twee realistische filmpjes over het maken van graancirkels, wordt er gezocht naar de essentie van het probleem. Deze kan vertaald worden in de eisen:

    - een lijn is construeerbaar door twee punten te verbinden of een andere lijn te verlengen.
    - een cirkel is construeerbaar wanneer zijn middelpunt en een punt erop gekend is.
    - een punt is gekend als doorsneden van twee lijnen.

    Dit zijn de drie eerste postulaten van Euclides' Elementen. Euclidische meetkunde verschijnt zo op natuurlijke wijze als hulpmiddel voor de constructie van de Harlekijn.

2. Het oorspronkelijk probleem wordt herleid tot het zoeken naar een grote driehoek, een grote cirkel, enz. Dan wordt een tip gegeven voor de constructie, namelijk starten kan best door de constructie van een gelijkzijdige driehoek.

Denkactiviteiten E:

De rest van de Harlekijnconstructie wordt getoond.

Generiek probleem: KD 1b

- Driehoek PQR is gelijkzijdig. Waarom?
- De drie middelloodlijnen van een driehoek zijn concurrent. Waarom?
- De ligging van het middelpunt van een in/omgeschreven cirkel aan een driehoek. Waar?

Denkactiviteiten B': KD 1c

Hier wordt uitgelegd wat deductie is, wat postulaten, definities en stellingen zijn, en wat hun plaats is in een theorie. De theorie van de euclidische meetkunde wordt getoond.

Denkactiviteiten B: KD 1b

Aan de hand van een logisch schema van definities en stellingen wordt nagegaan aan welke eisen een definitie en stelling moeten voldoen.

Denkpisteplanning KD 2

De definitie van cirkel wordt eerst opgesteld. Uit de definitie van cirkel kan een eigenschap afgeleid worden over de afstand van een punt van de cirkel tot het middelpunt. Dit kan toegepast worden om te verklaren dat de tip voor de constructie van de gelijkzijdige driehoek klopt.

Abstracte formulering: KD 1a1 en 1a2 en KD 1c

Er wordt stilgestaan bij de formulering van wiskundige definities en stellingen. Tussen verschillende zinsdelen van een wiskundige bewering bestaat vaak een logisch verband. Ook wordt nagedacht over het logisch verband dat tussen wiskundige beweringen kan bestaan in een tekst. Logische afleidingsregels worden gexpliciteerd.

Denkactiviteiten C: KD 2

Het bewijs van de gelijkzijdigheid van driehoek PQR wordt erg formeel opgeschreven. Vertrokken wordt van de definitie van cirkel. Er wordt toegelicht wat een bewijs maken precies inhoudt en hoe je hierbij best tewerk kan gaan. Het waar zijn van uitspraken die je in een bewijs gebruikt, wordt vermeld. De niet-omkeerbaarheid van een implicatie wordt besproken. Ook hoe een implicatie bewezen moet worden, komt aan bod.

Abstracte theorie: KD 1c en KD 2

Het bewijs voor de gelijkzijdigheid van driehoek PQR wordt erg formeel uitgeschreven.

12.7.4 Een lessenreeks voor Waver

Voor de uitgewerkte lessenreeks, de powerpointpresentatie en de werktekt zie bijlage C.1.

Hoofdstuk 13

Faze van het lesexperiment te O.L.Vr.-Waver

13.1 Planning van het lesexperiment

Het lesexperiment te O.L.Vr.-Waver vindt plaats in maart 2011. Eerst geef ikzelf drie lessen zoals beschreven in 12.7.4. Van deze lessen worden geluidsopnames gemaakt. Een week na het geven van de lessen zullen twee leerlingen geïnterviewd worden. Tijdens dit interview worden gegevens verzameld over hun kijk op deductie.

13.2 Geven van de lessenreeks

Tijdens drie lesuren worden de lessen gegeven aan 4latA op 15, 16 en 17 maart 2011. De lessen worden gegeven door mezelf. Vera Mues is steeds aanwezig. In 14.1 beschrijf ik het lesverloop te O.L.Vr.-Waver. Ik doe dit aan de hand van de geluidsopnames van deze lessen. Deze bevinden zich in bijlage C.2.2.

13.3 Interviews na het geven van de lessenreeks

Tijdens de middagpauze op respectievelijk 22 en 24 maart 2011 neem ik een interview af van leerling W11 en leerling W18. Dit zijn twee middelmatig sterke leerlingen uit 4latA waarbij ik zal nagaan welke kijk op deductie ze hebben. Tijdens het interview zoekt de leerling naar een oplossing voor opdrachten die ik hem geef. In bijlage C.5.1 staan deze opdrachten volledig beschreven, met een modeloplossing. Hieronder som ik deze opdrachten op in het kort.

Probleem 1. Vertrekkend van het geitjesprobleem zal ik op de definitie van cirkel nagaan of de leerling beter beseft wat een implicatie en equivalentie inhouden. (KD 1a1 en KD 1a2)

Probleem 2. De leerling moet zelf een eigenschap vinden en bewijzen over de omtrekshoek op een middellijn van een cirkel. Doorheen de oplossing van dit probleem zoek ik naar de kijk van de leerling op bewijzen. (KD 1c,d en KD 2)

Hoofdstuk 14

Verwerking van de gegevens

14.1 Verwerking van de geluidsopnames van de lessen

1. Uit de geluidsopnames van de gegeven lessen (zie bijlage C.2.2) selecteer ik de lesmomenten die relevant zijn voor het onderzoek naar de kijk van de leerlingen van 4latA op deductie. Hieronder typ ik deze stukken uit. In rood geef ik aan op welk aspect van de KD's ik tijdens het beschouwde lesonderdeel werk. In groen geef ik het deelaspect aan van de KD van een of meer leerlingen die tot uiting komt in het lesonderdeel.

   LES 1.

   De leerlingen zetten op mijn vraag een kaartje met hun naam op de bank. Ze gebruiken potlood, passer en liniaal, en hun werktekst. Ik noteerde op voorhand de vraag op bord: kan een graancirkel geconstrueerd worden door mensenhanden? De leerlingen beluisteren de twee filmpjes van de canvasreportage. Ze besluiten aan de hand van een vraaggesprek wat de drie eisen zijn voor het maken van een graancirkel. Ik schrijf ze op bord en vertaal deze drie eisen als de drie postulaten van Euclides uit de euclidische meetkunde.(KD 1d)

   De leerlingen kennen de benaming van euclidische meetkunde niet. Ze vernoemen wel axioma's (KD1d). Ik toon hen een aantal foto's van oude manuscripten met euclidische meetkunde erop. Ook het tweede boek van Dijksterhuis toon ik even, en laat het doorgaan. Wiskundige theorieën kennen hier hun startpunt. Ik toon de vijf postulaten en axioma's van Euclides en vertel er over (KD1d).

   Op een schets van de Harlekijn (op werktekst en op powerpoint) ontdekken we cirkels, lijnen, driehoek. De symmetrie van de figuur wordt nagegaan en drie symmetrieassen worden ontdekt. De leerlingen merken op dat de kleur in meetkunde niet van belang is. Dat deze drie assen snijden in een punt gelooft iedereen behalve leerling W1 (KD2c). De leerlingen mogen nu proberen op een blanco vel de figuur van de Harlekijn te construeren met passer en liniaal. Iedereen begint met de grote cirkel. De volgende stap is dan het tekenen van de grote driehoek in de grote cirkel.

   Voor de constructie van deze gelijkzijdige driehoek zonder hoeken of zijden te meten hebben de leerlingen geen goede oplossing. Sommige leerlingen hebben de tekening van de Harlekijn met de hand gemaakt, maar ze kozen vrij hun punten of afstanden, en hielden geen rekening met de postulaten (KD1c). Er wordt gewezen op de samenhang tussen de stralen en puntposities en zodanig geef ik een tip voor de oplossing. Ik teken aan bord, en de leerlingen tekenen stap per stap de constructie van de gelijkzijdige driehoek mee. Dat de postulaten gerespecteerd worden, wordt telkens nagegaan.

LES 2.

Ik vraag de leerlingen om zich in een halve cirkel neer te zetten om hen meer te betrekken bij de les. Ze hoeven enkel hun hersenen te gebruiken en hebben geen werktekst of schrijfgerief nodig. Ik vraag hen veel te reageren op vragen en zeg hen dat ze niet bang moeten zijn om fouten te maken (KD 2). Naamkaartjes worden opgespeld en ik oefen hun namen in het begin van de les.

Leerling W1 vraagt naar het waarom van de naamgeving van de Harlekijn. Ik herhaal even dat de constructie van een graancirkel niet zo eenvoudig is en aan welke constructievoorschriften we ons moeten houden. Aan de hand van schetsen op powerpoint toon ik de leerlingen stapsgewijs hoe vanuit de tip de Harlekijn geconstrueerd kan worden. De leerlingen volgen op het computerscherm. Iedereen is op de constructie dadelijk akkoord dat de getekende driehoek gelijkzijdig is (KD 1c). Ik moet hen even wakker schudden en vraag waarom dit zo is. Ze mogen erover nadenken. Ik vraag of ze het geloven omdat ze het zien of omdat het zo moet zijn. Ik vraag waarom (KD 2a en 2c).

We vervolgen de constructie en werken telkens volgens de postulaten van Euclides. Zo worden de termen ingeschreven en omgeschreven cirkel geïntroduceerd. De vraag naar het middelpunt van een ingeschreven cirkel wordt gesteld. Als antwoord komt van iedereen dat dit het snijpunt is van de drie lijnen (KD 2c). Voor we dit als middelpunt kunnen nemen moeten we wel weten of ze in een punt snijden. Zo komt de vraag waarom ze snijden in een punt (KD 2a). Aan de hand van de constructie ontdekt een leerling waarom de drie lijnen middelloodlijnen moeten zijn van de gegeven driehoek en ze legt dit uit aan de rest van de klas (KD 2e). Ik stel de vraag waarom de drie middelloodlijnen van een willekeurige driehoek in een punt snijden, en of we hiervoor mogen afgaan op een schets. Het feit dat de leerlingen zonder papier en pen in een kring zitten duidt erop dat dit kan aangetoond worden door te redeneren (KD 2c).

Ik wijs hier op de werkwijze van een wiskundige: waarom zijn de dingen zoals ze zijn en wat gebeurt er als ik een beetje verander? Omgeschreven cirkel wordt geïntroduceerd en de vraag naar de positie van het middelpunt van een omgeschreven cirkel aan een driehoek stelt zich. Ik vertel kort dat de drie waarom-vragen, vragen zijn die pas van in de derde eeuw voor Christus beantwoord werden. Euclides ontwikkelde een methode om daarop antwoord te geven door te vertrekken vanuit definities, axioma's en postulaten (KD 1d). Aan de hand van powerpoint wordt de deductieve denkmethode toegelicht. Definitieschema van de 23 eerste definities wordt getoond (KD 1d).

De definitie van cirkel wordt teruggevonden. Aan de hand van cirkelvormige voorwerpen die de leerlingen op zak hebben, leiden we eigenschappen af. Leerling W7 antwoordt dat een cirkel geen hoeken heeft, en leerling W4 zegt dat alle punten even ver van het midden liggen. Op bord noteer ik de eerste zin: "als een figuur een cirkel is dan liggen alle punten even ver van het midden" (KD 1a2). Leerling W16 herhaalt de definitie van cirkel. Ik noteer dit op bord: "als alle punten even ver van een gegeven middelpunt liggen dan is de figuur een cirkel" (KD 1a2).

Daarna wordt de vorm van de twee zinnen op bord vergeleken. Enkele leerlingen vergelijken de twee zinnen qua inhoud, hoewel ik expliciet naar de vorm vroeg (KD 1a1 en 2). Leerling W7 denkt dat de eerste zin eerder een eigenschap is en de tweede een definitie. Een wiskundige uitspraak zoals deze twee is vaak opgebouwd uit verschillende stukken die verbonden worden door een logisch voegwoord: en, als...dan, asa, of. Leerling W8 stelt voor om bij de eerste zin asa te zetten, en bij de tweede zin stelt leerling W4 voor om 'als…dan' te gebruiken. Ik laat leerling W16 de formulering met deze voegwoorden geven (KD 1a).

Dan bespreken we de omkeerbaarheid van de implicatie. Vraag is of dit twee maal hetzelfde zegt (KD 1a1). Volgens leerling W13 maakt het niet uit. Leerling W8 denkt dat je niet mag omdraaien en ze geeft een goede verklaring. Leerling W7 denkt dat je bij een definitie niet mag omdraaien maar bij een eigenschap wel. Er is verwarring over kenmerken (KD 1a1 en 1a2). Ik leg uit dat wanneer de twee pijlen gelden, dat dan een definitie of kenmerk wordt verkregen. De betekenis van een implicatie in de dagelijkse omgangstaal wordt vergeleken met die uit wiskunde (KD 1a1 en 1a2).

LES 3

De les vangt aan met het tonen van de constructie van een gelijkzijdige driehoek zoals ze geformuleerd en bewezen staat in een oud Nederlands manuscript van de Elementen(KD 1b). Het bewijs is in woorden geschreven, omdat de logica van een redenering zo beter wordt weergegeven(KD 2b). We zoeken samen naar dit bewijs vanuit de definitie van cirkel (KD 2).

Je kan deze definitie gebruiken als basiswaarheid door uit de waarheid van de 'asa' de waarheid van de twee pijlen af te leiden (KD 1a1 en 1a2). Op bord bevestig ik met een magneetje papieren met de volgende zinnen op: "Een cirkel is een verzameling punten die…" en "Als een punt behoort tot een cirkel dan is de afstand van een punt tot…". Ik vertel: "gisteren zagen we een constructie van een gelijkzijdige driehoek op basis van het lijnstuk PQ. We trokken de cirkel C_p door Q en met middelpunt P en een cirkel C_q met middelpunt Q en door P. Het snijpunt noemen we R en de driehoek PQR zal gelijkzijdig zijn." Opdracht voor de leerlingen is van hieruit de belangrijke zinnen te halen (KD 2e1). Dit gaat niet vlot. Ik bevestig de verschillende onderdelen op bord met magneetjes. Tussen de verschillende zinnen (papieren) zetten we logische woordjes (KD 1).

De leerlingen zetten een 'en' tussen de eerste vier uitspraken (KD 1a). Het verschil tussen de eerste vier uitspraken en "de gelijkzijdigheid van de driehoek" is volgens een leerling dat de eerste vier gegeven zijn en de laatste een te bewijzen (KD 1a1). Tussen de eerste vier en de laatste is een 'als…dan' verband (KD1). Zo verkrijgen we de eerste stelling (KD 2e.1). Ik licht bewijzen toe als aantonen van een uitspraak dat het een waarheid is (KD 1c). Van een 'als…dan' bewijs je dat ze waar is, tenzij de oorzaak waar is en het gevolg vals (KD 1a1). Het eerste deel wordt door de leerlingen als gegeven beschouwd en de laatste als te bewijzen (KD 1a1 en 1c). Leerling W4 geeft een equivalente uitspraak voor gelijkzijdigheid van driehoek PQR (KD 2). Zo wordt de bewering van gelijkzijdigheid vervangen door een papiertje met de uitspraak "$PQ = QR = PQ$" (KD 1c). De globale uitspraak van de vier papieren met de 'en' ertussen is waar. Dus zijn de papieren op zich ook waar (de 'en' wordt overal tussenuit gehaald) (KD 1c).

De meisjes kregen een papier met een * en de jongens met een hartje. De leerlingen moeten het bewijsje zelf vervolledigen. (KD 2e). Ik geef eerst de twee stappen aan van het bewijs. De meisjes met een *-papier moeten aantonen dat C_p de straal $|PQ|$ heeft en C_q straal $|PQ|$ heeft. Ze kregen hiervoor papieren met de nodige beweringen erop, maar deze papieren zitten niet in de juiste volgorde. De meisjes moeten hun beweringen in de juiste volgorde op bord bevestigen met een magneetje. De jongens doen analoog het tweede deel van het bewijs (KD 2e.4). Daarna legt één van de meisjes en één van de jongens uit waarom deze volgorde logisch verantwoord is. Ik expliciteer telkens de 'afleidingsregel' die gebruikt wordt, en die de klas 'logisch' vindt. Zo wordt benadrukt dat alle papieren waarheden zijn, en dat er moet overgegaan worden van een beginwaarheid (die al op bord staat) naar een eindwaarheid. Voor deze taak mogen de leerlingen overleggen en hun eigen logisch inzicht gebruiken (KD 2e.4). De overgangen die de leerlingen maken in hun hoofd, noem ik als logische afleidingsregels. Leerling W10 legt voor de jongens uit waarom elke overgang gemaakt wordt (KD 2e.4). Ik benoem de overgangen als: 'een uitspraak vervangen door een gelijkwaardige uitspraak' of 'een en opsplitsen'. Leerling W7 zoek de volgende overgang te ver. Leerling W8 verklaart de logische overgang als een toepassing op een concreet geval van de definitie van cirkel. Op mijn vraag of we ook mogen generaliseren antwoordt leerling W3 neen (KD 1c).

In de laatste stap van het eerste bewijsje stellen we vast dat de oorzaak van een 'als. . . dan' geldt en dat het gevolg dan ook geldt (KD 1c). Leerling W1 en leerling W8 doen de uitleg van het tweede bewijsje. Ik benadruk dat alle waarheden uit de voorkennis gebruikt mogen worden in een bewijs (KD 2). De leerlingen beseffen dat een waarheid niet uit een tekening maar uit het gegeven gehaald moet worden. De meisjes geven de verschillende stappen in de juiste logische volgorde. Ik benoem weer de denkstappen door de logische afleidingsregels te benoemen (KD 1c). Ik vat het bewijs kort samen als: "door de definitie van cirkel weten we dat". De twee deelbewijsjes leveren samen het bewijs. Leerling W15 vervolledigt het bewijs. Ik verwijs terug naar het bewijs van het oude manuscript.

De leerlingen gaan nu terug naar hun plaatsen en moeten een bewijs geven voor het tweede probleem, namelijk de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een driehoek. Dit gebeurt aan de hand van de werktekst met de schets op pagina 8. Het probleem wordt door mezelf kort voorgesteld. Bewijzen is verklaren waarom het zo is. In wiskunde kan dat door van beginwaarheid naar eindwaarheid te gaan en ondertussen logische afleidingsregels te gebruiken (KD 1d). Hoe formuleerde Euclides zijn bewijs? Ik herhaal de werkwijze van het vorig bewijs. De leerlingen moeten de probleemstelling eerst herschrijven op een logische wijze. Leerling W16 herschrijft de probleemstelling correct aan bord. "Als l, m en n de middelloodlijnen zijn van PQR, dan snijden ze elkaar in een punt" De klas fungeert als jury. Ik vraag naar wat we moeten aantonen als we deze 'als. . . dan' bewezen moet worden. Leerling W18 antwoordt hierop juist. Ik beschrijf de twee stappen die het bewijs uitmaken. De leerlingen links moeten deel 1 bewijzen en de leerlingen rechts deel 2. Daarna moeten ze hun deel aan elkaar aantonen en elkaar overtuigen van de waarheid. De leerlingen werken hier individueel aan (KD 2). De verbetering van de werktekst komt op smartschool.

2. In groen gaf ik het deelaspect aan van de KD die blijkt uit het omschreven lesonderdeel. Vanuit de evaluatienormen voor de KD's uit 12.3 geef ik een waardeoordeel aan de leerlingen van 4LatA voor KD 1a1 en 2 en KD 1b.

   In les 2 gebruiken de leerlingen een implicatie voor het formuleren van een definitie. Bij het vergelijken van een implicatie en haar omgekeerde kijken ze naar de inhoud alhoewel ik naar de vorm vroeg. De meeste leerlingen denken dat een implicatie steeds omkeerbaar is en weten niet wanneer ze in een uitspraak een asa' of een 'als. . . dan' moeten zetten. Zowel voor KD1a1 als KD1a2 scoren ze een – –.

   In les 1 geloven alle leerlingen behalve leerling W1 dat de drie symmetrieassen van de Harlekijn snijden in een punt. Ze nemen dit aan omdat het op de schets zo is. Ook is iedereen dadelijk akkoord dat de geconstrueerde driehoek PQR gelijkzijdig is omdat ik het zeg of omdat het zo blijkt op de schets. Ze scoren een – – voor KD 1b.

14.2 Verwerking van de gegevens uit de interviews na de lessenreeks

1. De interviews die werden afgenomen bij leerling W18 en leerling W11 na het geven van de lessenreeks, werden in de bijlagen C.5.2 en C.5.3 volledig uitgetypt. Ook worden hier de deelopdrachten gecodeerd volgens de deelaspecten van de KD's uit 12.2.

2. Tijdens deze interviews test ik opnieuw KD 1a1, KD 1a2, KD 1b, KD 1c, KD 1d en KD 2 zoals beschreven in 12.2. De codering van de uitspraken van de leerling gebeurt door zijn uitspraken te markeren in de kleur van de bijpassende KD. Deze markeringen per KD zijn aangegeven in de bijlage met de uitgetypte versie van elk interview.

   Voorbeeld

   KD 1a1 KD 1a2 KD 1b KD 1c KD 2

   H Kan je dat met een 'als. . . dan' of een 'en' of een 'asa' schrijven, leerling W11?
   M Als alle punten wacht he. . . euhm. . . een figuur is een cirkel asa alle punten van de figuur op dezelfde afstand van een gegeven punt liggen.
   H Waarom niet?
   M Omdat die afstand altijd anders is. Een cirkel rond één punt of. . . want rond één punt dat

   H Is dat met andere woorden allebei een definitie voor cirkel?
   L Ik denk van wel.
   H Maakt dat uit op hoeveel tekeningen je dat nagaat? Of is het voldoende op één tekening, om dat na te meteen: het is 90°. Gaat dat ons overtuigen van de waarheid van deze zin?
   L Ik zou dat precies. . . zo precies is dat toch genoeg om dat met één cirkel te doen. Maar ja je kan altijd nog een kleinere proberen.

3. Aan de hand van 12.2 en voorgaande codering wordt een evaluatie opgesteld voor de kijk op deductie van elke leerling. Deze staat uitgewerkt in bijlage C.5.4.

   Voorbeeld.

   Leerling W11 beseft dat een bewijs opstellen diep logisch nadenken vergt. In bewijzen gebruik je volgens hem beweringen die al bewezen zijn, waardoor je weet dat ze waar zijn. Een is-definitie is minder bruikbaar dan een asa-definitie in een bewijs. Een bewijs in woorden geeft volgens hem meer de logische redenering weer dan symbolen. Hij krijgt + + voor KD 1c.

   Leerling W18 vindt de juiste 'is-formulering' en de juiste 'asa-fomulering' van de definitie van cirkel. Toch blijkt ze te geloven dat kaartje 1 en 4 gelijkwaardig zijn. Een pijl in een richting volstaat volgens haar om een equivalentie te krijgen. . . Om de bewering aan te duiden die ze gebruikt om de cirkelbeweging van het geitje vast te stellen, weet ze niet of ze de asa of een van de enkele pijlen moet kiezen. Wanneer ik haar zeg dat ze niet meer moet kiezen dan nodig, maakt ze de juiste keuze. Ze krijgt een – voor KD 1a2.

4. De resultaten van beide interviews zet ik in tabel 14.1

	Leerling W11	Leerling W18
KD 1a1	+ +	+
KD 1a2	+ +	−
KD 1b	+	0
KD 1c	+ +	0
KD 2	+ +	0

Tabel 14.1: De resultaten van de interviews na de lessenreeks te O.L.Vr.-Waver

5. Besluiten

   Beide leerlingen weten hoe een implicatie bewezen kan worden en dat ze niet steeds omkeerbaar is. Ook kunnen ze de juiste 'als. . . dan'-formulering voor een uitspraak vinden. Leerling W11 kent de betekenis van een equivalentie volledig, maar leerling W18 beseft nog niet dat een equivalentie de twee implicaties inhoud. Dat een stelling waar moet zijn voor alle gevallen, beseffen ze allebei. Beide leerlingen geloven dat een bewijs de waarheid van een bewering nagaat. Leerling W11 beseft bovendien de logische opbouw en het feit dat een bewijs bestaat uit waarheden. Dat een bewijs zelf gemaakt kan worden door vanuit het gegeven naar het te bewijzen toe te werken, geloven beide leerlingen. Leerling W11 beseft bovendien dat je hiervoor zelf eigenschappen moet selecteren en dat je het bewijs logisch moet opbouwen.

Hoofdstuk 15

Interpretatie van de bevindingen bij het onderzoek

15.1 Een vergelijking van de gevonden resultaten met de verwachtingen van het onderzoek

15.1.1 Vaststelling van de veranderingen die optraden in de kijk op meetkunde van de leerlingen van 4latA

Uit een vergelijking van de resultaten van de interviews voor en na de lessenreeks (zie tabellen 12.2 en 14.1) blijkt dat de resultaten voor de KD's na de interviews veel positiever zijn dan die van voor de lessenreeks. Wanneer ik de twee samenvattende tabellen vergelijk, merk ik dat de – – volledig verdwenen is en heel wat + + tevoorschijn komen na de lessenreeks.

Voor KD 1a1 (implicatie) veranderen – en – in + + en +. Voor KD 1a2 (equivalentie) veranderen 0 en – in + + en –. Tijdens de lessenreeks bleken de leerlingen zelfs een – – voor KD 1a1 en 1a2 te scoren (zie 14.1). Voor KD 1b (stelling waar in alle gevallen) worden 0 en 0 vervangen door + en 0. KD 1b leverde tijdens de lessenreeks zelfs een – – op (zie 14.1). Voor KD 1c (wat een bewijs is) veranderen 0 en 0 in + + en 0. Voor KD 2 (zelf bewijzen opbouwen) worden + en – – vervangen door + + en 0.

Net zoals bij het onderzoek te Berlaar moeten we deze resultaten relativeren. Er werden immers slechts twee leerlingen ondervraagd, wat niet echt representatief is voor een hele klas. Ook één klas is niet representatief voor 'alle leerlingen'. Maar de resultaten kunnen wel als een positieve indicatie gezien worden voor de evolutie van de kijk op deductie.

15.1.2 Hoe draagt de lessenreeks bij tot deze veranderingen in de kijk op meetkunde van de leerlingen van 4latA?

In 14.1 geef ik aan in rood op welk aspect van de KD's ik tijdens het beschouwde lesonderdeel werk. Welk aspect hier juist voor de verandering heeft gezorgd, kunnen we niet weten.

KD 1a1

- Wat gebeurt er om KD 1a1 te voeden?

    1. Tijdens les 2 noteer ik op bord de eerste zin: "als een figuur een cirkel is dan liggen alle punten even ver van het midden" en de tweede zin: "als alle punten even ver

van een gegeven middelpunt liggen dan is de figuur een cirkel". Daarna wordt de vorm van deze twee zinnen vergeleken. Ik wijs de leerlingen erop dat een wiskundige uitspraak vaak opgebouwd is uit verschillende stukken die verbonden worden door een logisch voegwoord: en, als. . . dan, asa, of.

2. De omkeerbaarheid van een implicatie wordt besproken. Ik leg uit dat wanneer de twee pijlen gelden, een definitie of kenmerk wordt verkregen. De betekenis van een implicatie in de dagelijkse omgangstaal wordt vergeleken met die uit wiskunde.
3. We zoeken samen naar het bewijs van de gelijkzijdigheid van driehoek PQR vanuit de definitie van cirkel. Je kan deze definitie gebruiken als basiswaarheid door uit de waarheid van de 'asa' de waarheid van de twee pijlen af te leiden.
4. Van een 'als. . . dan' bewijs je dat ze waar is, tenzij de oorzaak waar is en het gevolg vals.

- Deze pogingen om KD 1a1 te voeden zijn erg succesvol.

  Bij het vergelijken van de waarde voor KD 1a1 tijdens de interviews voor en na de lessenreeks blijkt −, − te wijzigen in + +, +. Volgens 12.3 betekent dit dat de leerling na het krijgen van de lessenreeks niet meer gelooft dat een implicatie steeds omkeerbaar is, en dat hij voor een gegeven uitspraak steeds de juiste implicatie opschrijft. Ook weet hij hoe een implicatie bewezen moet worden. Over contrapositie hadden we het niet expliciet in de lessenreeks. Uit de interviews blijkt dat dit door de leerlingen niet gekend is.

  Tijdens de lessenreeks zelf blijkt dat de leerlingen de betekenis van een implicatie eerst helemaal niet goed kennen. Tijdens les 3 geeft leerling 16 een goede beschrijving voor het nieuwe probleem.

KD 1a2

- Wat gebeurt er om KD 1a2 te voeden?

  1. Tijdens les 2 wordt de definitie van cirkel teruggevonden. Op bord noteer ik de eerste zin: "als een figuur een cirkel is dan liggen alle punten even ver van het midden". Leerling 16 herhaalt de definitie van cirkel. Ik noteer dit op bord: "als alle punten even ver van een gegeven middelpunt liggen dan is de figuur een cirkel".
  2. Ik leg tijdens les 3 uit dat wanneer de twee pijlen gelden, dat dan een definitie of kenmerk wordt verkregen. Ook geef ik aan dat de definitie van cirkel gebruikt wordt om uit de waarheid van deze 'asa' de waarheid van de twee pijlen af te leiden.

- De pogingen om KD 1a2 te voeden zijn succesvol.

  KD 1a2 werd zowel voor als na de lessenreeks getest door interviews en blijken te evolueren van 0 en - in + + en -. Voor een van beide leerlingen is er dus een verbetering.

KD 1b

- Wat gebeurt er om KD 1b te voeden?

  In les 1 wordt de schets van de Harlekijn besproken. Alle leerlingen behalve leerling W1 geloven dat de drie symmetrielijnen concurrent zijn omdat het zo op de schets is getekend. Ik feliciteer leerling W1 omdat alleen zij beseft dat een schets onbetrouwbaar is. In les 2 gelooft iedereen dadelijk dat de geconstrueerde driehoek gelijkzijdig is. Ik vraag of ze het geloven omdat ze het zien of omdat het zo moet zijn.

- De pogingen om KD 1b te voeden zijn matig succesvol.

  De scores evolueren van 0 en 0 naar + en 0. Er is dus een kleine verbetering.

KD 1c

- Wat gebeurt er om KD 1c te voeden?

  1. Voor we het snijpunt van de drie middelloodlijnen van een driehoek als middelpunt kunnen nemen voor de omgeschreven cirkel moeten we wel weten of deze middelloodlijnen in een punt snijden. Ik stel in les 2 de vraag waarom dit zo moet zijn, en niet waarom dit zo is. Ook vraag ik naar het waarom van de gelijkzijdigheid van de geconstrueerde driehoek.
  2. Voor het begin van les 2 en 3 moedig ik de leerlingen aan om kritischer te zijn. Ze kunnen niet noteren doordat ze vooraan in een halve cirkel zitten. Ze kunnen alleen nadenken.
  3. Ik vertel kort dat de drie waarom-vragen, vragen zijn die pas van in de derde eeuw voor Christus beantwoord werden. Dit gaf aanleiding tot de deductieve denkmethode in de wiskunde.

- Deze pogingen om KD1c te voeden zijn matig succesvol.

  Tijdens de lessenreeks blijken de leerlingen van 0, 0 te evolueren naar + + en 0. Dit betekent weer een verbetering.

KD 2

- Wat gebeurt er om KD 2 te voeden?

  1. In les 2 vraag ik de leerlingen om zich in een halve cirkel neer te zetten om hen meer te betrekken bij de les. Ze hoeven enkel hun hersenen te gebruiken en hebben geen werktekst of schrijfgerief nodig. Ik vraag hen veel te reageren op vragen en zeg hen dat ze niet bang moeten zijn om fouten te maken. Naamkaartjes worden opgespeld en ik oefen hun namen in het begin van de les.
  2. Aan de hand van de constructie in les 2 ontdekt een leerling waarom de drie symmetrielijnen van de Harlekijn middelloodlijnen moeten zijn van de gegeven driehoek en ze legt dit uit aan de rest van de klas.
  3. In les 3 toon ik eerst een oude versie van het bewijs voor de gelijkzijdigheid dat in woorden geschreven is.
  4. Aan bord zoeken de leerlingen samen naar het bewijs voor de gelijkzijdigheid van driehoek PQR vanuit de definitie van cirkel. Om te motiveren zet ik de jongens en de meisjes in een groep.
  5. De verschillende uitspraken die het bewijs opbouwen worden op aparte papieren geschreven die op bord bevestigd kunnen worden met een magneetje. Tussen deze uitspraken kunnen verschillende voegwoorden (ook op papier) gezet worden, en ze kunnen op bord verplaatst worden.
  6. De afleidingsregels worden door de leerlingen zelf gevonden en uitgelegd, en daarna door mijzelf benoemd en genoteerd in kleur op bord.

- Deze pogingen zijn erg succesvol.

  De scores voor KD 2 gaan van + en − − naar + + en 0.

15.1.3 De verwachtingen die gesteld werden evolueerden tijdens het onderzoek

Door expliciet aandacht te geven aan de vorm van wiskundige uitspraken en wiskundeteksten, hoop ik het logisch deductief denken van de leerlingen te verbeteren. De deelaspecten waarop ik dit wens te doen benoemde ik als KD's.

15.1.4 Een vergelijking van de gevonden resultaten met de verwachtingen

1. In plaats van KD 1a1, 1a2, 1b, 1c ,1d en KD 2 werden KD 1a1, 1a2, 1b,1c en KD2 effectief onderzocht.

2. Het verwerken van de onderzoeksgegevens verliep veel vlotter door een aangepaste werkwijze.

15.2 Verklaringen voor het verschil tussen verwachtingen en bevindingen

1. KD 1d werd niet uitvoerig onderzocht.

   Een verantwoording hiervoor is het feit dat KD 1d voor leerlingen bestemd is die uitspraken als studieobject kunnen zien en weten dat deze een waarheidswaarde hebben. Uit het onderzoek naar de beginsituatie bleek dat basiskennis van logica helemaal ontbrak en leek een bevraging van afleidingsregels mij wat te vergaand.

2. Dat de verwerking vlotter verliep wijt ik aan goede deelaspecten van de kijk op deductie. Hier droeg de ervaring uit Berlaar en de nieuwe en meer gerichte literatuurstudie aan bij.

15.3 Besluiten uit het onderzoek te O.L.Vr.-Waver

Uit de resultaten voor en na het geven van de lessenreeks te O.L.Vr.-Waver blijkt dat de kijk op deductie van de ondervraagde leerlingen verbeterde voor de deelaspecten 1a1, 1a2, 1b, 1c en 2. KD 1d werd niet expliciet ondervraagd voor de lessenreeks omdat uit de observaties vooraf bleek dat de leerlingen te weinig ervaring hadden met bewijzen. Deze resultaten kunnen gezien worden als een indicatie voor een verbetering van deze deelaspecten van KD. Het aantal geïnterviewde leerlingen is echter te klein om representatief te kunnen zijn voor de klas of voor ASO.

Deel V

Besluiten uit de twee onderzoekscycli

“Hoe draagt de voorgestelde lessenreeks over de cirkel bij tot een positieve kijk van de leerlingen op wiskunde in het algemeen en in het bijzonder op euclidische meetkunde?” Op deze vraag werd aan de hand van dit onderzoek een antwoord gezocht. Bij het opstellen van de lessenreeks werd gesteld dat het expliciteren van klasnormen, het uitzoeken van goede lesmaterie en het hanteren van een geschikte didactische methode ten goede zouden komen aan de kijk op meetkunde van de leerlingen.

In Berlaar werd tijdens de wiskundelessen van 4D1E onderzocht hoe de lessenreeks voor Berlaar bijdroeg tot de verbetering van de aspecten EK 2, 3, 4, 5, 7’, 10, 13d en 14 van de kijk op meetkunde. Het betrof hier de verschillen van onze leefruimte met de euclidische ruimte, de doeltreffendheid van deductie bij het probleemoplossen, het doel en wezen van definities en stellingen, het zelf ontdekken van een bewijs, het belang van historiek en filosofie in euclidische meetkunde, de toepasbaarheid van meetkunde en de betekenis van een euclidische schets. Vanwege het kleine aantal ondervraagde leerlingen zijn deze positieve resultaten slechts een indicatie voor het gunstige effect van de lessenreeks. Hoe deze invloed juist tot stand kwam is uit het onderzoek niet echt af te leiden. Wel kan globaal gesteld worden dat de gehanteerde klasnormen, de behandelde materie en de realistische onderwijsmethode hiertoe bijgedragen hebben.

In O.L.Vr.-Waver besloot ik mezelf te beperken tot het onderzoek van enkele deelaspecten van de kijk op deductie. Ik vroeg mezelf af hoe de lessenreeks voor Waver bijdroeg tot een verbetering van de kijk op deductie van de leerlingen van 4LatA. Ik stelde vast met interviews van twee personen dat KD 1a1, 1a2, 1b , 1c en KD2 verbeterden na de lessenreeks. De juiste betekenis van een implicatie en equivalentie was beter gekend, de waarheid van een stelling werd beter begrepen, en het geloof in het bestaan van logische afleidingsregels ontstond. Het verschil tussen axioma, postulaat en definitie werd duidelijker en de beliefs die vereist zijn voor het zelf maken van een bewijs verschenen. Ook deze resultaten zijn slechts een indicatie voor de juistheid van de hypothese dat de kijk op meetkunde verbeterbaar is door klasnormen, materiekeuze en onderwijsmethode.

Welke van deze factoren de grootse bijdrage had tot de verbetering van de kijk op meetkunde, moet nog onderzocht worden. Analoog onderzoek op een veel grotere schaal is nodig om meer representatief te zijn en aan betekenis te winnen. Een samenwerking van verschillende onderzoekers is gewenst om de subjectiviteit van de interpretaties te verkleinen. Verder moet het probleemoplossingsgedrag van leerlingen geobserveerd worden om te zien welke de invloed van een verbetering van beliefs juist is.

Ook op het terrein van affectieve beliefs moet nog gewerkt worden, om voorgoed af te rekenen met wiskundevrees, demotivatie, slinkend zelfvertrouwen en een dalend zelfbeeld ten gevolge van de wiskundelessen. Wiskunde mag niet als selectiemiddel gebruikt worden, en moet voor de leerlingen een kans zijn om hun creativiteit en talenten te ontplooien.

De lessenreek over de Harlekijn is een bijproduct van dit onderzoek dat als inspirerend voorbeeld voor anderen kan fungeren. De achterliggende ideeën en overwegingen kunnen in andere situaties toegepast worden. Op basis van beschikbare tijd en opgedane ervaring werd de lessenreeks verschillende keren bijgesteld. Een ander bijproduct is de expliciete omschrijving van de kijk op meetkunde die wenselijk is voor leerlingen van ASO. Deze omschrijving is in de loop van het onderzoek gegroeid vanuit voortdurende literatuurstudie en een analyse van de interviews met de leerlingen. Bij het zoeken naar de competenties die in wiskundeonderwijs gerealiseerd moeten worden, is zon omschrijving zeker zinvol.

Door de ervaring van tijdsgebrek in het onderzoek van de eerste cyclus, besloot ik de onderzoeksvraag in de tweede cyclus te beperken tot de studie van de kijk van leerlingen op deductie. Door de verkregen inzichten tijdens de eerste onderzoekscyclus kon ik concreter, diepgaander en meer gestructureerd werken. Dit maakte ook een grondiger voorbereiding van de tweede onderzoekscycus mogelijk waardoor de verwerking in de tweede cyclus veel vlotter en nauwkeuriger verliep dan in de eerste cyclus.

Deel VI

Bijlagen

Bijlage A

Schema's

A.1 Overzicht van de vooraf geziene leerstof.

Aan de hand van delta 1, 2A en B maak ik een samenvatting van de euclidische meetkunde die de leerlingen van 4ASO in het eerste en tweede jaar bestudeerden.

Loodlijnen

- Als twee rechten loodrecht staan op een derde, dan zijn ze evenwijdig.
- Als een rechte loodrecht staat op één van twee evenwijdigen, dan staat ze ook loodrecht op de andere.
- Als twee rechten evenwijdig zijn met een derde, dan zijn ze evenwijdig.
- De afstand van een punt tot een rechte is de afstand van dat punt tot het voetpunt van de loodlijn uit dat punt op die rechte.

Middelloodlijnen

- De middelloodlijn van een lijnstuk $[A, B]$ is de loodlijn op $[A, B]$ door het midden van $[A, B]$.
- Als een punt op de middelloodlijn van een lijnstuk ligt, dan ligt het even ver van beide eindpunten van dat lijnstuk.
- Omgekeerd, Als een punt even ver ligt van beide eindpunten van een lijnstuk, dan ligt het op de middelloodlijn van het lijnstuk.
- Samengevat, De middelloodlijn van een lijnstuk is de verzameling van alle punten die even ver liggen van beide eindpunten van het lijnstuk.
- Toepassing hierop is de constructie met passer en liniaal van de middelloodlijn van een lijnstuk.

Vierhoeken

- Een trapezium is een vierhoek die ten minste twee evenwijdige zijden heeft.
- Een parallellogram is een vierhoek waarvan de overstaande zijden evenwijdig zijn.
- Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden.
- Een vierkant is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier gelijke hoeken.

Driehoeken

- Een gelijkbenige driehoek is een driehoek die tenminste twee gelijke zijden heeft.
- In een gelijkbenige driehoek is de middelloodlijn van de basis de symmetrieas voor de driehoek.
- In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.
- In een gelijkbenige driehoek is de middelloodlijn van de basis eveneens de bissectrice van de tophoek, de hoogtelijn uit de top en de zwaartelijn uit de top.
- Een driehoek met twee gelijke hoeken is gelijkbenig.
- Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie gelijke zijden.
- Een gelijkzijdige driehoek heeft drie symmetrieassen.
- Elke hoek van een gelijkzijdige driehoek is 60°.
- Een rechthoekige driehoek is een driehoek waarvan een hoek recht is.

Cirkel

- Alle punten van een cirkel liggen op dezelfde afstand van het middelpunt van de cirkel. Die afstand is de straal van de cirkel.
- Een cirkelboog is een deel van een cirkel begrensd door twee punten.
- Een koorde is een lijnstuk waarvan de eindpunten op de cirkel liggen.
- Een middellijn van een cirkel is een rechte die door het middelpunt van de cirkel gaat.
- De diameter van een cirkel is de lengte van een middellijn.

Omtrek en oppervlakte.

- De oppervlakte van een figuur in een rooster kan je bepalen door het aantal roostervakjes te tellen of te berekenen.
- De omtrek van een figuur is de som van de lengten van de zijden.

Hoeken.

- Een hoek wordt gevormd door twee halfrechten met eenzelfde beginpunt. De halfrechten zijn de benen van de hoek. Hun beginpunt is het hoekpunt.
- Een rechte hoek is een hoek waarvan de benen loodrecht op elkaar staan.
- Een gestrekte hoek is een hoek waarvan de benen in elkaars verlengde liggen.
- Een nulhoek is een hoek waarvan de benen samenvallen.
- Een scherpe hoek is een hoek die kleiner is dan een rechte hoek.
- Een stompe hoek is een hoek die groter is dan een rechte hoek en kleiner dan een gestrekte hoek.
- Een inspringende hoek is een hoek die groter is dan een gestrekte hoek.
- De deellijn of bissectrice van een hoek is de rechte die de hoek in twee gelijke hoeken verdeelt.
- De bissectrices van een paar snijdende rechten zijn de bissectrices van de overstaande hoeken gevormd door deze snijdende rechten.
- Als een punt op één van de bissectrices van een paar snijdende rechten ligt, dan ligt het even ver van de beide rechten.
- Omgekeerd, Als een punt even ver ligt van twee snijdende rechten, dan ligt het op n van de bissectrices van de snijdende rechten.
- Samengevat, De bissectrices van een paar snijdende rechten vormen samen de verzameling van alle punten die even ver liggen van beide snijdende rechten.
- Toepassing is de constructie van de bissectrice van een hoek of een paar snijdende rechten met passer en liniaal.

Lijnen in een driehoek.

- Een hoogtelijn van een driehoek is een rechte die uit een hoekpunt loodrecht op de overstaande zijde wordt getrokken.
- Een zwaartelijn van een driehoek is een rechte die een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde.

Congruentie.

Figuren die elkaar volledig kunnen bedekken noemen we congruente figuren. De overeenkomstige zijden en hoeken van congruente figuren zijn gelijk.

Als twee evenwijdigen gesneden worden door een rechte, dan zijn twee overeenkomstige hoeken gelijk, twee verwisselende binnenhoeken zijn gelijk en twee binnen- of buitenhoeken aan dezelfde kant zijn elkaars supplement.

Omgekeerde eigenschappen:

- Als twee rechten met een snijlijn twee gelijke overeenkomstige hoeken maken, dan zijn die rechten evenwijdig.
- Als twee rechten met een snijlijn twee gelijke verwisselende binnen- of buitenhoeken maken, dan zijn die rechten evenwijdig.
- Als twee rechten met een snijlijn twee binnenhoeken aan dezelfde kant maken die elkaars supplement zijn, dan zijn die rechten evenwijdig.
- In een parallellogram is de som van de hoeken gelijk aan 360°.
- In een driehoek is de som van de hoeken gelijk aan 180°.
- In een vierhoek is de som van de hoeken gelijk aan 360°.
- In een n-hoek is de som van de hoeken gelijk aan $(n-2).180^\circ$.

Congruentiekenmerken voor driehoeken.

ZHZ Twee driehoeken zijn congruent als twee zijden van de ene driehoek gelijk zijn aan twee zijden van de andere driehoek en de ingesloten hoeken gelijk zijn.

HZH Twee driehoeken zijn congruent als een zijde van de ene driehoek gelijk is aan een zijde van de andere driehoek en de aanliggende hoeken twee aan twee gelijk zijn.

ZZZ Twee driehoeken zijn congruent als de drie zijden van de ene driehoek gelijk zijn aan de drie zijden van de andere driehoek.

ZZ90° Twee rechthoekige driehoeken zijn congruent als ze de schuine- en rechthoekszijde gelijk hebben.

Eigenschappen van vierhoeken als toepassing op de congruentiekenmerken van driehoeken.

- In een parallellogram zijn de overstaande zijden en hoeken gelijk. (hzh)
- De diagonalen in een parallellogram delen elkaar middendoor. (hzh)
- Een parallellogram is puntsymmetrisch met het snijpunt van de diagonalen als symmetriepunt.

Wanneer een vierhoek voldoet aan één van de volgende kenmerken, is hij een parallellogram:

- De overstaande zijden zijn evenwijdig.
- De overstaande zijden zijn gelijk.
- De overstaande hoeken zijn even groot.
- De diagonalen delen mekaar middendoor.
- Twee overstaande zijden zijn evenwijdig en even lang.

Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken.

- Een rechthoek is een parallellogram omdat de overstaande hoeken gelijk zijn.
- Bijgevolg gelden alle eigenschappen van een parallellogram ook voor rechthoeken:
  - De overstaande zijden zijn evenwijdig.
  - De overstaande zijden zijn gelijk.
  - De overstaande hoeken zijn even groot.
  - De diagonalen delen mekaar middendoor.
  - Een rechthoek is puntsymmetrisch met het snijpunt van de diagonalen als symmetriepunt.
- In een rechthoek zijn de diagonalen even lang.
- Een rechthoek is lijnsymmetrisch met de middelloodlijnen van de overstaande zijden als symmetrieassen.

Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden.

- Een ruit is een parallellogram omdat de overstaande zijden gelijk zijn.
- Bijgevolg gelden alle eigenschappen van een parallellogram ook voor een ruit:
  - De overstaande zijden zijn evenwijdig.
  - De overstaande zijden zijn gelijk.
  - De overstaande hoeken zijn even groot.
  - De diagonalen delen mekaar middendoor.
  - Een rechthoek is puntsymmetrisch met het snijpunt van de diagonalen als symmetriepunt.
- In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar.
- Een ruit is lijnsymmetrisch met de diagonalen als symmetrieassen.

Een vierkant is een vierhoek met vier gelijke hoeken en vier gelijke zijden.

- Een vierkant is een parallellogram omdat de overstaande hoeken gelijk zijn.
- Een vierkant is een rechthoek omdat alle hoeken gelijk zijn.
- Een vierkant is een ruit omdat alle zijden gelijk zijn.
- Bijgevolg gelden alle eigenschappen van een parallellogram, een rechthoek en een ruit ook voor een vierkant:
  - De overstaande zijden zijn evenwijdig.
  - De overstaande zijden zijn gelijk.
  - De overstaande hoeken zijn even groot.
  - De diagonalen delen mekaar middendoor.
  - De diagonalen zijn even lang.
  - De diagonalen staan loodrecht op mekaar.

  - Een vierkant is puntsymmetrisch met het snijpunt van de diagonalen als symmetriepunt.
  - Een vierkant is lijnsymmetrisch met de diagonalen en de middelloodlijnen van de overstaande zijden als symmetrieassen.

Een trapezium is een vierhoek met een paar evenwijdige zijden. In een gelijkbenig trapezium zijn de basishoeken gelijk. Een gelijkbenig trapezium is lijnsymmetrisch met de rechte door de middens van de evenwijdige zijden als symmetrieas.

Gelijkvormigheid.

- Als je een figuur vergroot of verkleint, dan bekom je een gelijkvormige figuur.
- In gelijkvormige figuren zijn alle overeenkomstige lengten evenredig.
- In gelijkvormige figuren hebben alle overeenkomstige lengten dezelfde verhouding.
- In gelijkvormige figuren zijn alle overeenkomstige hoeken gelijk.

A.2 Gebruikte schema's tijdens de lessenreeks.

A.2.1 Schema van voorkennis

Op de DVD: `lesmateriaal\schema-leerstof.JPG`

A.2.2 Lokale logische schema's van voorkennis.

Middelloodlijn.

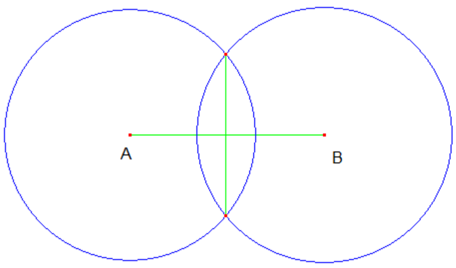
Definitie. De middelloodlijn van een lijnstuk is de rechte die door het midden van het lijnstuk gaat en er loodrecht op staat.

Eigenschap. Als een punt op de middelloodlijn van een lijnstuk ligt, dan ligt het even ver van de twee hoekpunten van dat lijnstuk.

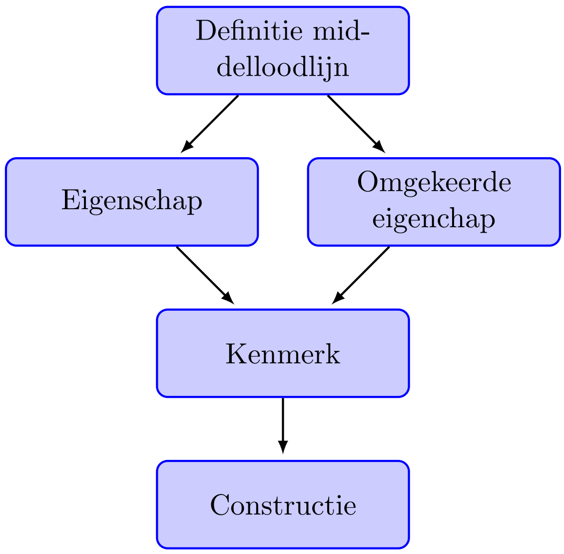
Omgekeerde eigenschap. Als een punt even ver ligt van de beide eindpunten van een lijnstuk, Dan ligt het op de middelloodlijn van dat lijnstuk.

Samengevat. De middelloodlijn van een lijnstuk is de verzameling van punten die even ver liggen van beide eindpunten van het lijnstuk.

Hieruit volgt de juistheid van de *constructie van de middelloodlijn* op een lijnstuk met passer en liniaal.



Schematisch:



Bissectrices.

Definitie. De bissectrice van een hoek is de rechte die de hoek in twee gelijke hoeken verdeelt.

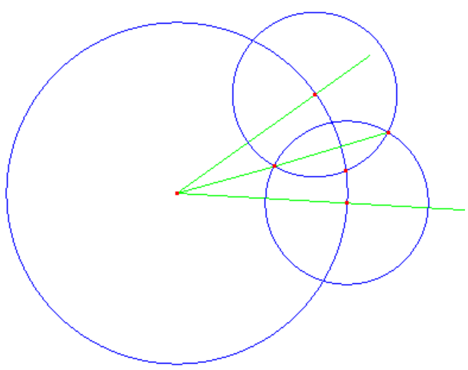
Definitie. De bissectrices van een paar snijdende rechten zijn de bissectrices van de overstaande hoeken gevormd door deze snijdende rechten.

Eigenschap. Als een punt op n van de bissectrices van een paar snijdende rechten ligt, Dan ligt het even ver van beide rechten.

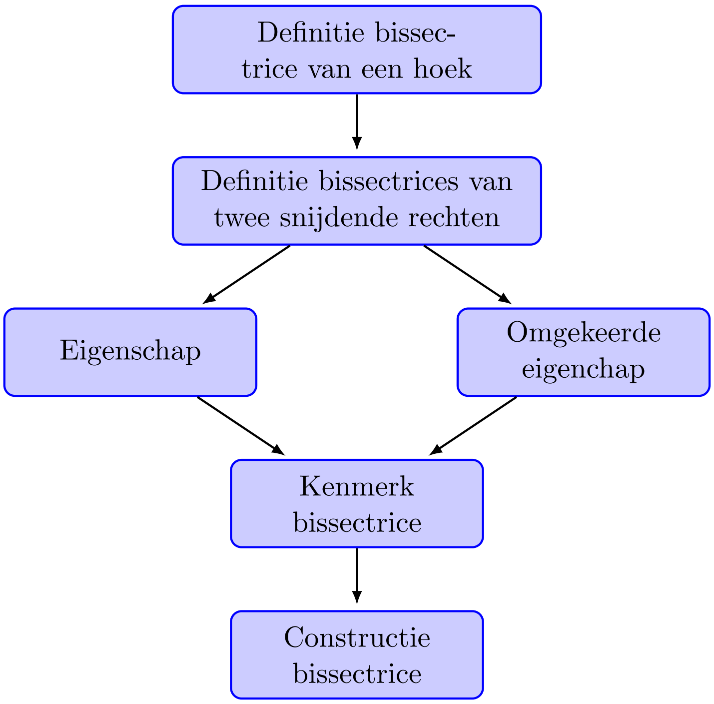
Omgekeerde eigenschap. Als een punt even ver van twee snijdende rechten ligt, Dan ligt het op n van de bissectrices van de snijdende rechten.

Kenmerk. De bissectrices van een paar snijdende rechten vormen samen de verzameling van punten die even ver liggen van beide snijdende rechten.

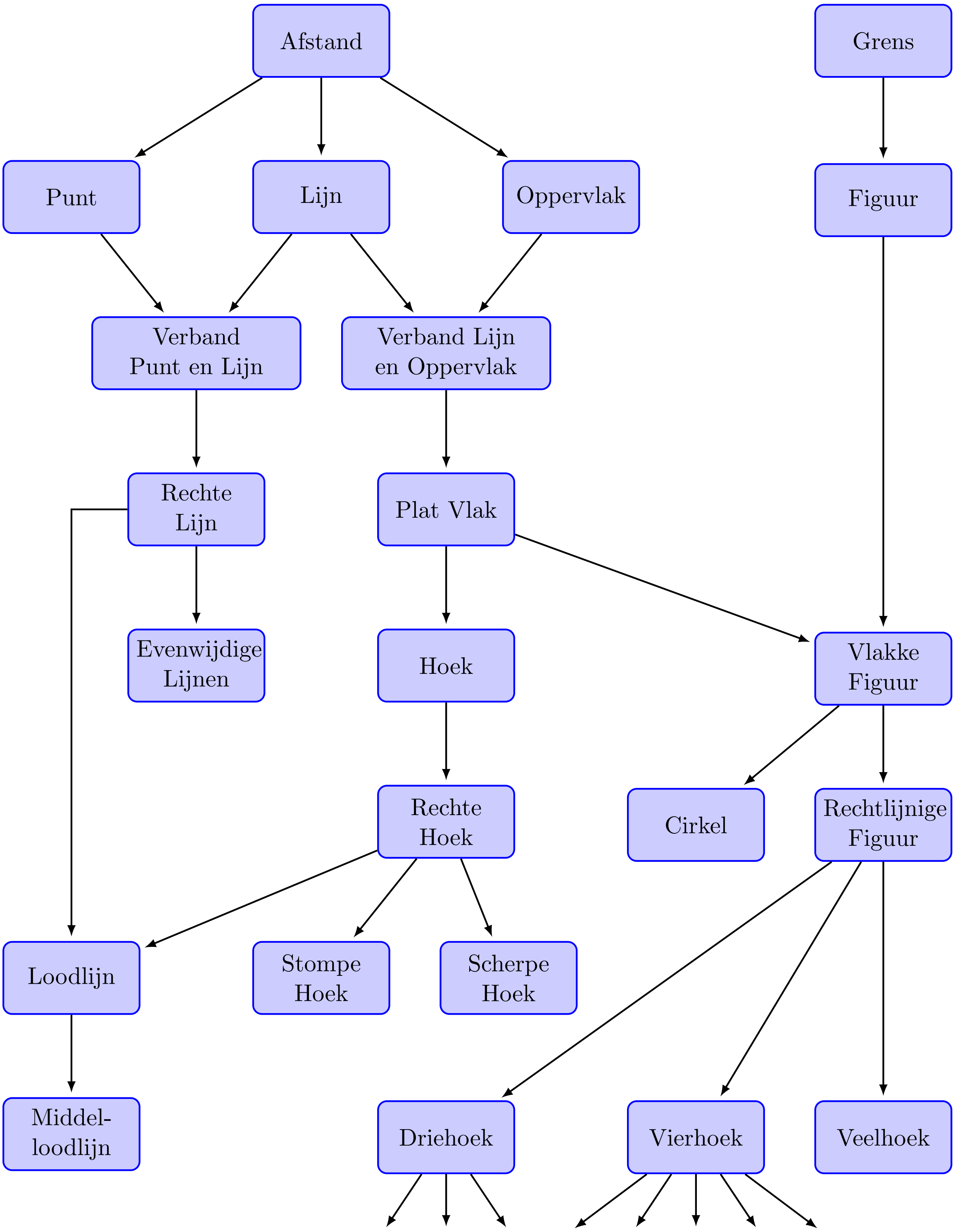
Hieruit volgt de juistheid van de *constructie van een bissectrice van een paar snijdende rechten* met passer en liniaal.

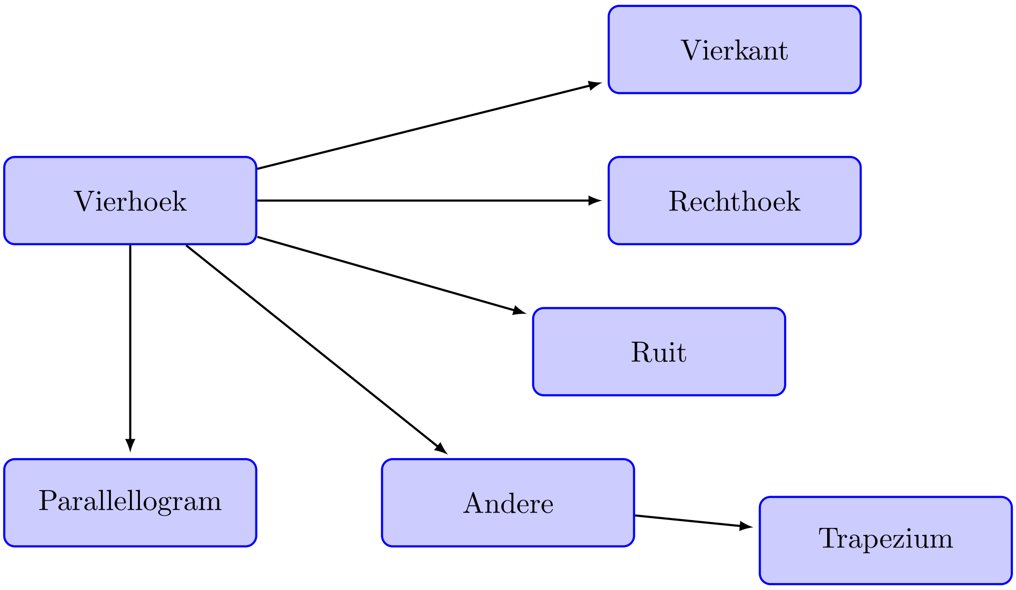


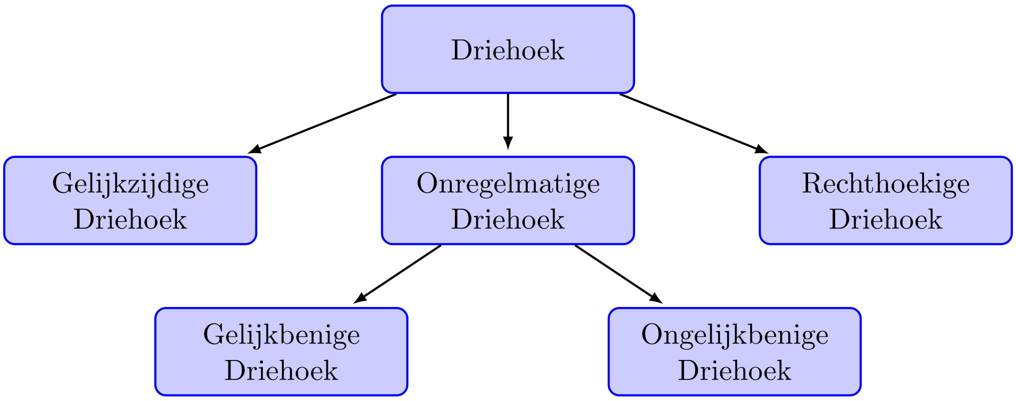
Schematisch:



A.2.3 Logisch schema van de 23 eerste definities van Euclides' eerste boek.




Vierkant
Vierhoek
Rechthoek
Ruit
Parallellogram
Andere
Trapezium


Driehoek
Gelijkzijdige Driehoek
Onregelmatige Driehoek
Rechthoekige Driehoek
Gelijkbenige Driehoek
Ongelijkbenige Driehoek

Bijlage B

De eerste onderzoekscyclus

B.1 Gebruikte lesmaterialen

De volgende bestanden bevinden zich in directory `lesmateriaal` op de DVD.

lesvoorbereiding	`lessenreeksvoorberlaar.docx`
powerpoint	`powerpointvoorberlaar.pptx`
werktekst	`werktekstvoorBerlaar.docx`
filmpje 1	`filmpje1.wmv`
filmpje 2	`filmpje2.wmv`
stukken maquettekarton met een schets van een driehoek	`foto-driehoeken.JPG`
schets van de ingeschreven cirkel van een driehoek	`foto-ingeschreven-cirkel.JPG`
schets van raaklijnen	`foto-raaklijn.JPG`
schets van de Harlekijn	`foto-harlekijn.JPG`

De filmpjes zijn een compilatie van stukken uit de Canvas-reportages over graancirkels van september 2008.

B.2 Geluidsopnames

B.2.1 Vaststelling van het Van Hiele denkniveau in 4D1E

directory : `geluidsopnames\berlaar`

`toets_van_hiele.MP3`

B.2.2 Vastelling van de algemene kijk op wiskunde in 4D1E

directory : `geluidsopnames\berlaar\interviews_AKs`

leerling B5	`wiskbeliefs-B5_07-10-2010.MP3`
leerling B8	`wiskbeliefs-B8_05-10-2010.MP3`
leerling B6 **leerling B2** **leerling B14** **leerling B9**	`wiskbeliefs-B6-B2-B14-B9_07-10-2010.MP3`

B.2.3 Vaststelling van de kijk op meetkunde in 4D1E

directory : `geluidsopnames\berlaar\interviews_EKs`

leerling B5	`meetkbeliefs-B5_21-10-2010.MP3`
leerling B8	`meetkbeliefs-B8_22-10-2010.MP3`
leerling B9	`meetkbeliefs-B9_25-10-2010.MP3`

B.2.4 Opnames van de lessen gegeven in 4D1E

directory : `geluidsopnames\berlaar\eigen_lessen`

les 1	`les_1.MP3`
les 2	`les_2.MP3`
les 3	`les_3.MP3`
les 5	`les_5.MP3`
les 6	`les_6.MP3`

B.2.5 Interviews na de lessenreeks in 4D1E

directory : `geluidsopnames\berlaar\interviews_achteraf`

leerling B7 `B7_02-12-2010.MP3`

leerling B1 `B1_29-11-2010.MP3`

leerling B10 `B10_30-11-2010.MP3`

B.2.6 Gesprekken met Els Vanlommel

directory : `geluidsopnames\berlaar`

1 `gesprek_met_Els_over_lessenreeks.MP3`

2 `commentaar_Els_na_lessenreeks.MP3`

B.3 Turnexperiment. Omschrijving van de opdrachten

Locatie was de speelplaats van de school. Beschikbaar materiaal waren een bolletje koord, krijt, spijkers, een hamer, een winkelhaak, een passer en een rolmeter van 25 meter. Ook waren er drie ballen ter beschikking.

De klas werd in twee groepen verdeeld: de eerste groep telde 12 leerlingen, de tweede groep 11. Gedurende een uur kopn ik om beurten met elke groep werken. Onder het voorwendsel dat ik hun reactiesnelheden kwam meten tijdens het spurten, liet ik de leerlingen klassikaal een aantal opdrachten uitvoeren, die hieronder beschreven worden.

Opdracht 1

De 11 (12) leerlingen krijgen een nummer toegewezen van 1 tot 5. Op een vaste plek ligt een sjaaltje, met een marshmellow eronder verstopt. Aan de leerlingen wordt gevraagd om op eenzelfde afstand van dit sjaaltje te gaan staan. Wanneer een nummer tussen 1 en 5 afgeroepen wordt, spurten de twee (drie) leerlingen die dit nummer toegewezen kregen, naar het sjaaltje. Daar aangekomen proberen ze de marshmellow te pakken zonder door hun tegenspeler getikt te worden. Daarna spurten ze terug naar hun plaats, weer met het gevaar getikt te worden door hun tegenspeler. Indien ze hun plaats kunnen bereiken zonder aangetikt te worden, mogen ze hun snoepje opeten, anders moeten ze het terugleggen. Dit wordt een aantal keer herhaald.

Opdracht 2

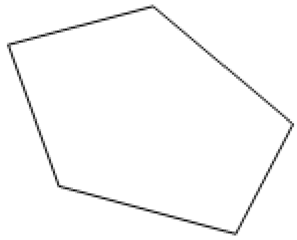
De leerlingen worden in 3 groepjes verdeeld. Een vrijwilliger uit elke groep plaatst zich op een willekeurige positie ergens op de speelplaats, ver genoeg van de andere twee. Alledrie markeren ze hun positie met een kruisje. Op eenzelfde afstand van de drie leerlingen wil de leerkracht drie andere leerlingen zetten om het volgende spel te kunnen spelen. Maar waar moeten dezen gaan staan? De hulp van de leerlingen wordt ingeroepen. Elke ploeg zet een leerling op de gevonden positie. De rest van de groep zet zich naast de vrijwilliger van zijn ploeg. De persoon in het midden gooit een bal naar elk van de leden van zijn ploeg, die hem zo snel mogelijk teruggooien. Is iedereen van een ploeg hierin geslaagd, dan is deze ploeg gewonnen.

B.4 Test meetkunde ter bepaling van het tweede Van Hiele niveau van 4D1E

B.4.1 Opgaven uit de test met modelantwoorden

Opgave 1

Beschrijf de volgende figuur:



Wat kan je vertellen over de hoeken, de overstaande hoeken, de zijden, de overstaande zijden, symmetrie enz.?

Hoe kan je deze figuur beschrijven met zo weinig mogelijk kenmerken?

Antwoord bij opgave 1. Deze figuur is een vijfhoek. Er is een symmetrieas, die door het linkerhoekpunt gaat en door het midden van de overstaande zijde.

De figuur is construeerbaar als omtrek van een gelijkbenige driehoek en een gelijkbenig trapezium met als grote basis de basis van de driehoek.

Opgave 2

"Elke rechthoek is ook een parallellogram". Leg dit uit met behulp van de definitie van rechthoek en parallellogram.

Antwoord bij opgave 2. Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken en gelijke overstaande zijden.

Een parallellogram is een vierhoek met twee aan twee evenwijdige zijden.

Een vierhoek met vier rechte hoeken en gelijke overstaande zijden, is ook een vierhoek waarvan de zijden twee aan twee evenwijdig zijn. Dus een rechthoek is ook een parallellogram.

Opgave 3

Zijn de volgende uitspraken definitie (D) of stelling (S) of geen van beide ?

- Een zwaartelijn van een driehoek is een lijn door een hoekpunt die gaat door het midden van de tegenoverliggende zijde.
- Een gelijkzijdige driehoek heeft drie even lange zijden.
- De hoogtelijnen in een gelijkzijdige driehoek zijn tegelijkertijd de drie zwaartelijnen.
- De middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn die bestaat uit alle punten die even ver van de twee hoekpunten van het lijnstuk liggen.
- Als twee rechten loodrecht staan op een derde dan zijn ze evenwijdig.
- Een parallellogram heeft diagonalen die elkaar middendoor snijden.

Antwoord bij opgave 3.

- Een zwaartelijn van een driehoek is een lijn door een hoekpunt die gaat door het midden van de tegenoverliggende zijde.

  → Dit is een definitie.

- Een gelijkzijdige driehoek heeft drie even lange zijden.

  → Dit is een definitie.

- De hoogtelijnen in een gelijkzijdige driehoek zijn tegelijkertijd de drie zwaartelijnen.

  → Dit is een stelling of eigenschap.

- De middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn die bestaat uit alle punten die even ver van de twee hoekpunten van het lijnstuk liggen.

  → Dit is een definitie.

- Als twee rechten loodrecht staan op een derde dan zijn ze evenwijdig.

  → Dit is een stelling.

- Een parallellogram heeft diagonalen die elkaar middendoor snijden.

  → Dit is een eigenschap.

Opgave 4

Lees aandachtig de volgende uitspraken :

- "De bissectrices van een paar snijdende rechten zijn de verzameling punten die even ver liggen van beide snijdende rechten."
- "Als een punt even ver van twee snijdende rechten ligt, dan ligt het op één van de bissectrices van de snijdende rechten."
- "De bissectrices van een paar snijdende rechten zijn de bissectrices van de overstaande hoeken gevormd door deze snijdende rechten."
- "De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen deelt."
- "Als een punt op één van de bissectrices van een paar snijdende rechten ligt, dan ligt het even ver van beide rechten."

Deze uitspraken vormen de verantwoording voor de constructie van de bissectrices van een paar snijdende rechten.

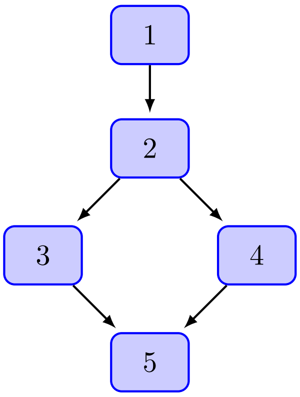
Zet deze uitspraken in de juiste logische volgorde. (Plaats een cijfer voor elke uitspraak)

Kan je dit in een schema voorstellen?

Antwoord bij opgave 4.

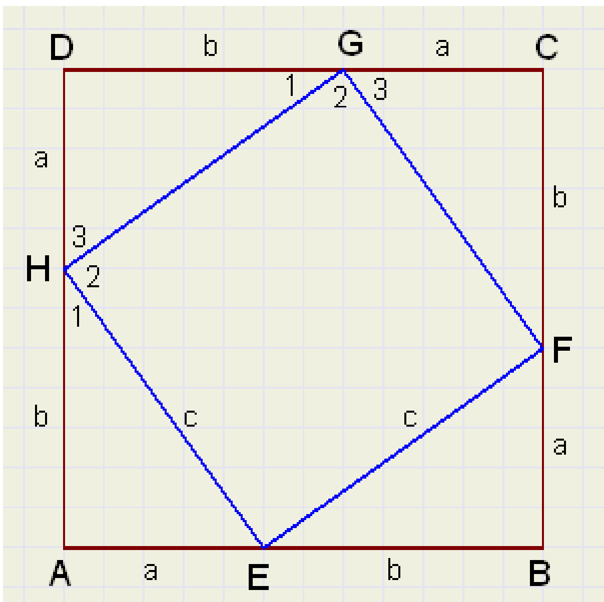
5	“De bissectrices van een paar snijdende rechten zijn de verzameling punten die even ver liggen van beide snijdende rechten.”
3 of 4	“Als een punt even ver van twee snijdende rechten ligt, dan ligt het op n van de bissectrices van de snijdende rechten.”
2-	“De bissectrices van een paar snijdende rechten zijn de bissectrices van de overstaande hoeken gevormd door deze snijdende rechten.”
1	“ De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen deelt.”
3 of 4	“Als een punt op n van de bissectrices van een paar snijdende rechten ligt, dan ligt het even ver van beide rechten.”

Schema.



Opgave 5

Wat zegt de stelling van Pythagoras? Formuleer ze onder de “als . . . dan”-vorm.
Noteer het gegeven en het te bewijzen.
De volgende schets hoort bij een bewijs voor de stelling van Pythagoras. Welke idee gebruikt men hier voor het bewijs? Kan jijzelf dit bewijs voor de stelling van Pythagoras aanvullen?



Bewijs We gaan uit van het vierkant $ABCD$. Op de zijden hiervan zijn de punten E, F, G en H zo geplaatst, dat $AE = BF = CG = DH$. Deze afstand noemen we a. Elke zijde van het vierkant $ABCD$ heeft verder de lengte . . . .

Het bewijs bestaat uit 2 delen.

1. Eerst moet worden vastgesteld, dat $EFGH$ een vierkant is.

   $EFGH$ is al zeker een ruit vermits . . . .

   Noem c de lengte van een zijde van deze ruit.

   Bovendien zijn de hoeken (1) en (3) zijn samen 90 graden, want . . . .

   Hieruit volgt dat hoek (2) gelijk is aan . . . . graden.

   $\rightarrow$ $EFGH$ is een vierkant.

2. We beschouwen de oppervlakten en zien:

$$\text{opp.}ABCD = 4 * \text{opp.}AEH + \text{opp.}EFGH$$

dit betekent:

$$(a+b)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

waaruit volgt:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{opp.}ABCD = 4 * \text{opp.}AEH + \text{opp.}EFGH$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Antwoord bij opgave 5. We gaan uit van het vierkant $ABCD$.
Op de zijden hiervan zijn de punten E, F, G en H zo geplaatst, dat $AE = BF = CG = DH$. Deze afstand noemen we a.
Elke zijde van het vierkant $ABCD$ heeft verder de lengte $a + b$.

Het bewijs bestaat uit 2 delen.

1. Eerst moet worden vastgesteld, dat $EFGH$ een vierkant is.

   Uit de constructie volgt, dat driehoeken AEH, BFE, CGF en DHG gelijk zijn. $EFGH$ is dus in ieder geval een ruit en de lengte van een zijde noemen we c.

   De hoeken (1) en (3) zijn samen 90 graden, zodat voor hoek (2) 90 graden overblijft.

   $EFGH$ is daarom een vierkant.

2. Het tweede deel van het bewijs:

   We beschouwen de oppervlakten en zien:

$$\begin{aligned}
\text{opp.}ABCD &= 4 * \text{opp.}AEH + \text{opp.}EFGH \\
(a+b)^2 &= 2ab + c^2 \\
a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\
a^2 + b^2 &= c^2
\end{aligned}$$

B.4.2 Codering van de antwoorden op de testvragen en toekenning van een waardeoordeel aan elke vraag

Vraag 1. Kunnen de leerlingen een figuur beschrijven met een minimaal aantal eigenschappen?

Bij het antwoord op deze vraag zal ik de volgende vier aspecten nagaan:

1a. Gaat de leerling de hoeken en/ of zijden van de gegeven figuur meten?

1b. Gebruikt de leerling symmetrie?

1c. Slaagt de leerling erin om de meetkundige figuur volledig en juist te beschrijven?

1d. Werd voor deze volledige beschrijving met zo weinig mogelijk stappen gewerkt?

Evaluatie van deze eerste opdracht gebeurt als volgt:

- Een leerling die voor de eerste vraag de hoeken en zijden gaat meten, krijgt een – – (1a).
- De leerling die de figuur in meetkundige termen maar onjuist beschrijft(bijvoorbeeld zegt dat er geen symmetrie is) krijgt een – (1b).
- Hij verdient een + indien hij volledig is en juist (1c).
- Indien hij erin slaagt om de figuur bovendien met zo weinig mogelijk eigenschappen weer te geven , verdient hij een + + (1d).
- Lost hij de vraag niet op dan krijgt hij een *.

Vraag 2. Kunnen de leerlingen de definitie van rechthoek en parallellogram correct gebruiken om aan te tonen dat elke rechthoek ook een parallellogram is?

Tijdens deze opdracht stel ik mezelf de volgende vragen:

2a. Beschouwt de leerling de kenmerken van de rechthoek als gegevens en de kenmerken van het parallellogram als het te bewijzen?

2b. Formuleert de leerling het gegeven en te bewijzen correct?

2c. Kent hij de definities van rechthoek en parallellogram?

2d. Gebruikt hij deze definities juist, en bewijst hij correct dat een rechthoek steeds een parallellogram is?

Evaluatie van deze opdracht gebeurt als volgt:

- Keert de leerling gegeven en te bewijzen om, dan krijgt hij een – – (2a).
- Formuleert hij niet duidelijk wat te bewijzen is dan krijgt hij een – (2b).
- Beseft hij wat te bewijzen is (parallellogram zijn), en wat gegeven (rechthoek zijn), dan krijgt hij een 0 (2b).
- Kent hij bovendien de definities, dan krijgt hij een + (2c).
- Hij verdient een + + als hij erin slaagt een juiste verantwoording te geven (2d).
- Lost hij de vraag niet op dan krijgt hij een *.

Vraag 3. Kennen de leerlingen het verschil tussen een definitie en een stelling?

In het antwoord van elke leerling op deze vraag zal ik nagaan:

3a. Kan de leerling in twee gegeven uitspraken een definitie en een stelling herkennen? Deze uitspraken zijn op de stereotiepe wijze geformuleerd.

3b. Kan de leerling een definitie en een stelling herkennen wanneer deze niet in de stereotiepe vorm gegeven is? Hiervoor worden vier andere uitspraken gegeven.

3c. Beseffen de leerlingen dat vaak meer dan één aanpak mogelijk is voor een definitie?

Evaluatie van deze opdracht gebeurt als volgt: De leerling krijgt een + indien hij geen fout maakt. Hij krijgt een 0 indien hij één fout maakt, en een – bij twee fouten. Een – – verdient hij bij drie fouten of meer. Lost hij de vraag niet op dan krijgt hij een *.

Vraag 4. Een aantal uitspraken vormen de verantwoording voor de constructie van de bissectrices van een paar snijdende rechten. Kunnen de leerlingen deze uitspraken in de juiste logische volgorde plaatsen?

Bij het antwoord op deze vraag zal ik de volgende aspecten nagaan: Zet de leerling de uitspraken in de juiste volgorde?

Evaluatie van deze opdracht gebeurt als volgt:

- Indien de leerling de vijf gegeven uitspraken in de juiste logische volgorde plaatst, verwerft hij een +.
- Maakt de leerling één fout tegen de logische volgorde, dan krijgt hij een score 0.
- Hij krijgt een – bij twee fouten, een – – bij drie fouten of meer.
- Indien de leerling een juist logisch schema gaf, krijgt hij een + +.
- Lost hij de vraag niet op dan krijgt hij een *.

Vraag 5. De stelling van Pythagoras moet geformuleerd en bewezen worden. Voor het bewijs krijgen de leerlingen een schets en een bewijs 'met gaten'.

Bij het antwoord op deze vraag zal ik nagaan:

5a. Formuleert de leerling de stelling van Pythagoras correct? Ingrediënten van de stelling zijn: rechthoekigheid van de driehoek, en het verband tussen de lengtes van de zijden: $a^2 + b^2 = c^2$.

5b. Is de leerling zijn 'als... dan'-formulering juist? Hierbij moet als gegeven beschouwd worden dat de driehoek rechthoekig is, en als te bewijzen dat $a^2 + b^2 = c^2$.

5c. Vult de leerling de ontbrekende stappen correct aan?

5d. Leidt de leerlingen dingen uit de schets af die niet vanzelfsprekend zijn, of zijn de verantwoordingen juist?

Evaluatie van deze opdracht gebeurt als volgt:

- Een leerling die een juiste formulering geeft van de stelling in 'als... dan'-vorm, krijgt een 0 (5b).
- Verwisselt de leerling het gegeven met het te bewijzen, dan krijgt hij een – (5a en b).
- Vult hij bovendien het bewijs correct aan, dan krijgt hij een + (5c).
- Is zijn uitleg hierbij goed, dan krijgt hij een + + (5d).
- Lost hij de vraag niet op dan krijgt hij een *.

B.5 De algemene kijk op wiskunde van 4D1E voor de lessenreeks

B.5.1 Concrete vragen met codering voor de deelaspecten van de geteste AK's en waardeoordeel van de antwoorden

Vertrekkend van de observatie van de lessen van 29-9-2010 en 30-9-2010, vertaalde ik de algemene visies over wiskunde naar de volgende concrete vragen in verband met de deling van veeltermen. De evaluatie van de antwoorden staat erbij genoteerd.

1. Vragen die ik in verband met de schoonheid van wiskunde (AK 1) aan de leerlingen wil stellen zijn de volgende:

1. Vind je een gegeven oplossingsmethode of bewijs mooi — kort en elegant —?
2. Waar ben je de deling al eens eerder tegengekomen? Wat is het verschil met de euclidische deling van veeltermen? Waarom ben je eigenlijk veeltermen aan het delen, in welke theorie kadert dit? Waartoe zal dit leiden?
3. Vind je de theorie mooi — qua logische structuur en overzichtelijkheid?

Beoordeling van de antwoorden van de leerling:

- Vindt een leerling een wiskundebewijs elegant of mooi, dan krijgt hij een + (AK 1a).
- Vindt hij het alleen maar interessant en ziet hij het esthetische niet in, dan krijgt hij een 0 (AK 1a).
- Indien hij een zicht heeft op de structuur van wiskunde in z'n geheel en daarvan de logische opbouw mooi vindt, krijgt hij een + + (AK 1b en c).
- Vindt hij niets mooi aan wiskunde, dan krijgt hij een – (AK 1a en c).
- Een * betekent dat de leerling geen antwoord gaf op de vraag over dit onderwerp.

2. Over de eeuwigheidswaarde van wiskunde (AK 2):

Vragen die ik in dit verband aan de leerlingen wil stellen zijn de volgende:

1. Geldt de formule van de euclidische deling echt voor elke mogelijke veelterm? Hoe kan je dat weten als je ze niet allemaal hebt uitgetest?
2. Het schema van Horner werd door jullie afgeleid vanuit een voorbeeld van een concrete euclidische deling. Ben je zeker dat dit schema dan voor elke mogelijke deling opgaat?
3. Hoe zou je aan een bewijs voor Horner beginnen?

Beoordeling van de antwoorden van de leerling:

- Weet de leerling dat een bewijs nodig is voor het doen van een algemeen geldende uitspraak, dan krijgt hij 0. (AK 2b)
- Anders een –.
- Gelooft hij dit bovendien, dan krijgt hij een +. (AK 2b)
- Weet hij ook hoe hij dit bewijs zou aanvatten, dan verdient hij een + +. (AK 2c)

3. Over het besef van de sterkte van het eigen denkvermogen (AK3):

Vragen die ik in dit verband aan de leerlingen wil stellen zijn de volgende:

1. Weet je al hoe de oplossing van de oefening zal verlopen, of zie je wel al doende?
2. Ben je tevreden wanneer je ziet dat een oefening uitkomt ? Waarom denk je dat de leerkracht jullie zoveel laat redeneren?
3. Je kan de euclidische deling van veeltermen ook uitvoeren met de computer. Heeft het dan wel zin om dit zo met de hand te leren? Welke?

Beoordeling van de antwoorden van de leerling:

- Ziet de leerling het belang in van redeneren tijdens de wiskundeles, dan krijgt hij een 0 (AK3b en c).
- Zoniet, dan krijgt hij een –.
- Ook buiten de wiskundeles redeneren is van belang. Ziet de leerling dit in, dan krijgt hij een + (AK3b).
- Een ++ verdient hij wanneer hij de sterkte van zijn eigen denken al ervaren heeft (AK3c).

4. Over het ontstaan van wiskunde (AK4):

Vragen die ik in dit verband aan de leerlingen wil stellen zijn de volgende:

1. Mag je zelf notaties invoeren voor de beschrijving van deeltal, deler, quotint en rest uit de formule voor euclidische deling van veeltermen?
2. Vanwaar komt de formule voor de euclidische deling? Waarom was Euclides hiermee bezig? Welke problemen liggen aan de oorsprong hiervan, denk je? Hoe kwam Horner aan zijn schema? Waarom zocht hij daarop?
3. Zou je dit schema zelf kunnen terugvinden als je het vergeten was?

Beoordeling van de antwoorden van de leerling:

- De leerling krijgt een – wanneer blijkt dat hij denkt dat wiskunde zowat uit de hemel valt (AK4b en c).
- Hij krijgt een 0 indien hij beseft dat notaties vrij mogen gekozen worden (AK4a).
- Wanneer hij beseft dat wiskunde tijd en zweet vraagt om te ontstaan, krijgt hij een + (AK4b).
- Dit wordt een + + indien hij zelf denkt een eigenschap te kunnen terugvinden door erop te werken (AK4c).

5. Over het samen doen van wiskunde (AK 6):

Vragen die ik in dit verband aan de leerlingen wil stellen zijn de volgende:

- Werk je liever samen of apart aan een taak?
- Heeft samenwerken een meerwaarde volgens jou?

Beoordeling van de antwoorden van de leerling: Vindt de leerling alleen werken beter, dan krijgt hij een – . Anders een +.

6. Over de verstaanbaarheid van wiskunde (AK 8):

Vragen die ik in dit verband aan de leerlingen wil stellen zijn de volgende:

1. Begrijpt de leerling wat wiskundig inzicht is?
2. Weet de leerling ook hoe hijzelf aan dit inzicht kan werken?

Beoordeling van de antwoorden van de leerling: Alleen leerling B5 werd hierover ondervraagd. Zij krijgt voor haar antwoorden hierover een + +. Ze begrijpt wat inzicht is, en toont ook verschillende mogelijkheden om erop te werken. Naast het maken van oefeningen op inzicht gelooft zij ook in het teruggrijpen naar de theorie (AK 8a en b).

7. Over de tijd die je in wiskunde moet steken (AK 9):

Vragen die ik in dit verband aan de leerlingen wil stellen zijn de volgende:

1. Gelooft de leerling dat wiskunde doen, tijd vraagt?

Beoordeling van de antwoorden van de leerling: Ook over dit onderwerp werd alleen leerling B5 ondervraagd. Weer geef ik haar op haar antwoord een + +. Ze beseft dat oefeningen tijd vragen, en is bereid deze erin te steken. Alleen is tijd in de les niet steeds beschikbaar…

8. Over wat wiskunde eigenlijk is (AK 10):

Vragen die ik in dit verband aan de leerlingen wil stellen zijn de volgende:

1. Is wiskunde een manier om problemen op te lossen?
2. Is wiskunde volgens jou een collectie van rekenmethodes?
3. Is wiskunde logisch?

Beoordeling van de antwoorden van de leerling:

- Antwoordt de leerling dat het een theorie is om problemen op te lossen, dan krijgt hij hiervoor een 0 (AK 10a).
- Denkt de leerling dat oefeningen fout zijn wanneer er telfouten is staan, dan krijgt hij een – (AK 10b).
- Vindt de leerling wiskunde veel logischer dan andere vakken, dan verdient hij een + (AK 10c).

B.5.2 Toekenning van een waardeoordeel aan de geteste AK's vanuit antwoorden van de leerlingen tijdens mini-interviews

AK 1

- Vindt een leerling een wiskundebewijs elegant of mooi, dan krijgt hij een + (AK 1a).
- Vindt hij het alleen maar interessant en ziet hij het esthetische niet in, dan krijgt hij een 0 (AK 1a).
- Indien hij een zicht heeft op de structuur van wiskunde in z'n geheel en daarvan de logische opbouw mooi vindt, krijgt hij een + + (AK 1b en c).
- Vindt hij niets mooi aan wiskunde , dan krijgt hij een – (AK 1a en c).
- Een * betekent dat de leerling geen antwoord gaf op de vraag over dit onderwerp.

AK 2

- Weet de leerling dat een bewijs nodig is voor het doen van een algemeen geldende uitspraak, dan krijgt hij 0 (AK 2b).
- Anders een –.
- Gelooft hij dit bovendien, dan krijgt hij een + (AK 2b).
- Weet hij ook hoe hij dit bewijs zou aanvatten, dan verdient hij een ++ (AK 2c).

AK3

- Ziet de leerling het belang in van redeneren tijdens de wiskundeles, dan krijgt hij een 0 (AK3b en c).
- Zoniet, dan krijgt hij een –.
- Ook buiten de wiskundeles redeneren is van belang. Ziet de leerling dit in, dan krijgt hij een + (AK3b).
- Een + + verdient hij wanneer hij de sterkte van zijn eigen denken al ervaren heeft (AK3c).

AK4

- De leerling krijgt een – wanneer blijkt dat hij denkt dat wiskunde zowat uit de hemel valt (AK4b en c).
- Hij krijgt een 0 indien hij beseft dat notaties vrij mogen gekozen worden (AK4a).
- Wanneer hij beseft dat wiskunde tijd en zweet vraagt om te ontstaan, krijgt hij een + (AK4b).
- Dit wordt een + + indien hij zelf denkt een eigenschap te kunnen terugvinden door erop te werken (AK4c).

AK 6

Vindt de leerling alleen werken beter, dan krijgt hij een –. Anders een +.

AK 8

Alleen leerling B5 werd hierover ondervraagd. Zij krijgt voor haar antwoorden hierover een + +. Ze begrijpt wat inzicht is, en toont ook verschillende mogelijkheden om erop te werken. Naast het maken van oefeningen op inzicht gelooft zij ook in het teruggrijpen naar de theorie (AK 8a en b).

AK 9

Ook over dit onderwerp werd alleen leerling B5 ondervraagd. Weer geef ik haar op haar antwoord een + +. Ze beseft dat oefeningen tijd vragen, en is bereid deze erin te steken. Alleen is tijd in de les niet steeds beschikbaar. . .

AK 10

- Antwoordt de leerling dat het een theorie is om problemen op te lossen, dan krijgt hij hiervoor een 0 (AK 10a).
- Denkt de leerling dat oefeningen fout zijn wanneer er telfouten is staan, dan krijgt hij een – (AK 10b).
- Vindt de leerling wiskunde veel logischer dan andere vakken, dan verdient hij een + (AK 10c).

B.5.3 Weergave van de lesmomenten en de mini-interviews

Les van 29-9-2010. De euclidische deling van veeltermen. Test en oefeningen

Tijdens deze les hebben de leerlingen eerst een test. Ze moeten enerzijds de formule geven voor de euclidische deling van veeltermen. Anderzijds moeten ze de rest en het quotiënt van een concrete deling berekenen.

Observatie en kleine gesprekjes met de leerlingen leren mij:

- Weinig leerlingen starten met vraag 1. Ze voelen zich hierover onzeker: hebben niet gestudeerd, weten niet exact wat bedoeld wordt of begrijpen de vraag niet volledig.
- Leerling B8 vraagt na de test of de formule ook met andere letters gegeven mag worden dan in het handboek.

Na de test maken de leerlingen individuele oefeningen op het uitvoeren van de euclidische deling. Hierbij merk ik op:

- Distributiviteit van . tov + wordt niet spontaan toegepast bij het berekenen van px^2-x^2.
- Als $(q-p)x+2-p=0$-veelterm, dan moet $q=p$ en $p=2$. De verklaring hiervan is voor velen te moeilijk om zelf te vinden.
- Sommige leerlingen staan niet lang genoeg stil bij het gegeven.
- Veel leerlingen plannen niet bewust hun oplossingsstrategie.
- Leerling B8 vraagt of x afhankelijk is van de parameter p in : x^3+px^2+qx+1.

Les van 30-9-2010. Het schema van Horner. Theorie

Vertrekkend vanuit een concrete uitwerking van een euclidische deling, namelijk van $3x^3-2x^2-5x+1$ door $x-2$, wordt het schema van Horner door de leerkracht opgesteld met medewerking van de leerlingen. Leerling B8 en leerling B17 blijken sterke leerlingen te zijn. Tijdens deze les kan ik niet rondwandelen en vraagjes stellen dus bewaar ik ze voor de volgende oefeningenles.

Les van 5-10-2010. Reststelling. Formulering en bewijs. Toepassingen op Horner

Tijdens deze les wordt het schema van Horner hernomen. In een voorbeeld blijkt dat de rest bij deling van $A(x)$ door $x-a$ blijkt gelijk te zijn aan $A(a)$. Daarna wordt dit algemeen bewezen via een klasgesprek. Wanneer de leerlingen starten met oefeningen hierop, zie ik de kans om enkele vragen aan leerling B6 en leerling B8 te stellen in verband met de visies AK 1,2 en 4.

Weergave van het gesprekje met leerling B6:

- *over de esthetische principes in wiskunde: hier verdient leerling B6 een 0.*

  H Het bewijsje dat jullie net van de reststelling zagen, vind je dat mooi?
  B6 Ja. . . mooi als je het zelf kan begrijpen. . . maar kunst zou ik dat niet noemen.

- *over bewijzen: hier verdient leerling B6 een 0.*

H Voor Horner hebben jullie geen bewijs gegeven, jullie hebben het schema afgeleid uit één voorbeeld. Ben je er nu wel zeker van dat dit schema van Horner geldt voor elke mogelijke veelterm?
B6 Ja, maar hij moet gedeeld worden door iets van de vorm $x - a$.
H Jullie toonden Horner aan voor een veelterm van graad drie, maar geldt dat ook voor een veelterm van graad 1000 of 10000? Kan het geen toeval zijn dat het voor graad drie werkt?
B6 Ja.
H Wat moet je doen om zeker te zijn dat het schema voor elke veelterm werkt?
B6 Een bewijsje maken.
H Hoe zou je dat aanpakken?
B6 Met een andere veelterm $x^3 + x^2 + \dots$
H Maar geldt dat dan ook voor elke andere bijvoorbeeld x tot de macht 400?
B6 Nee $x^n + x^{(n-1)} + \dots$

- *Voor de keuze van notaties krijgt leerling B6 een –.*

H Kan je dat korter schrijven?
B6 Ja. $\sum ax$.
H Welke notatie gebruikte mevrouw Vanlommel voor het deeltal?
B6 Iets met $x \dots$
H Ja. $A(x)$.
B6 Oh ja.

Weergave van het gesprekje met leerling B8:

- *over bewijzen: hier verdient leerling B8 een +.*

H Het schema van Horner, hebben jullie dat bewezen?
B8 We hebben gekeken hoe hij eraan kwam, niet echt bewezen.
H Jij maakte op het linkerbord een berekening van de euclidische deling van $x^3+x^2+\dots$ door $x+2$. Daarna leidde mevrouw Vanlommel samen met jullie het schema af. Op dat voorbeeld kan je er wel zeker van zijn dat het schema werkt, maar geldt dat wel voor elke andere deling?
B8 Het staat ook in het boek dus ben ik er wel zeker van. Als ik thuis zelf zoiets uitzoek doe ik dat ook met verschillende getallen.
H Dat is zeker wel een goede methode, maar om zeker te zijn dat het voor elke veelterm werkt…
B8 Dan moet je ook met negatieve getallen proberen.
H Als je 't voor alle getallen wil proberen, dan blijf je wel lang bezig he? Hoeveel getallen zijn er?
B8 Oneindig.
H Dus wat moet je doen om echt zeker te zijn? Of kan je met wiskunde niet voorspellen?
B8 Sommige dingen moet je bewijzen en andere moet je gewoon ondervinden, daar is dan geen bewijs voor of zo.
H Wat is zo'n bewijs dan eigenlijk?
B8 Dan staan daar letters die door elk reeël getal vervangen kunnen worden, dan klopt het voor elk reeël getal.
H Mag een bewijs zoals dat van de reststelling volgens jou met woorden in plaats van met symbolen?

B8 Ja. Alleen wordt het volgens mij nogal ingewikkeld om allemaal op te schrijven

- *in verband met de keuze van notaties krijgt leerling B8 een 0.*

H Als je Horner zou proberen te bewijzen, hoe moet je dat dan doen? Dan moet je op zoek gaan naar een volledig willekeurige veelterm. Hoe zou jij die noteren?
B8 $\sum_{m=0}^{n} x^m$.
H Hoe noteerde mevrouw Vanlommel de algemene veelterm die je gaat delen?
B8 Met $A(x)$ en $B(x)$.
H Zou jij deze notatie zelf gebruiken?
B8 Ja da's natuurlijk korter.
H Mag je andere letters gebruiken in de formule van de euclidische deling?
B8 Ja voor A en B wel. Maar voor R en Q niet want die betekenen rest en quotiënt.
H Wat zou je voor de A en de B kunnen nemen?
B8 Een grote D en een kleine d voor deeltal en deler zoals vroeger.

- *over de esthetische principes in wiskunde: leerling B8 verdient een +.*

H Vind je wiskunde mooi?
B8 Ja. Da's logischer dan andere vakken, bijvoorbeeld Frans.
H Het bewijs van de reststelling dat jullie daarnet zagen, vind je dat mooi?
B8 Het is gewoon interessant hoe ze daar op gekomen zijn. Niet zozeer mooi.
H Vroeger bestudeerden jullie de euclidische deling van getallen, nu van veeltermen. Vandaag zijn jullie bij Horner aanbeland, waar gaan jullie met al deze theorie naartoe?
B8 Dat heeft mevrouw Vanlommel gezegd: we gaan functies bestuderen, ik denk hun grafiek enzo.
H Ja dat klopt. Jullie gaan leren om zelf grafieken te tekenen.
H Als je die theorie in zijn geheel bekijkt, vind je dat dan mooi?
B8 Mooi nee. Maar wel interessant hoe ze daar op logische wijze opkwamen.
H Maak je soms een schema van de logische opbouw van de theorie die je ziet?
B8 Neen. Dat heb ik nog niet gedaan.
H Wist je dat er in wiskunde esthetische principes zijn?
B8 Ja, want toen we leerden over veeltermen moesten we deze altijd opschrijven van de hogere naar de lagere graad.
H Netjes geordend.
B8 Ja.

Weergave van het gesprek met leerling B5:

- H Vind je wiskunde leuk?
  B5 Ja ik vind dat wel een leuk vak. Want ik heb er ook voor gekozen om economie-wiskunde te doen. Ik vind het natuurlijk vooral leuk als ik het kan en als ik mee ben.

- *Over de verstaanbaarheid van wiskunde. Hiervoor krijgt leerling B5 een + +. (AK 8):*

H Vind je van jezelf dat je veel inzicht hebt in wiskunde?
B5 Als ik mezelf met de anderen vergelijk dan merk ik dat sommigen de dingen wel direct doorhebben of inzien. Zo goed ben ik dan niet.

H Vind jij snel zijn nodig om veel inzicht te hebben; wanneer vind jij van iemand dat hij veel inzicht heeft?
B5 Als je het snel begrijpt.
H Is die snelheid dan zo belangrijk?
B5 Ik denk het wel. Als iemand van de eerste keer al ziet hoe de dingen moeten dan heeft die volgens mij veel inzicht.
H Vind je dat inzicht iets is dat je moet hebben of kan de leerkracht het jou leren?
B5 Je moet dat vooral hebben maar je kan dat ook ontwikkelen.
H Moet je dat zelf doen of is dat een taak voor de juf kan de ene juf dat beter dan de andere?
B5 Oh ik denk dat je dat vooral zelf moet oefenen door inzichtsoefeningen.
H Wat versta je onder inzichtsoefeningen?
B5 Oefeningen die niet een directe toepassing zijn op de theorie maar waarover je langer moet nadenken.

- *In verband met de tijd die je in wiskunde moet steken (AK 9):*

H Moet je een echte denkvraag in een paar minuutjes kunnen oplossen of vind je dat je daar je tijd mag voor nemen?
B5 Ik neem daar meestal mijn tijd voor; om te zien wat ik al heb en wat ik zal moeten gebruiken; meestal moeten we eigenschappen gebruiken die we vooraf gezien hebben.
H Vind je dat je genoeg tijd krijgt tijdens de lessen?
B5 Tijdens de lessen gaat het wel snel en als je dan gestresst bent zoals tijdens de laatste toets dan kon ik wel wat meer tijd gebruiken.

- *Over het ontstaan van wiskunde verdient leerling B5 een +.*

H Wiskunde zoals het schema van Horner of de euclidische deling: wie heeft dat gemaakt of hoe is dat ontstaan?
B5 Dat zal ooit wel eens uitgevonden zijn door iemand die daar heel erg mee bezig was.
H Kostte dat volgens jou veel tijd?
B5 Ja dat denk ik wel.
H Denk je dat dit onmiddellijk foutloos was?
B5 Ja iets nieuw ontdekken zal in het begin niet helemaal kloppen;
H Hoe ga je tewerk als je iets niet begrepen hebt?
Stel je begrijpt iets niet en je hebt de volgende dag toets . Wat doe je dan?
Leer je het dan van buiten of werk je erop; hoe werk je daar dan op?
B5 Dan ga ik uitleg vragen aan mijn zus of aan een klasgenootje. Want als je het eens op een andere manier hoort dan begrijp je het vaak wel.
H Leg jij soms aan iemand anders iets uit?
B5 Jaja.
H En wie leert er dan het meest?
B5 Allebei.
H Zelf op je problemen zoeken doe je dat ook?
B5 Dan lees ik mijn theorie nog eens door want meestal staat daar wel alles in.

- *In verband met het samen doen van wiskunde krijgt leerling B5 een –.*

H Werk jij liever samen of apart aan een taak; het viel me op dat jullie altijd alleen werken.

B5 Ik weet niet of we samen mogen werken. Maar ik werk liever apart want dan weet ik of ik het kan of niet; soms spreek ik er wel eens over met mijn buurvrouw.

- *Over het relatieve belang van wiskunde. Hier krijgt leerling B5 een +.*

  H Wat is wiskunde eigenlijk?
  B5 ...
  H Is dat een belangrijk vak volgens jou?
  B5 Ja, dat hangt ervan af wat je later gaat doen.

- *Voor het besef van de sterkte van het eigen denkvermogen verdient leerling B5 een + +.*

  H Het redeneren waarop mevrouw Vanlommel zo de nadruk legt, vind je dat belangrijk?
  B5 Ja, dat kun je nodig hebben in het dagelijks leven.
  H Geef eens een voorbeeldje.
  B5 Euhm... om te plannen wat je eerst gaat doen enzo. Het helpt ook om sommige dingen op een andere manier te zien.
  H Heb je al eens ervaren dat wanneer je zelf een redenering maakt in wiskunde, dat je dan tevreden bent dat je je sterk voelt?
  B5 Ja.

- H Welk vind je het leukste vak?
  B5 Muziek.
  H Wist je dat muziek en wiskunde met elkaar te maken hebben?
  B5 Neen.

- *In verband met de schoonheid van wiskunde, verdient leerling B5 een –.*

  H Kan je begrijpen dat iemand wiskunde mooi vindt?
  B5 Niet echt.

- *In verband met wat wiskunde juist inhoudt (AK 10):*

  H Wat is wiskunde volgens jou?
  B5 Een theorie om problemen op te lossen.

Les van 7-10-2010. Les over de reststelling. Oefeningen

Weergave van het gesprekje met leerling B6 en leerling B2:

- H Is het erg als je een rekenfout maakt?
  B6 Ja. Dan is de oefening fout.

- *Over het besef van de sterkte van het eigen denkvermogen. Hier verdient leerling B6 een 0.*

  H Is leren denken belangrijk?
  B6 Ja, voor later. Als je gaat werken dan moet je kunnen redeneren.
  H Heb je aan dat redeneren buiten school al iets gehad?
  B6 Niet echt. Vooral in de wiskundeles.
  H Welk gevoel geeft het als je zo een moeilijke oefening kan oplossen?
  B6 Goed.

- *Over het besef van de sterkte van het eigen denkvermogen. Leerling B2 krijgt een +.*

B2 Ik heb dat al eens gehad bij een oefeningvraagstuk dat redelijk moeilijk is en als je dat gevonden hebt dan ben je wel blij.

- *Over het samen doen van wiskunde. Hiervoor krijgt leerling B6 een +.*

H Ik zie dat jullie in de klas allemaal zelfstandig werken en dat weinigen samenwerken.Vinden jullie het leuker om wiskunde alleen te doen?
B6 Ja maar we vergelijken wel soms.

Weergave van het gesprekje met leerling B14 en leerling B9:

- *In verband met de sterkte van het eigen denkvermogen verdient leerling B14 een 0.*

H Doe jij graag wiskunde?
B14 Ja.
H Waarom?
B14 Ik vind het vak wel leuk, vooral als je het kan.
H Welk gevoel geeft dat als je het kunt?
B14 Ik weet niet. 't Is gewoon plezant als je zoiets kan oplossen.
H Geeft het je een kick?
B14 Niet zo sterk.

- *In verband met de schoonheid van wiskunde verdient leerling B14 een 0 en leerling B9 een +.)*

H Kan je begrijpen waarom sommige mensen wiskunde mooi vinden?
B14 Nee mooi niet. Daar kan ik niet echt in komen.
H Of dat ze een oplossingsstrategie elegant noemen?
B14 Ja, dan zal daar structuur in zitten. Als ze logisch ineen zit.
H Maar mooi?
B14 Da's overdreven.

H Wat vind jij daarvan leerling B9?
B9 Dat ik dat wel mooi kan vinden hoe alles in elkaar past enzo.
H Ja? Leg eens uit?
B9 Zo'n bewijs begint, dan klopt dat allemaal en loopt mooi in elkaar over totdat je hebt wat je wil.

- *Voor het ontstaan van wiskunde verdient leerling B9 een ++.*

H Zouden de mensen die de bewijzen maakten deze direct foutloos gevonden hebben? Zoals Horner : zou hij zijn schema op één momentje foutloos hebben ingezien?
B9 Nee dat denk ik niet. Ik denk dat hij daar heel lang mee bezig is geweest en dat hij vaak zijn papieren moest verfrommelen en opnieuw beginnen.
En ik denk dat dat ook wel ergens een beetje wiskunde is: ergens op zoeken en dan mislukken en lukken.

B.6 De kijk op meetkunde van de leerlingen van 4D1E voor de lessenreeks

B.6.1 Een omschrijving en modeloplossing van de vier problemen die tijdens een interview door de leerling opgelost moeten worden

Probleem 1. Waarom een grasveld schuin oversteken in plaats van eromheen te gaan?

Schets van het probleem

Stel jezelf de volgende situatie voor: je komt net niet te laat aan op school. Je wil erg graag op tijd zijn, want de leerkracht waar je les van hebt is streng. Je moet alleen nog omheen een groot grasveld lopen. Een schoolverbod zegt dat het grasveld niet betreden mag worden. Wat doe je?

Concrete opdrachten of vragen voor de leerling tijdens het interview

Eerst vraag ik de leerling wat hij in de hierboven beschreven situatie van het grasplein zou doen. Daarna stel ik hem volgende bijvragen:

Ben je er wel zeker van dat de door jou gekozen weg korter is? Waarom? Waarom tekende je geen weggetjes, maar lijnen? Wat is een lijn? Wat is een punt? Uit welke tak van de wiskunde komen lijnen en punten? Hoelang bestaat deze al? Zijn meetkundige figuren uitgevonden of ontdekt? Wat is een definitie en waarvoor dient ze?

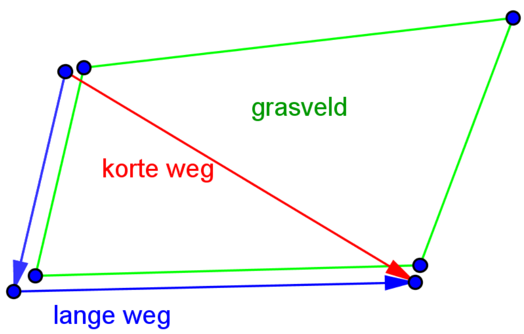
Welke vlakke figuren herken je op deze foto's? Teken zelf hun meetkundige voorstelling. Heeft het belang welke lijndikte je kiest? Kan je een vierkant of cirkel eigenlijk wel voorstellen? Zoek de kortste afstand tussen twee punten op een boloppervlak.

Wat met de som van de hoeken van een driehoek op de bol? Mogen we euclidische meetkunde wel gebruiken als we weten dat de aarde niet vlak is maar een bol?

Modeloplossing voor probleem 1

Je kan voor de oplossing van dit probleem euclidische meetkunde gebruiken. De weg rondom het grasplein kan je door een driehoek voorstellen. De vraag wordt dan of de schuine zijde van een driehoek steeds korter is dan de twee zijden van de driehoek. Het antwoord hierop is positief. Dit staat in meetkunde bekend als de driehoeksongelijkheid. De driehoek hoeft niet rechthoekig te zijn.

Schets:



Probleem 2. Welke posities van de speelplaats kan je innemen als je op dezelfde afstand van twee palen wil staan?

Schets van het probleem:

Op de speelplaats van deze school staan twee palen. Aan de eerste paal is de basketring vastgemaakt. De tweede paal is de middelste paal van het afdak. Stel dat ik je zou vragen om op gelijke afstand van deze twee palen te gaan staan. Waar zou je dan gaan staan?

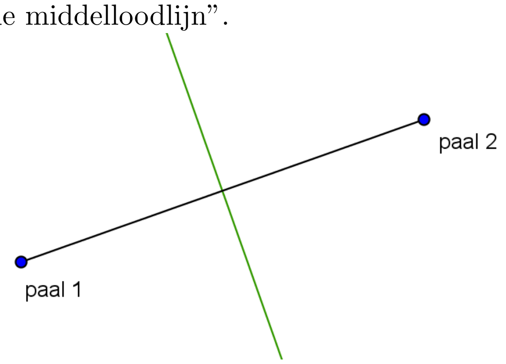
Welke concrete opdrachten of vragen stel ik aan de leerling hieromtrent?

Zijn er behalve het midden nog posities waar je kan gaan staan om even ver van twee palen te staan? Vormen al die punten samen een meetkundige figuur? Hoe heet deze lijn? Wat is de definitie van middelloodlijn van een lijnstuk? Ken je voor middelloodlijn nog een andere definitie?

Modelantwoord op probleem 2

De speelplaats zien we als een meetkundig vlak, waarin twee punten de positie van de palen aangeven. De gezochte posities bevinden zich dan op de middelloodlijn op de verbindingslijn tussen de twee punten. Dit is een resultaat uit de meetkunde, dat aangegeven wordt als "kenmerk van de middelloodlijn".

Schets:



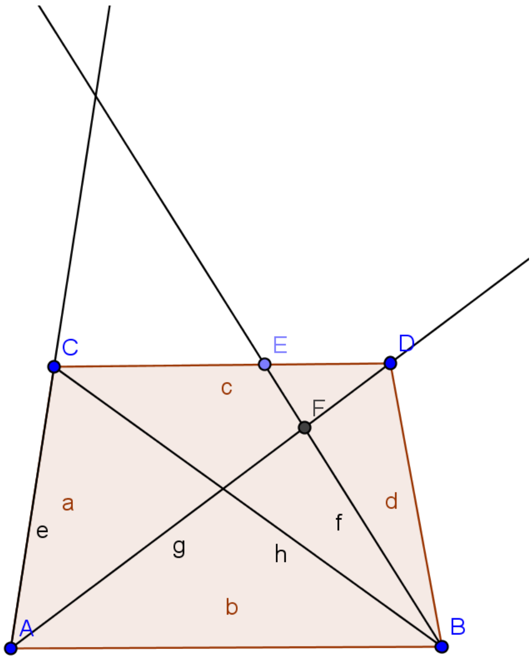
Probleem 3. Wat kan je wel/niet aflezen uit een meetkundige schets?

Schets van het probleem:

Ik toon aan de leerling twee meetkundige schetsen. Bij de eerste schets horen tien vragen. Bij de tweede schets horen zes vragen. Deze vragen gaan over wat je wel of niet kan aflezen op de getoonde schetsen. De leerling moet een kruisje zetten bij elke bewering die hij juist vindt, en een bolletje bij elke foute bewering.

Welke concrete opdrachten of vragen stel ik aan de leerling hieromtrent?

Voor de eerste schets:



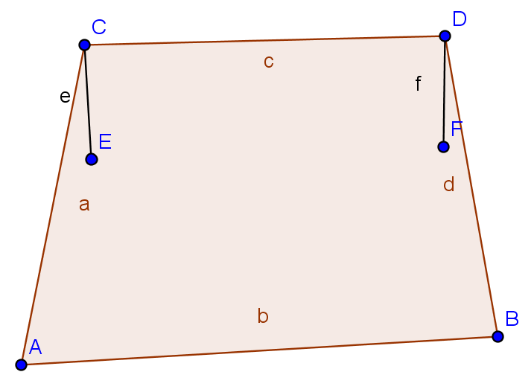
- $ABCD$ is een vierhoek?
- $ABCD$ is een trapezium?
- De hoeken in A en B zijn gelijk?
- De zijden AC en BD zijn even lang?
- De rechten AC en BE zijn snijdend?
- De rechten AB en CD zijn evenwijdig?
- E ligt op de rechte CD?
- $|EF|$ is een vierde van $|EB|$?
- E ligt tussen C en D?
- CB en AD zijn snijdend?

Leidt de leerling af uit de schets dat de getekende figuur een trapezium is, ook al is dit uit de gegevens niet af te leiden? Op de schets werden de hoeken in A en B even groot getekend, en de lijnstukken AC en BD even lang. Besluit de leerling tot gelijkheid, ook al is dit niet af te leiden uit de gegevens?

Gelooft de leerling dat twee rechten die evenwijdig getekend zijn, het ook werkelijk moeten zijn? Gelooft hij dat tweerechten die snijdend getekend zijn, ook werkelijk snijden? Gelooft hij dat twee rechten, waarvan geen snijding getekend is, ook zullen snijden omdat het op de schets zo lijkt? Wat indien een snijding wel getekend is?

Ligt een punt werkelijk op een rechte indien het zo getekend werd? Kan je op een schets zonder afmetingen weten dat een lijnstuk vier keer in een ander lijnstuk kan, doordat het zo lijkt bij meting?

Voor de tweede schets:



ABCD is een trapezium
ECD is een rechte hoek
CDF is een rechte hoek
|AC| = |BD|

- AB is evenwijdig met CD?
- AB snijdt CD?
- $|AC|$ is even lang als $|BD|$?
- $|AC|$ is langer dan $|BD|$?
- De hoeken in A en B zijn gelijk?
- AC en BD snijden elkaar?

Bij de tweede schets stond vermeld dat $ABCD$ een trapezium is. Ook werd de gelijkheid van de zijden AC en BD aangegeven. Heeft dit een invloed op wat de leerling afleidt uit de schets? Gelooft hij nu dat de grote en kleine basis van het trapezium evenwijdig zijn, of gelooft hij dat ze snijden omdat dit op de schets zo lijkt? Wat besluit hij nu over de lengte van de opstaande zijden, en over hun evenwijdigheid?

Modelantwoord op probleem3

Schets 1

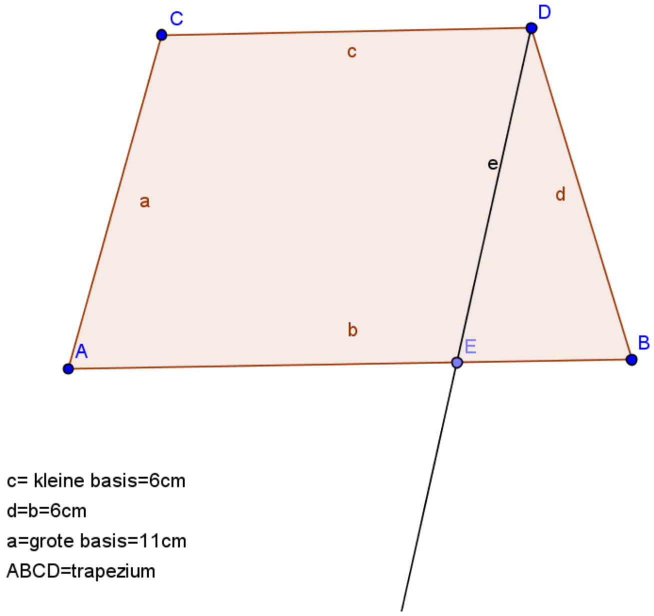
- $ABCD$ is een vierhoek. x
- $ABCD$ is een trapezium. 0
- De hoeken in A en B zijn gelijk. 0
- De zijden AC en BD zijn even lang 0
- De rechten AC en BE zijn snijdend. x
- De rechten AB en CD zijn evenwijdig. 0
- E ligt op de rechte CD. x
- $|EF|$ is een vierde van $|EB|$. 0
- E ligt tussen C en D. x
- CB en AD zijn snijdend. x

Schets 2

- AB is evenwijdig met CD. x
- AB snijdt CD. 0
- $|AC|$ is even lang als $|BD|$. x
- $|AC|$ is langer dan $|BD|$. 0
- De hoek in A en in B zijn gelijk. x
- AC en BD snijden elkaar. x

Probleem 4. Formuleer en bewijs zelf een eigenschap over de gelijkheid van de basishoeken van een trapezium

Schets van het probleem:



- Aan de leerling wordt een schets getoond van een trapezium met twee opstaande zijden van 6 cm. Het heeft een kleine basis van 6 cm en een grote basis van 11 cm. Aan welke eigenschappen denk je dat de basishoeken moeten voldoen?
- Geldt deze eigenschap voor elk ander trapezium? Aan welke voorwaarden denk je dat een trapezium moet voldoen om gelijke basishoeken te hebben? Formuleer hierover zelf een eigenschap.

Welke concrete opdrachten of vragen stel ik aan de leerling hieromtrent?
Hoe pak je een bewijs aan? Zijn er eigenschappen die geen bewijs hebben/nodig hebben? Waarvoor dient een bewijs? Waarvoor kan je een deductieve redenering gebruiken? Waarom in de klas bewijzen geven voor dingen die al bewezen werden?

Modelantwoord op probleem 4

- De basishoeken van het gegeven trapezium zijn gelijk.
- Als het trapezium gelijke opstaande zijden heeft, dan zijn de basishoeken gelijk.

Bewijs.
Construeer de rechte DE zodat $ACDE$ een parallellogram wordt, dus $DE \parallel AC$.
Dan is $a = e$. Dus is $e = d$, want a was ook gelijk aan d (gegeven).
De basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk, dus is $BED = EBD$.
Maar dan is ook $CAE = BED$ (want $CD \parallel AB$ wordt gesneden door DE). $\square$

B.6.2 Weergave van de interviews betreffende de kijk op meetkunde van 4D1E voor de lessenreeks

Tijdens de middagpauze (van 12.55 tot 13.45) neem ik (H) een interview af van drie leerlingen: B5, een zwakkere leerling, B8, een sterke leerling, en B9 (Y), die eerder middelmatig sterk is.

Weergave van het gesprek met leerling B5

(21-10-2010)

Probleem 1

H Stel jezelf de volgende situatie voor: je komt net niet te laat aan op school. Je wil erg graag op tijd zijn, want de leerkracht waar je les van hebt is erg streng. Je moet alleen nog omheen een groot grasveld lopen. Je wil het grasveld liefst schuin oversteken, maar een schoolverbod zegt dat het grasveld niet betreden mag worden. Wat doe je?

B5 Ik steek het grasplein over want die les is net iets belangrijker dan het verbod.

H Is het zinvol om het gras schuin over te steken? Is dat wel korter?

B5 Ja als je rechtdoor gaat is dat toch wel korter dan de blok om.

H Ik zie dat niet zo goed in. Kan je mij dit eens uitleggen? Je mag het papier en potlood gebruiken als je dat wil.

B5 Euhm. Ze tekent een vierkant op het blad en legt uit: als hier de plek is waar je naartoe wil gaan en je komt van hier dan ga je zo rondom het grasveld. Dat lijkt mij veel sneller dan rond het gras te gaan.

H Je hebt rondom het grasveld lijnen getekend maar in feite is dat een weg. En wat is het bolletje dat je hebt getekend?

B5 Dat ben ik.

H En wat is dat?

B5 Gewoon een punt.

H En wat is een punt eigenlijk?

B5 Om aan te duiden waar ik sta ik kon er ook een mannetje tekenen maar dat duurt te lang. Of een kruisje. Een punt is om snel en duidelijk te zeggen: hier ben ik.

H Wat heb je hier op het blad getekend.

B5 Een vierkant en wat pijltjes.

H Die pijltjes welke figuur vormen die?

B5 Een driehoek.

H Dus als je in je dagelijks leven zo'n probleempje oplost ga jij een vierkant en een driehoek gebruiken, wat ben je dan aan het doen, welke tak van wiskunde ben je aan het doen?

B5 De meetkunde.

H Inderdaad en zelfs euclidische meetkunde. Weet je waarom die euclidische ervoor staat?

B5 Nee.

H Nog nooit over Euclides gehoord?

B5 Ja. Over de euclidische deling.

H Dat is dezelfde Euclides. Die euclidische meetkunde is al erg oude wiskunde. Heb je een idee hoe oud?

B5 Ik denk al heel oud . Hoe oud dat weet ik niet. Maar ik denk dat men vroeger ook al met figuren bezig was.

H In het tuintijdschrift van Groei en Bloei dat ik hier bij me heb, staan mooie tuinen en plannetjes ervan. De cirkel en het vierkant zoals op het plannetje hier, zijn dat perfecte

	meetkundige figuren?
B5	In de natuur niet; in die tuin wel want het stenen terrasje ziet er wel perfect gemaakt uit.
H	Wat is een perfect punt: heb je dat ooit geleerd, wat een punt is?
B5	Neen.
H	Als je een meetkundige figuur zoals een vierkant of lijn of punt tekent, met welke dikte van potlood teken je dit dan best?
B5	Met een scherp punt. De juiste dikte weet ik niet precies. Maar de punt moet wel scherp zijn zodat je bij vierkanten bijvoorbeeld de rechte hoeken kan tekenen.
H	In dit tekenboek leert men aan hoe je een olifant kan tekenen. Wat gebruiken ze daarvoor?
B5	Meetkundige figuren.
H	Wat leert ons dat eigenlijk over meetkunde: je kan ze gebruiken om te tekenen, om tuinen aan te leggen...
B5	Met meetkunde kan je toch veel doen. Een tuin aanleggen is niet niks. EK13
H	Ik toon je nu prenten uit een kinderboek, ïk zie wat jij niet ziet". Er staan mooie stillevens in zoals bijvoorbeeld deze boekenkast of dit wiel in een schuur. Herken je hier ook meetkundige figuren?
B5	Ja, een cirkel, een rechthoek en een vierkant.
H	Waar zie jij dat vierkant? Ik zie een rechthoek en daar zie ik een ovaal in plaats van een cirkel. Zie ik dat verkeerd of zie jij dat verkeerd?
B5	euhm... dat is omdat die tekening in perspectief is en dan lijkt het alsof dat andere figuren zijn.
H	Tekenen wij onze meetkundige figuren dan niet in perspectief?
B5	Nee want dan worden ze vervormd.
H	Wil jij voor mij eens een vierkant tekenen op dit (ruitjes) blad, met dit potlood, zonder lat en zo nauwkeurig mogelijk
B5	Een vierkant heeft vier gelijke zijden, dan kan ik met de ruitjes werken. Ze telt evenveel ruitjes in elke richting.
H	Als je dat nu in de tuin zou moeten maken voor een terrasje van 10 op 10 meter bijvoorbeeld hoe zou je dan te werk gaan?
B5	Met stappen. Als er geen stenen zijn zoals de ruitjes hier dan kan je niet tellen en dan zet je een aantal stappen, je probeert een rechte hoek te vormen en zet dan weer zoveel stappen en zo verder.
H	Stel dat je nog een groter vierkant moet maken, hoe zou je dan de rechte hoeken maken, wat zou je gebruiken voor de rechte hoeken?
B5	Misschien twee takken, zodat je de hoek beter kan zien.
H	Ga je die rechte hoeken goed kunnen zien bij een vierkant van 20 op 20 meter, dat is zo groot als een bouwgrond ongeveer.
B5	Niet echt. Maar alleen voor de hoeken, zodat die recht zijn en dan proberen om daar nog een rechte lijn aan te maken.
H	Ja. Zeg B5 is zo'n stuk grond wel een vlak, want de aarde is toch niet plat: ze is rond (ik toon een wereldbol).
B5	Ja .
H	Een rechte lijn is de kortste afstand tussen twee punten. Hier duidt ik twee punten aan op de wereldbol. Hoe vind je de kortste afstand tussen die twee punten?
B5	Een gebogen lijn een lijn die krom staat.
H	Hoe noem je dat?
B5	Een kromme lijn.

H Inderdaad een cirkel een cirkelboog euclidische meetkunde gaat over rechte lijnen en platte vlakken en maar er is ook een meetkunde die bestaat op een bol. In plaats van met rechte lijnen werkt men er met cirkels. Vind je dat raar?

B5 Een beetje wel.

H Maar we zouden het toch zo moeten doen he want de aarde is een bol ... Euclidisch wist in zijn tijd gewoon niet dat de aarde rond was: hij dacht dat ze vlak was. Is dat dan niet erg als we die euclidische meetkunde toch gebruiken voor het tekenen van plannetjes voor onze tuin enzo?

B5 Nee.

H Waarom niet?

B5 Omdat het erg moeilijk is om met kromme lijnen te werken en aangezien de vloer hier toch ook plat is zal het zo erg wel niet zijn.

H Is hij echt plat?

B5 Een heel klein beetje gekromd zal hij wel zijn maar je merkt dat eigenlijk niet.

H Waarom niet?

B5 Omdat we niet merken dat de aarde rond is.

H Waarom merken we dat niet: het is toch zo.

B5 hahaha. Omdat de aarde zo groot is dat je niet merkt dat hij rond is.

H Ok. Dat wou ik graag horen.

Probleem 2

Op de speelplaats staan twee palen. Stel dat ik je zou vragen om op gelijke afstand van die twee palen te gaan staan. Waar zou je dan gaan staan?

B5 Ik zou van de ene naar de andere paal stappen en de stappen tellen. En dan delen door twee. Daar in het midden zou ik gaan staan.

H Is dat alles of zijn er nog plekken waar je kan gaan staan?

B5 Ja. Zal ik het even tekenen. Als deze twee punten de palen voorstellen. Wat boven het midden is er nog een punt.

H Zijn er nog punten?

B5 Ja. Aan de overkant.

H En nog?

B5 Ja wij hebben soms in de les zo'n oefeningen moeten maken en dan deden we dat met een passer. En dan waren de snijpunten de gezochte punten. Maar dat kan je moeilijk doen op de speelplaats.

H Vormen die punten allemaal samen ook een figuur?

B5 euhm...

H Het zijn toch meerdere punten he?

B5 Ja

H Zijn het drie punten?

B5 Neen . Er zijn er nog meer. Dus is het eigenlijk een lijn.

H En hoe noem je die lijn?

B5 Een rechte.

H Die lijn heeft ook een speciale naam gekregen. Weet je nog hoe ze genoemd wordt?

B5 Een symmetrielijn. Ik weet niet goed welke naam ze heeft.

H Wat is de definitie van de middelloodlijn van een lijnstuk?

B5 De lijn die door het midden van een lijnstuk gaat en er loodrecht op staat.

H Ja. Wat voor een lijn is dat als je ze tekent?

B5 (tekent de middelloodlijn correct op een lijnstuk.)

H Ken je voor deze middelloodlijn maar één definitie?
B5 Ja. Ik denk dat er maar één definitie is, maar je kan die wel op verschillende manieren zeggen. Neen. Je kan het ook anders formuleren. Je kan de volgorde van de zinsdelen omwisselen. Dat blijft een goede definitie.

Probleem 3

H Ik toon je hier een meetkundige schets met punten en lijnen, en een driehoek. Ik wil graag dat je eens nagaat wat je wel en niet van de schets kan aflezen. Je mag een kruisje zetten bij de beweringen die je juist vindt, en een bolletje bij de foute beweringen.
B5 (Ze vult het blad in. Ze haalt hierbij 5/10)
H Is de figuur een vierhoek?
B5 Ja.
H Is het een trapezium?
B5 Ja.
H Zijn de hoeken gelijk
B5 Nee.
H Zijn de zijden AC en BD even lang?
B5 Nee.
H Zie je dat op de figuur?
B5 Ja.
H Waarom?
B5 Als je de vierkantjes telt zie je het.
H Zijn AC en BE snijdend?
B5 Ja.
H Zijn AB en CD evenwijdig?
B5 Ja.
H Zeker.
B5 Ja
H Ligt e op de rechte cd?
B5 Ja.
H Is $|EF|$ een vierde van $|EB|$?
B5 Euhm. . . nee .
H Als je wil mag je een latje gebruiken.
B5 Ja een vierde maar niet op de millimeter nauwkeurig.
H Ligt E tussen C en D?
B5 Ja.
H Zijn CB en AD snijdend?
B5 Ja.
H Ok . Nu krijg je een andere schets, $ABCD$ waarbij vermeld is dat hij een trapezium is. Zijn deze 2 lijnen evenwijdig?
B5 Ja.
H Op de schets lijkt dit toch niet het geval te zijn.
B5 Maar de schets is zomaar een tekening. In theorie moeten ze wel evenwijdig zijn.
H Dus wat heeft de voorrang: een schets of wat erbij geschreven is?
B5 Wat erbij staat.
H Snijden AB en CD?
B5 Nee.
H Waarom niet? Wanneer we de twee rechten verlengen zullen ze volgens mij ginder ver een

snijpunt hebben.
B5 Neen want de theorie zegt dat ze evenwijdig zijn omdat $ABCD$ een trapezium is. In theorie niet maar op de tekening lijkt het van wel.
H Is AC langer dan BD ?
B5 Nee in theorie niet.
H Zijn ze even lang?
B5 Ja.
H Is de hoek in A en de hoek in B hetzelfde?
B5 Ja.
H Hoe weet je dat?
B5 Die zijn evenwijdig en ik denk dat die dan even groot gaan zijn.
H Snijden deze twee rechten elkaar?
B5 Ja.
H Waarom?
B5 Ze lopen niet evenwijdig.
H Waarom niet?
B5 Het is een trapezium en dan zijn er maar twee rechten evenwijdig.
H Is een rechthoek dan geen trapezium?
B5 Jawel maar het kan dat ze elkaar snijden als dit de twee evenwijdige rechten zijn en als die evenwijdig zijn dan
H Zijn die evenwijdig of niet? Kan je dat op de tekening zien?
B5 Ja op de tekening... neen niet evenwijdig want dit zijn rechte hoeken en dus...
H Inderdaad.
H Een definitie wat is dat eigenlijk? We hadden het daarnet over de definitie van middelloodlijn. Wanneer is een definitie een goeie definitie?
B5 Als de definitie duidelijk zegt wat die lijn of figuur inhoudt.
H Ken je een eigenschap of stelling over de middelloodlijn van een lijnstuk?
B5 Ja... Ik moet effe denken... als A, B en dan C op de middelloodlijn een driehoek is ......
H Ik zal de definitie nog eens herhalen: een middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn die door het midden van het lijnstuk gaat en er loodrecht op staat.
Denk nu eens terug aan het probleem van daarstraks toen ik vroeg om tussen twee palen te gaan staan, even ver van de twee palen verwijderd.
B5 De middelloodlijn staat in het midden van A en B maar dat is eigenlik een deel van de definitie
H ja uit welke punten bestaat die lijn
B5 ja als je die punten e noemt die op de middelloodlijn liggen, dan is AE gelijk aan EB. Al die eigenschappen enzo ik weet daar niet veel meer van. EK5-
H kan je die niet zelf terugvinden?
B5 Ja.
H Als ik je nu zeg dat het over een eigenschap gaat die over de punten van een middelloodlijn gaat, kan je die eigenschap dan eens proberen te formuleren?
B5 Een punt van de middelloodlijn ligt even ver van A en B.
H Zou je dat in een als... dan... vorm kunnen zeggen?
B5 Als een punt even ver is van A als van B, dan ligt het op de middelloodlijn van A en B.

Probleem 4

H Hieronder is een trapezium geschetst. Het heeft twee opstaande zijden van 6 cm, een kleine basis van 6 cm en een grote basis van 11 cm. Aan welke eigenschappen denk je dat de basishoeken moeten voldoen? Kan je zelf een eigenschap vinden?

B5 Moeten die gelijk zijn? Ik weet niet... die zijn zeker niet altijd gelijk.

H Niet altijd gelijk: wat bedoel jij hiermee? Zijn ze in dit speciaal geval gelijk?

B5 Ja.

H Waarom?

B5 Omdat de twee opstaande zijden even schuin staan omdat de vakjes even veel zijn.

H Denk je dat die eigenschap voor elk ander trapezium ook geldt?

B5 Neen.

H Voor welke niet?

B5 Een rechthoekig trapezium.

H Alleen voor rechthoekige trapezia?

B5 Neen voorbeeld (tekent een trapezium)

H Kan je door dit tegenvoorbeeld zeker besluiten dat de eigenschap niet geldt?

B5 Ja.

H Wanneer zouden de basishoeken van een trapezium welk gelijk moeten zijn? Aan welke voorwaarde moet het trapezium dan voldoen? Nu ben je zelf een eigenschap aan het ontdekken.

B5 Dus wanneer zijn de hoeken even groot?

H Ja.

B5 Als je het midden neemt van de basis en je neemt het midden van de bovenste zijde en die twee komen juist onder elkaar te liggen dan gaan die hoeken even groot zijn

H Ok. Hoe zou je dat formuleren?

B5 Ik denk dat het wel waar is maar dat het niet echt een eigenschap is.

H Maar als het waar is moet je het kunnen bewijzen. Hoe zou je dat hier kunnen doen? Hoe zou je daar zelf aan beginnen? Zou je dat durven?

B5 Ja, dan denk ik dat... meestal weet ik dan wel dat het niet helemaal altijd correct zal zijn.

H Maar moet het helemaal correct zijn, mag je er niet wat aan verbeteren? Hoe zou je eraan beginnen? Wat doe je altijd eerst om een bewijs te maken?

B5 Het gegeven en het te bewijzen opschrijven.

H Klopt. Is het belangrijk van de gegevens en het te bewijzen allemaal op te schrijven in symbolen of mag het ook in woorden?
Als je mij de uitleg correct kan doen in woorden, waarom jij denkt dat als de middens overeenkomen, dan ook de hoeken gelijk zullen zijn: is dat ook goed?

B5 Neen ik denk dat het wiskundig juister is in symbolen.

H Ja, waarom denk je dat?

B5 euh... Wij moeten in wiskunde altijd alles in symbolen zetten. Het kan wel juist zijn in woorden maar als je dat zo moet opschrijven...

H Kan je het aan mij in woorden uitleggen?

B5 Ja. Dan zullen die opstaande zijden ook even lang zijn en dan zijn de hoeken gelijk. Je ziet dat op zicht maar dat is zo moeilijk om dat uit te leggen.

H Met op zicht moeten we oppassen.

B5 Ja. Daar hebben we ons daarjuist ook mee laten vangen.

H Als je een bewijs moet geven in meetkunde zoals vroeger over de diagonalen van een parallellogram enzo... weet je nog hoe je daarbij te werk ging? Ik vraag hierbij niet naar het concrete bewijs, maar wel wat de strategie was de aanpak.

B5 ...

H Je hebt mij de uitleg al eens gegeven in een vorig interview: je zegde toen dat je eerst kijkt wat je allemaal geleerd hebt en dan daarvan ga je dan iets gebruiken om een bewijs te maken.
B5 Ja.
H Dus wat moet je nu doen als je dat bewijs wil maken?
B5 Andere eigenschappen gebruiken die je vooraf hebt geleerd.
H En heb je een idee welke eigenschap je kan gebruiken om te bewijzen dat twee hoeken hetzelfde zijn?
B5 Neen, ik weet het niet meer.
H Zou het je helpen als je de handboeken van vorig jaar erbij mocht nemen?
B5 Ja, ik kan mij dat echt niet herinneren.
Einde.

Weergave van het gesprek met leerling B8

(22-10-2010)

Probleem 1
H Stel jezelf de volgende situatie voor: je komt net niet te laat aan op school. Je wil erg graag op tijd zijn, want de leerkracht waar je les van hebt is erg streng. Je moet alleen nog omheen een groot grasveld lopen. Een schoolverbod zegt dat het grasveld niet betreden mag worden.Wat doe je?
B8 Als er niemand is van de leerkrachten zou ik snel over het gras lopen, en als ik een leerkracht zag, langs het weggetje. Als de leerkracht niet keek zou ik proberen een hoek af te snijden of zo.
H Hoeken afsnijden, is dat een oplossing? Gaat dat sneller? Ben je daar wel zeker van?
B8 Ja,want dan is de afstand minder. . . denk ik.
H Ja?
B8 Ja, daar ben ik bijna zeker van.
H Ik zie dat niet zo direct. Kan je mij dat eens uitleggen?
B8 Ja (Hij tekent op papier een rechthoekige driehoek) stel dat je hier de hoek hebt van het grasplein en je kunt hierzo rondstappen dan gaat dat minder tijd nemen dan dat je helemaal rond moet gaan.
H Ja? Hoe weet je dat? Is dat altijd zo? Ook als je een andere hoek moet afsnijden?
B8 Als je geen rechte hoek hebt dan kan dat wel anders zijn denk ik. Of neen (hij tekent een andere driehoek die niet rechthoekig is) dan is dat toch nog altijd sneller want als je die boog eromheen moet doen is dat een langer stuk.
H Zou ik een hoek kunnen verzinnen waarbij dat korter wordt?
B8 euhm. . . neen dat denk ik niet. Ik denk dat een rechte lijn altijd korter is dan de omweg.
H Jij begint nu wel over lijnen, maar ik had het in mijn probleem over weggetjes. En ik zie dat jij op papier in de plaats van weggetjes ook lijnen tekent.Waarom doe je dat?
B8 Dat is gemakkelijk om daarmee te vergelijken want de meeste weggetjes zijn ook lijnen als je ze van boven bekijkt en je loopt altijd in een bepaalde richting op een lijn eigenlijk.
H Wat is in dit probleem het belangrijkste van dat weggetje?
B8 Om snel te gaan moet dat rechtdoor gaan.
H Oh ja, denk jij dus dat de kortste afstand tussen twee punten een rechte lijn is?
B8 Ja.

H Zo een rechte lijn heb je hier met een balpen getekend die nogal een fijne punt heeft. Met welke dikte moet je ze eigenlijk tekenen?

B8 Een lijn mag denk ik met elke dikte getekend worden. Dat is zoals een punt. Een punt kan heel klein maar ook heel groot zijn, dat is niet te benoemen.

H Wat is een punt?

B8 Een plaats die als één eenheid beschouwd wordt . Een punt wordt als n plaats beschouwd.Wanneer je meerdere punten hebt dan heb je iets groters, al een vlak.

H Als we over deze dingen praten, en zo'n tekeningen beginnen te maken, wat zijn we dan aan het doen?

B8 Een schets aan het maken.

H Welke tak van wiskunde houdt zich hiermee bezig?

B8 Meetkunde.

H Hoelang denk je dat men al meetkunde doet en zo'n plannetjes maakt?

B8 Al heel lang. Want in de geschiedenis heeft men heel grote bouwwerken kunnen maken en daar had men dat voor nodig.

H Voor tuinaanleg gebruikt men ook vlakke meetkunde. Ik toon je hier enkele plannetjes van tuinen uit het tuintijdschrift "Groei en Bloei". Je ziet dat de lijnen hier ook vrij dik getrokken zijn. In meetkunde zoals die door Euclides is uitgevonden of ontdekt, heeft hij definities gegeven van punten, lijnen, vlakken, driehoeken enzo. Wat is een definitie volgens jou?

B8 Dat is een beschrijving van iets die zeer nauwkeurig is zodat als je die beschrijving geeft, je dan duidelijk weet wat het is. Zodat iedereen dan hetzelfde denkt.

H Ja. Een stelling wat is dat? Of een eigenschap?

B8 Een stelling is iets dat is afgeleid uit de definitie. Als er iets vasstaat, de definitie, dan kan je daaruit een eigenschap afleiden. Voorbeeld iets dat je is opgevallen zoals de basishoeken van een rechthoekige driehoek die gelijk zijn aan 45°. Dat is iets dat hierbij opviel.

H In een rechthoekige driehoek zijn de basishoeken 45°. Klopt dat wel helemaal? Teken dat eens.

B8 In totaal zijn ze 45°.

H Ja?

B8 In een gelijkbenige driehoek is dat zo. In een rechthoekige zijn ze samen 90°.

H Wat je zei vond ik allemaal heel interessant maar ik heb toch wel wat opmerkingen hierbij. Bekijk nog eens een plannetje van een tuin. De kortste afstand tussen twee punten is volgens jou een rechte lijn. Ik heb hier vragen bij. Want we weten toch dat de aarde een bol is, dus het oppervlak in een tuin is niet vlak. Neem eens een punt hier en hier op de wereldbol. (ik toon dit op een schaalmodel) Wat is dan de kortste afstand tussen die twee punten?

B8 Gewoon de lijn er door.

H Bedoel je recht door de wereldbol? Het is wel de bedoeling dat we op het aardoppervlak blijven.

B8 Dan is de kortste afstand een lijn op de bol, maar die is een beetje langer dan een rechte. Maar dat verschil is zo klein dat je het als een rechte kunt zien.

H In de geschiedenis heeft men een andere meetkunde uitgevonden, namelijk een meetkunde op een bol. Waarbij in de plaats van lijnen, cirkelbogen gebruikt worden. Want voor kleine afstanden zijn de verschillen niet zo groot, maar als het over erg grote afstanden gaat, afstanden in het heelal, dan worden de fouten te groot. In die bolmeetkunde kan je heel andere eigenschappen afleiden voor bijvoorbeeld driehoeken. In euclidische meetkunde is de som van de hoeken van een driehoek gelijk aan 180°. Een driehoek op een bol wordt gevormd door drie punten op de bol en hun verbindingslijnen ertussen. Maar deze zijn nu cirkelbogen. Wat denk je dat nu de som van de hoeken zal zijn?

B8 Groter dan 180°.

H Inderdaad. Wij tekenden onze meetkundefiguren in een euclidisch vlak. Hoe groot mogen de punten zijn?

B8 Ik denk zo klein mogelijk. Maar je kan nooit een superdunne lijn tekenen.

H Ken je de definitie die Euclides gaf voor een punt?

B8 Nee.

H Een punt is wat geen afmetingen heeft. Bestaat een punt wel in de realiteit?

B8 Neen.

H Waar bestaat een punt wel?

B8 In wiskunde.

H Wiskundige objecten zoals lijnen, driehoeken, vierkanten:...

B8 Die bestaan eigenlijk allemaal niet.

H Rondom ons zien we wel heel wat voorwerpen, die toch op deze wiskundige objecten lijken. Noem er eens enkele die je hier in de klas kan zien.

B8 De tegels zijn rechthoekig, en daar hangt een cirkel.

H Toch is er een verschil tussen deze vormen en de vormen die bestaan in de euclidische wereld, het euclidisch vlak. We gaan proberen enkele van deze verschillen te vinden. Bekijk eens deze prenten (perspectieffoto met fotolijsten op een muur) . Welke vlakke voorwerpen herken je hier?

B8 Een cirkel, veelhoeken, vierkant en rechthoek.

H Zie je een vierkant?

B8 Ja. Hier.

H Maar ik zie hier geen vierkant maar een ruit. En vind je dit hier een cirkel?

B8 Neen. Dat is een ovaal.

H En dit?

B8 Dat is wel een cirkel.

H Dat lijkt mij ook eerder een ovaal.

B8 Ja, maar dat ziet er uit als een ovaal maar het is een cirkel.

H Hoe komt dat?

B8 Omdat de foto van opzij getrokken is.

H Ja is dat ook zo in een euclidisch vlak? Als je daar een cirkel tekent kan dat dan soms een ovaal worden? EK 2

B8 Ik denk het wel. h Ja?

B8 Ja.

H Dus als jullie een schets maken van een probleem met een cirkel erin, dan tekenen jullie soms een ovaal in plaats van een cirkel?

B8 Ja. Soms zie je een ovaal en denk je dat het een cirkel is zoals op de foto.

H En wat teken je dan?

B8 Een ovaal.

H Die euclidische meetkunde, gebruik jij die zelf in je persoonlijk leven, thuis...?

B8 Als ik een moeilijk probleem heb dan helpt het om dit simpel te tekenen op een vlak en recht op recht.

H Heb je het nu over de wiskundelessen?

B8 Neen. Ik heb thuis iets gemaakt in een aanhangwagen, een schap en om te zien hoe ik dat

juist moest maken, zodat het precies past, heb ik dat eerst getekend.
H Kijk eens naar de foto van het Sint Pietersplein in Rome. Denk je dat ze daar ook meetkunde voor nodig hadden?
B8 Ik denk dat wel; Anders hadden ze dat niet zo mooi rond kunnen maken.
H Stel dat ik je vroeg om iets te berekenen over het plein zelf. Wat voor een schets zou je dan maken?
B8 Een cirkel.
H Als ik zou vragen naar de afstand tussen de pilaren of de breedte van de zuilen.
B8 Dan zou ik het zicht van op het plein naar de zuilen toe tekenen…recht voor.

Probleem 2

H Deze schets is een euclidische schets. Wat kan je uit deze schets afleiden? Kan jij met een kruisje aangeven welke beweringen juist zijn, en met een bolletje welke beweringen fout zijn?
B8 (lost de vragen op en behaalt 10/10 voor de eerst schets. De tweede schets doe ik niet meer met hem.)

Probleem 3

H Wat is een middelloodlijn van een lijnstuk?
B8 Een lijn die loodrecht staat op het lijnstuk en door het midden gaat.
H Kan je daar een andere definitie van geven?
B8 euhm…
H Kan je hier een andere definitie voor geven of is er maar één definitie?
B8 Neen. Ik denk dat dat zeker gaat. Een middelloodlijn op een lijnstuk is ook een lijn die het lijnstuk in even grote delen deelt en een hoek van 90°maakt.
H Ken je een kenmerk van middelloodlijn?
B8 Nee.
H B8 ik heb hier een maquette van de speelplaats. Hier staan twee palen waar 100 of 200 meter tussen is. Stel dat ik je vraag om op dezelfde afstand van de twee palen te gaan staan. Waar zou je dan gaan staan?
B8 Da's wel moeilijk. Dat weet ik niet juist hoe ik dat kan doen. Heb je een meter?
Ik zou de afstand tussen die twee palen meten en dan in twee delen. Maar dan moet je wel een lange meter hebben.
H Zou je dat met een vouwmeter doen?
B8 Nee met een rolmeter. Als die lang genoeg is.
H Zijn er nog punten waar je zou kunnen gaan staan?
B8 Ah ja. Je kan op de middelloodlijn gaan staan.
H Wat is dan een eigenschap van middelloodlijn?
B8 Elk punt van de middelloodlijn is even ver verwijderd van de eindpunten van dat lijnstuk.
H Kan je nu een andere definitie voor middelloodlijn geven?
B8 Elk punt van een middelloodlijn ligt op gelijke afstand van de eindpunten.
H Is dat een goede definitie voor middelloodlijn?
B8 Het werkt omgekeerd he.
H Ja. Dus wat zou je moeten hebben. Je hebt hier een enkele pijl.
B8 Een dubbele pijl.
H Hoe zou je die kunnen formuleren? Een middelloodlijn is…
B8 Een lijn die een lijnstuk in twee gelijke delen verdeelt en loodrecht erop staat.

Probleem 4

H Tot daar middelloodlijn. Hier heb ik een schets van een trapezium met opstaande zijden van elk 6 cm en een basis van 11 cm. De bovenste zijde meet ook 6 cm. Durf je zelf een eigenschap formuleren voor de basishoeken?

B8 Die basishoeken kunnen altijd veranderen want als die 6cm verandert dan krijg je weer een andere hoek dus ...

H Ja maar ik vraag eerst een eigenschap voor dit concreet trapezium. Stel je voor dat je met houten latjes een constructie wil maken voor je aanhangwagen, een tussenschot of zo . Wat kan je nu zeggen van de hoeken?

B8 euhm...

H Gewoon om te checken of je ze goed hebt gemaakt bijvoorbeeld.

B8 Die basishoeken zullen hier gelijk zijn denk ik.

H Je denkt dat. Maar je bent niet zeker of wat?

B8 Nee ik ben nog aan het denken. Nee die onderste hoeken moeten niet gelijk zijn. Als je niet weet dat het een trapezium is...

H Maar je weet het wel he, het is erbij geschreven.

B8 Dan zijn de basishoeken gelijk.

H Ja? Kan je dat uitleggen?

B8 De bovenste en de onderste zijde zijn verschillend dus is er maar één plaats waar de opstaande zijden kunnen samenvallen. Als de bovenste en onderste zijde even lang waren dan zouden we een parallellogram kunnen hebben en nu niet, nu is er maar één plaats waar ze kunnen samenvallen. Omdat je vaste afstanden hebt.

H Dus zo zie jij dat. Geldt de eigenschap van gelijke basishoeken voor elk ander trapezium?

B8 Nee. Neem bijvoorbeeld een trapezium met eenzelfde bovenste en onderste zijde.

H Moet je bewijzen dat die eigenschap niet voor elk trapezium geldt?

B8 Nee je mag een tegenvoorbeeld geven.

H Geef eens een voorbeeld waarbij de basishoeken niet gelijk zijn.

B8 (Hij tekent zo'n voorbeeld)

H Wanneer gaan de basishoeken wé gelijk zijn? Voor welke soort trapezium?

B8 Voor gelijkbenige trapezia.

H Ben je daar zeker van? Teken eens een gelijkbenig trapezium.

B8 O nee want een parallellogram is ook een trapezium. En de basishoeken zijn verschillend.

H Is een parallellogram een trapezium? Twee zijden zijn evenwijdig dus inderdaad. En voor gelijkbenige trapezia die geen parallellogram zijn...

B8 Daar is dat wel zo denk ik.

H Teken dat eens.

B8 (tekent een willekeurig trapezium met dezelfde opstaande zijden — dat geen parallellogram is.)

H Hoe zou je dit nu kunnen bewijzen? Als je zoiets moet bewijzen, hoe begin je daar dan aan?

B8 Je kan de figuur misschien op één of andere manier verdelen in twee driehoeken of zo.

H Probeer eens.

B8 (Hij tekent driehoeken door de diagonalen van het trapezium te tekenen.)
Zo en dan kan je deze driehoek nemen en deze (hij toont de driehoeken die bestaan uit en opstaande zijde, een diagonaal en de basis). Je moet dat dan proberen te bewijzen met al de eigenschappen en stellingen die je ervoor al gezien hebt. En dan heb je een bewijs.
EK8 + +

H (ik toon B8 een groot schema van zijn voorkennis, met logische verbanden ertussen.) Hier zijn de eigenschappen die je in het eerste en tweede jaar hebt gezien. Heb je ooit zo'n

schema gezien?
B8 Neen.
H Nog nooit zelf zoiets gemaakt? Hier zie je hoe mooi de euclidische meetkunde is opgebouwd. Zoek eens op dit schema welke eigenschappen je zou kunnen gebruiken om te bewijzen dat de basishoeken van het trapezium gelijk zijn. Wat kan je gebruiken om aan te tonen dat twee hoeken gelijk zijn?
B8 Congruentie.
H Inderdaad en dan? Welk congruentiekenmerk ga je kiezen?
B8 Misschien zzz en dan zou je iets kunnen hebben dat de diagonalen even lang zijn en dat is al een van de zijden. Want daar is een eigenschap voor denk ik...
H Wat heb je nog gegeven? Waar zijn je gegevens eigenlijk? Die heb je nog niet opgeschreven en je te bewijzen ook niet. Doe dat eens eerst.
B8 (doet het)
H Nu schrijf je dat in woorden op? Moet dat niet in symbolen?
B8 Ja.
H Ja? Moet dat?
B8 Dat moet niet denk ik maar dat is handig omdat je dan niet zo veel moet opschrijven.
H Ik weet het niet zo. Is het niet handig bij je tekening lettertjes bij te schrijven en namen te geven ?
B8 Ja dat is waar. (Hij noteert de hoekpunten met A, B, C, D)
H Wat stelt die letter voor?
B8 Dat is gewoon een naam.
H Van wat?
B8 Van de hoek.
H Ja?
B8 Van het punt.
H Is daar een punt?
B8 Ja. Dat is waar die twee zijden samenkomen. Dat is daar eigenlijk vol met punten daar en er is hier één punt dat je een naam geeft.
H En dan...
B8 Met die evenwijdigheid kan je niet veel doen. Je zou daar nog iets anders moeten van afleiden.
Einde.

Weergave van het gesprek met leerling B9

(25-10-2010)

Probleem 1
H Wat is een definitie ?
B9 Ik denk dat een definitie weergeeft wat iets is en moet hebben om aan een bepaalde naam te voldoen. Bijvoorbeeld een vierkant moet die en die eigenschappen hebben want anders is het geen vierkant. En een rechthoek moet dat en dat hebben of het is geen rechthoek.
H Heb je dat in meetkunde geleerd?
B9 Ja.
H Weet je waarom meetkunde euclidisch genoemd wordt?
B9 Neen.
H vanwege Euclides, die ze uitgevonden heeft in de derde eeuw voor Christus.

De definitie van cirkel, vierkant en driehoek komen van dezelfde Euclides. Weet jij Waarom Euclides definities maakte? Enkel om goede omschrijvingen van objecten te geven?

B9 Nee ook omdat het makkelijk is om met elkaar te communiceren als iedereen dezelfde definities gebruikt. Dan weet iedereen direct waar het over gaat. Iedereen noemt dan een tafel een tafel en geen stoel, en weet waaraan die moet voldoen.

Probleem 2

H Inderdaad. Stel je voor dat deze maquette de speelplaats voorstelt. Op de speelplaats bekijk ik deze twee palen: de paal van de basketbalring en een paal van het afdak. Beide palen zijn verschillende tientallen meters van elkaar verwijderd. Nu vraag ik jou: waar moet je gaan staan om op dezelfde afstand van de twee palen te staan?

B9 In het midden.

H En hoe zou je dat midden bepalen?

B9 Als ik geen instrumenten heb zou ik het op zicht proberen te schatten. Of anders met stappen tellen of zoiets.

H Gaat dat gemakkelijk zijn om op zicht te bepalen als je weet dat de twee palen zover van elkaar verwijderd zijn?

B9 Neen want er staat ook nog een bloembak in de weg. En dat is zeer lastig. Het kan ook met stappen te gaan tellen maar dat is niet zo nauwkeurig.

H Hoe zou je tewerk gaan als je een koord ter beschikking had?

B9 Dat hangt ervan af hoe lang ze is.

H Lang genoeg.

B9 Ok, dan zou ik eerst de koord van de ene naar de andere paal spannen en dan in het midden plooien. Misschien gaat dat niet zo gemakkelijk maar dat gaat.

H Zijn er behalve dat midden nog plaatsen waar je kan gaan staan?

B9 euh je kan ook hier en daar in het midden gaan staan…

H Wijs dat eens exacter aan waar je wil gaan staan.

B9 Hier en hier dat is ook even ver.

H Het moet niet altijd op dezelfde afstand zijn, je moet gewoon even ver van de twee palen gaan staan.

B9 Ah ja, maar dan kan je overal gaan staan. Als je dat begint te meten enzo dan…

H Kan je dat eens tekenen voor mij waar je overal kan gaan staan?

B9 (tekent twee punten en zet kruisjes op de posities waar je kan gaan staan.) Hier en hier is een paal.

H Jij tekent de palen nu als punten.

B9 Ja. Dat is van boven gezien he.

H Wat is een punt?

B9 Een klein cirkeltje zeker.

H Waar kan je nu gaan staan om op dezelfde afstand van die twee punten te staan?

B9 Zeker hier in het midden ergens, ik zal nu een schatting doen en dan als je de stappen zou meten naar omhoog vanuit de het eerste punt en evenveel stappen vanuit het tweede punt dan krijg je hier ergens een punt dat even ver van de twee punten ligt.

H Probeer het eens wat nauwkeuriger te doen. Niet tot op de millimeter maar toch wat exacter.

B9 Dit doet mij een beetje denken aan de stelling van Pythagoras.

H Jullie hebben daar een eigenschap over gezien.

B9 Dat kan, dat weet ik niet meer.

H De stelling van Pythagoras, zeg die eens.

B9 De som van het kwadraat van de schuine zijde is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden. Of zoiets.
H Zijden van wat?
B9 Van een driehoek.
H Een willekeurige driehoek?
B9 Nee een rechthoekige driehoek.
H Ik heb hier een kleitablet.
B9 Van Pythagoras?
H Inderdaad. In spijkerschrift staan er getalletjes bijgeschreven. Heb je een idee hoe oud dit is?
B9 Pythagoras zal ook wel een Griek geweest zijn uit de derde of vierde eeuw voor Christus zeker?
H Ja dat is waar maar deze kleitablet is al veel ouder. Die stamt af van de Babyloniërs.
B9 Dus de Babyloniërs kenden al de stelling en hadden al bewezen dat die waar was.
H Dat heb ik niet gezegd.
B9 Ze hadden een idee dat het zo zou zijn.
H Ja, maar pas in de derde eeuw voor Christus werd dat ook bewezen.
Wat is een bewijs?
B9 Ik denk dat een bewijs iets is waarmee iemand kan aantonen dat een berekening of iets wat je doet met wiskunde altijd klopt. Een bewijs leidt meestal tot een stellig of een eigenschap van een driehoek of zo.
H Hoe ziet een bewijs eruit?
B9 Je hebt altijd een gegeven, een te bewijzen en een bewijs. Je hebt zowieso gegeven wat je allemaal hebt een driehoek een zijde enzo en gevraagd is wat je wil gaan bewijzen, dat is altijd opgebouwd uit stappen en dan een bewijs dan moet je altijd in je achterhoofd houden waar je naartoe wilt en dan denk ik dat het heel veel proberen is en allemaal verschillende dingen testen enzo voordat je eigenlijk tot een bewijs kan komen.
H Verschillende dingen testen?
B9 Ja, zoals de stelling van Pythagoras of zo dan is dat misschien eerst een kwadraat en dit maar dan klopt dat niet bij alles en dan zeg je dat kan niet en als je dat kan bewijzen en het klopt ook bij alles dan kan je ook zeggen het is echt bewezen.
H dus een stelling moet voor alles kloppen?
B9 ja.
H Ken je de definitie van middelloodlijn nog?
B9 Een middelloodlijn da's ook een driehoek zeker he?
H Neen, ik zal mijn vraag beter stellen: wat is de middelloodlijn op een lijnstuk?
B9 Dat is in het midden en loodrecht op het lijnstuk.
H Hoe kan je die construeren?
B9 Dat is ook zoiets met cirkels. Met een passer moet je op de hoekpunten gaan staan en dan een boogje op het lijnstuk zetten lang links en rechts. En dan krijg je in het snijpunt van de twee boogjes het midden.
H Dat is niet helemaal juist. Denk er nog eens over na.
B9 De middelloodlijn is loodrecht en gaat door het midden. Je kan ook ruitjes tellen natuurlijk, dan is het ook opgelost.
H Dat is niet de bedoeling. Het zou moeten met passer en liniaal.
B9 Ja maar ik weet niet meer hoe het juist moet. Het was iets met boogjes en dingen maar...
Wacht eens, was het niet dat je hier boven en hier onder twee boogjes moest zetten?

H Waar zet je het middelpunt van die boogjes?
B9 In de hoekpunten.
H Vanwaar komt deze constructie? Jullie hebben ze vroeger aangetoond.
B9 Dat kan wel maar bewijzen onthou ik gewoonlijk niet zo goed.
H Heb je een idee welke eigenschappen je daarvoor gezien had? En die je helpen om dat bewijs te maken.
B9 Neen geen idee.
H Ik heb het bewijsje hier bij. Jullie zagen vroeger dat als een punt op de middelloodlijn ligt van een lijnstuk, dat dit punt dan even ver ligt van de twee eindpunten van het lijnstuk. Zegt dit jou ets?
B9 Dat klinkt wel bekend maar. . .
H Ok. Dus als een punt op de middelloodlijn ligt dan ligt het even ver van het ene als van het andere eindpunt.
B9 Dat is wat ik daarjuist zegde in verband met die speelplaats. Als je zo een opdracht krijgt dan gebruik je dat wel maar je denkt er niet aan dat het wiskunde is. Als je op de speelplaats gaat staan dan denk je automatisch aan hoe het moet en je denkt er niet aan om met de middelloodlijn te werken.
H Neen? Waarom niet?
B9 Ik weet niet. Je hebt dat allemaal geleerd en ik denk dat je dat heel dikwijls zo gewoon toepast zonder er bij na te denken wat je precies aan het toepassen bent.
H Of dat je het niet gaat toepassen misschien. Want eerst wou je gewoon in het midden van de twee palen gaan staan. En je paste helemaal de eigenschap van de middelloodlijn niet toe.
B9 Neen. Maar als je dan daarna naar meerdere plaatsen vroeg begon ik na te denken en dan gebruik je dat wel.
H Bedankt voor deze interessante uitleg. Om deze stelling te bewijzen, werd in het blauw de gegevens genoteerde en in het rood het te bewijzen. Ik wil graag dat je het bewijs eens aandachtig leest en probeert te begrijpen. Daarna zal ik er wat vraagjes over stellen.
B9 Ok. . . . . . Ik denk dat ik het gelezen heb.
H Wat is de clou van het bewijs: wat is de kern? Waarop steunt het?
B9 Op congruente driehoeken.
H Zeer goed. En welk kenmerk van congruente driehoeken?
B9 Ik denk ZHZ.
H Stel dat ik je de clou van het bewijs zou geven. Zou je het bewijs dan zelf kunnen maken?
B9 niet zo waarschijnlijk, het zal er wel op lijken. Maar ik denk dat als u zegt zhz dat ik dan niet al die stappen ga zetten om uit te leggen waarom het zhz is. Want als je zo'n bewijs zelf moet geven is dat veel moeilijker dan wanneer je het krijgt en dan moet studeren.
H Iets dat nieuw is, is moeilijker te vinden.
B9 Ja . Dit is nu niet nieuw natuurlijk en ik denk dat ik wel tot iets zou komen want wij zijn hier in het tweede jaar veel mee bezig geweest. Uiteindelijk zal het misschien niet helemaal kloppen maar. . .
H In het tweede jaar leerden jullie bewijsjes maken in verband met congruentie. Hoe moet een bewijs dat klopt er uitzien?
B9 Je moet eerst zien waarom die congruent zijn enzo en dan daarop verder bouwen omdat je dan eigenschappen van congruente driehoeken kan gebruiken om dan te weten dat de zijden even lang zijn of dat punten even ver van elkaar liggen.
H Is het nodig een bewijs in symbolen te noteren of mag dat ook met woorden?

B9 Ik vind de symbolen wel nodig: het is makkelijker dan woorden. Als je alles moet uitschrijven dat duurt veel langer en maakt het ook minder overzichtelijk. En ik vind dat een bewijs overzichtelijk moet zijn. Want dat is makkelijker om dan te zien waar het over gaat en hoe het in elkaar zit enzo.

H Dus het is beter voor het overzicht. Maar mag het ook in woorden?

B9 ik denk dat een bewijs in woorden niet fout is maar het ziet er dan gewoon niet uit. Het is dan precies een doorlopende tekst.

H Een stelling zoals die over de middelloodlijn, kan je daarvan de omgekeerde stelling geven?

B9 Ja: als een punt even ver ligt van beide eindpunten van een lijnstuk, dan ligt het punt ook op de middelloodlijn van het lijnstuk.

H Stel dat je deze omgekeerde stelling ook kan bewijzen wat weet je dan? Je hebt dan een als... dan en het omgekeerde

B9 Waarschijnlijk het omgekeerde bewijs.

H Ik bedoel het niet zo: ik vraag me af welke eigenschap je dan kan formuleren: als je eigenschap geldt en haar omgekeerde.

B9 Dat zegt mij wel iets. Dat heeft ook waarschijnlijk een speciale naam he?

H Een kenmerk.

B9 jaja.

H Hoe zou dat kenmerk eruit zien. Probeer het eens te formuleren.

B9 euhm... je krijgt dan als en slechts als

H Probeer eens

B9 Een punt ligt op de middelloodlijn van een lijnstuk asa het even ver van beide eindpunten van het lijnstuk ligt.

H Herhaal dit nog eens traag en denk ondertussen goed na over wat je zegt.

B9 Een punt ligt op de middelloodlijn van een lijnstuk asa het even ver van beide eindpunten van het lijnstuk ligt.

H Zou je daaruit een nieuwe definitie voor middelloodlijn kunnen halen?

B9 euhm...

H Ik zal het nog eens herhalen. Een punt ligt op de middelloodlijn van een lijnstuk asa het even ver van beide eindpunten van het lijnstuk ligt. Kan je hieruit een nieuwe definitie voor middelloodlijn halen?

B9 Ja, als je... wacht hoor... de eindpunten als die even lang zijn dan...

H Nu hoor ik een "als... dan". Maar dan heb je weer een eigenschap die we daarnet zagen.

B9 Oh ja. Dan kan ik niet direct op iets komen.

H Ik zal een beetje helpen. Hoe ziet een definitie eruit? Geef die van de middelloodlijn van een lijnstuk nog eens. Een middelloodlijn van een lijnstuk is...

B9 De rechte die loodrecht erop staat en door het midden van het lijnstuk gaat.

H Dus wanneer je een definitie geeft dan begin je definitie met : Een middelloodlijn is ...

B9 Een rechte...

H En waaruit bestaat die rechte?

B9 Uit punten...

H En welke eigenschap hebben die punten?

B9 Ze liggen allemaal op dezelfde afstand van de twee hoekpunten.

H Ok, nu hebben we een andere definitie voor middelloodlijn. Probeer ze eens volledig te herhalen.

B9 Een middelloodlijn is een rechte die bestaat uit allemaal verschillende punten en die punten liggen allemaal even ver van de twee hoekpunten.

H Was dat moeilijk?

B9 Ja: dat was toch even nadenken en eens dat je het ziet dan komt het wel.

H Die eigenschap werd bewezen in Delta. Jullie hebben ze zeker gezien in Van basis tot Limiet. Als die eigenschap toch al bewezen werd, is het dan zinvol om dit nog eens te doen?

B9 Ja dat denk ik wel. Ik denk dat dit is om ons te leren logisch denken en bewijzen te kunnen vormen enzo.

H Wat is logisch denken?

B9 Dat is een goeie vraag. Ik denk dat het zoiets is van “één plus één is twee. Dat is zo. Maar dan kan je daarop verder bouwen en zien dat twee plus één drie is enzoverder”

H dus verder bouwen op een logische manier. Waar haal je die logica?

B9 Ik denk door veel te oefenen en hoe meer je daar mee bezig bent met die wiskunde, hoe beter je ziet dat alles in elkaar past en dat alles klopt.

H Heeft iedereen deze logica of zijn er volgens jou personen die dat meer hebben dan anderen?

B9 Ik denk dat iedereen dat heeft, de logica maar dat de ene persoon er makkelijker kan mee werken dan de andere. En de ene mens is er meer in geïnteresseerd dan de andere in die wiskunde. Ze willen er misschien niks mee doen. Het kan ook zo'n dat er niet genoeg aanwezig is om een richting met veel wiskunde te gaan doen. Maar ik denk wel dat iedereen een beetje heeft.

Probleem 4

H Hieronder heb ik een trapezium geschetst met opstaande zijden van 6 cm en een bovenzijde van ook 6 cm. De basis meet 11 cm. Kan je zelf een eigenschap formuleren over de basishoeken van dit trapezium?

B9 Zijn die niet even groot of zoiets?

H Waarom denk je dat?

B9 Omdat we dat geleerd zien hebben.

H Hebben jullie dat geleerd? Ging dat over een trapezium of over een gelijkbenige driehoek?

B9 Ah ja over de gelijkbenige driehoek.

H Daarom koos ik natuurlijk voor een trapezium. Jij denkt dat de basishoeken gelijk zijn. Doet de schets jou dit vermoeden?

B9 Ja.

H Ik heb de schets niet helemaal correct getekend. Is dat geen probleem?

B9 Neen. Ik kan mij er wel iets bij voorstellen hoor.

H Stel dat ik bij de schets zou schrijven dat het een trapezium was en ik zou de boven- en onderzijde niet evenwijdig tekenen. Bovendien zou ik het tekenen met een lange en korte opstaande zijde en ik zou erbij schrijven dat het een gelijkbenig trapezium was. Moet je dan voortgaan op de schets of op de tekst die erbij staat?

B9 Op de tekst.

H Weet je waarom dat zo is? Waarom moet je rekening houden met de fouten die in een tekening kunnen zitten?

B9 Ja om fouten van jezelf of dingen die je direct ziet te vermijden. Dat je erover moet gaan nadenken.

H Waarom is dat nadenken zo belangrijk?

B9 Om jezelf te trainen. Om te oefenen, je verstand te prikkelen.

H Het heeft nog een andere reden. Deze ligt in het ontstaan van de euclidische meetkunde. Euclides is geboren na Plato en las diens werk. Plato vond dat we moesten loskomen van het materiele en onszelf richten op het denken.

H Zou voor elk trapezium gelden dat de basishoeken gelijk zijn?
B9 Nee want als je trapezium niet gelijkbenig is dan is dat niet zo.
H Kan je daar een voorbeeldje van geven. Teken er zo eens een.
B9 (tekent een rechthoekig trapezium.) De basishoeken zijn niet gelijk want dan zou het een rechthoek zijn en geen trapezium meer.
H Is zo een tegenvoorbeeld genoeg om te kunnen besluiten dat de eigenschap niet voor alle trapezia geldt?
B9 Ja. Dat denk ik wel.
H Zo één tegenvoorbeeldje?
B9 Ja ik denk dat wel. Als er al één is die er niet aan voldoet, kan je al niet zeggen dat ze er allemaal aan voldoen.
H Goed. Voor welke soort trapezia zou deze stelling wel kunnen gelden?
B9 Voor de gelijkbenige.
H Teken eens en bewijs eens. Stel dat we een gelijkbenig trapezium hebben. Wat is dan de bewering?
B9 Dat de basishoeken gelijk zijn.
H Ja. Formuleer jij de bewering eens in als…dan-vorm?
B9 Als een trapezium gelijkbenig is dan zijn de basishoeken gelijk.
H En nu het bewijs. Dat is voor jou B9.
B9 Ah nu moet ik opschrijven zeker? Ze schrijft: "Gegeven: een gelijkbenig trapezium. Te bewijzen: de basishoeken zijn gelijk."
H Nu ben je zelf een bewijsje aan het maken.
B9 Je zou kunnen beginnen met iets met driehoeken of zo. Een lijn tekenen loodrecht op de basis vanuit de twee hoekpunten van de bovenste zijde. Die zijden zijn dus even lang door evenwijdigheid. De opstaande zijden zijn ook even lang. En je hebt twee dezelfde rechte hoeken. Dus zijn de driehoeken congruent.
H Zeg het congruentiekenmerk eens op dat je gebruikt.
B9 zhz
H Pas op met de ligging van de hoek tegenover de zijden. Deze moest ingesloten zijn.
B9 Ah ja
H Kan je het verbeteren?
B9 …(Ze probeert nog eens met zz90°maar ook dat lukt niet)…
H Stel dat je de eigenschap over de basishoeken van gelijkbenige driehoeken wil gebruiken.
B9 Maar dan moet je schuin gaan…ja dat gaat ook maar dan heb je een parallellogram en een driehoek.
H Wat weet je van een parallellogram? Wat is de definitie?
B9 Twee paar evenwijdige zijden en de overstaande hoeken zijn gelijk of zoiets.
Einde.

B.6.3 Een codering van de interviews

Elke EK beschrijft een specifieke kijk van de leerling op meetkunde. Maar welke uitspraken of gedragingen van de leerling tijdens het verloop van het interview wijzen erop dat hij deze kijk op meetkunde heeft? Een antwoord hierop geef ik in deze sectie, door een codering op te stellen voor de gegevens uit de interviews. Deze gegevens zijn uitspraken van de leerling, maar ook opvallende gedragingen. Zoals bijvoorbeeld spontane reacties, notities of schetsen die de leerling maakt.

EK2. De euclidische ruimte – het euclidisch vlak – vertoont verschillen met onze leefruimte – het fysisch vlak –.

In verband met EK 2 worden gegevens verzameld door bijvragen bij probleem 1 of 2 te stellen.

- Leerling B5 ziet in dat een rechthoek op een foto ten gevolge van perspectief vervormd wordt tot een parallellogram. (EK 2a.4,5)
- Leerling B5 denkt dat een stenen terrasje er perfect rond uitziet. (EK 2b.1)
- Een lijn mag volgens leerling B8 met elke dikte getekend worden, want hoe groot een punt is, dat is niet te benoemen. (EK 2b.2 en 2b.1)
- Leerling B8 gelooft dat meetkundige objecten enkel in wiskunde bestaan. (EK 2a)
- Leerling B8 gelooft dat je nooit een superdunne lijn kan tekenen. (EK 2a.7)

EK3. Deductie is een doeltreffende en gerichte manier om een probleem op te lossen

In verband met EK 3 worden gegevens verzameld vanuit probleem 4.

- Leerling B9 doet een uitspraak over de gelijkheid van de basishoeken door gissen en missen. (EK 3a)
- Leerling B9 formuleert de voorwaarde van gelijkzijdigheid opdat een trapezium gelijke basis- hoeken zou hebben door te gissen. (EK 3c.3)

EK4. Definities zijn niet willekeurig gekozen, maar beschrijven een zinvolle realiteit waarvan ze de essentiele kenmerken opsommen

In verband met EK 4 worden gegevens verzameld vanuit probleem 2.

- Leerling B5 denkt dat er voor een definitie maar één mogelijkheid is. (EK 4 b)
- Leerling B5 en B8 geven een 'vrije versie' van de definitie van middelloodlijn. (EK 4a.2)
- Leerling B8 ziet in dat voor een definitie een 'als en slechts als' nodig is, en een enkele pijl niet volstaat. (EK 4a.4)
- Leerling B9 beweert dat een definitie een begrip onbetwistbaar moet vastleggen. (EK 4c.1)
- Leerling B8 beweert dat vanuit een definitie vaak nieuwe eigenschappen afgeleid kunnen worden. (EK 4c.2)

EK5. Stellingen zijn beweringen over de gedefiniëerde objecten die zelf geformuleerd kunnen worden

In verband met EK 5 worden gegevens verzameld vanuit probleem 4 .

- Leerling B5 formuleert zelf een voorwaarde waaronder de basishoeken van een trapezium gelijk moeten zijn, maar gelooft dan dat het niet echt een eigenschap is. (EK 5a.1)

- Leerling B5 noch B8 gaan de eigenschap van het concrete trapezium zomaar beweren voor 'elk trapezium'. (EK5 a.2)
- Leerling B9 denkt wel dat als er éé trapezium niet aan de eigenschap voldoet, je niet kan zeggen dat ze allemaal voldoen. (EK5e)

EK7'. Een bewijs voor een stelling kan zelf gevonden worden.

In verband met EK 7' worden gegevens verzameld vanuit probleem 4.

- Leerling B5 denkt dat een bewijs wiskundig juister is in symbolen. (EK7'b)
- Leerling B5 zegt dat ze zich het bewijs echt niet meer herinnert dat ze niet meer weet welke stellingen voor de deductie te gebruiken. (EK 7'f)
- Leerling B9 schrijft eerst heel zorgvuldig het gegeven en te bewijzen op. (EK7'e.1)
- Leerling B8 wil aan het bewijs beginnend door een verdeling van het trapezium te maken in twee driehoeken. (EK7'd.1 en e.2)
- Leerling B9 past eerst de congruentieeigenschapp zhz toe, en ziet daarna dat ze dit fout doet. (EK7'd.1)
- Leerling B9 en B8 gebruiken de schets als inspiratiebron voor de hulpconstructie. (EK7'e.2)
- Wanneer aan leerling B9 gevraagd wordt een bewijs te geven denkt ze dadelijk dat ze moet beginnen opschrijven.(EK7'd en e.2 en e.3)

EK10. De euclidische meetkunde is meer dan het verzamelen van wiskundige kennis

In verband met EK 10 worden gegevens verzameld vanuit probleem 1 en 2.

- Hecht de leerling belang aan de historiek van de meetkunde? (EK10a.1)
- Leerling B9 lijkt minder geïnteresseerd in filosofische beschouwingen over wiskunde? (EK10b)
- Leerling B8 heeft een diep inzicht in de betekenis van een punt, een lijn of een andere meetkundige figuur wat betreft de lijndikte? (EK10b.3)
- Ook beseft hij dat een meetkundig object niet in de realiteit kan bestaan? (EK10b.3)

EK13. Euclidische meetkunde kent veel practische toepassingen

In verband met EK 13 worden gegevens verzameld vanuit probleem 1 en 2.

- De drie leerlingen vertalen probleem1 in een gepaste euclidische schets van een driehoek.
- Voor probleem 2 maken de leerlingen de schets van twee punten. (EK 13d. 1)
- Leerling B8 en Leerling B5 beseffen beseft welke abstracties ze maken wanneer ze de weg rondom en over het grasveld door een lijn voorstellen in probleem 1. Ze beseffen welke abstractie ze maken wanneer ze de palen van de speelplaats door punten weergeven. (EK 13d.2)

- Leerling B8 stelt zichzelf de vraag of de schuine zijde van een driehoek steeds korter is dan de som van de twee rechthoekszijden. Hij stelt zich de vraag welke punten even ver van de twee eindpunten van een lijnstuk liggen. (EK 13d. 3)
- Leerling B5 steunt voor een verklaring van haar oplossing op haar gevoel. (EK 13d.4)
- Leerling B5 blijft tijdens de oplossing plakken aan het realistisch probleem. (EK 13d.5)
- De drie leerlingen gebruiken punten, lijnen en driehoek in de oplossing van het eerste probleem. Ze gebruiken punten, lijnstuk en middelloodlijn voor het tweede probleem. (EK 13d.6)
- Leerling B9 zoekt naar een meetkundige eigenschap over de driehoek voor het eerste probleem. De geciteerde eigenschap is correct maar niet geschikt voor de oplossing. (EK 13d7.1)
- Leerling B8 lost probleem 1 op in een speciaal geval. De stelling van Pythagoras is hiervoor bruikbaar en voorkennis. Ze geldt echter alleen voor een rechthoekige driehoek. (EK 13d7. 2)
- Leerling B8 herkent de de situatie van de middelloodlijn dadelijk bij probleem 2. (EK 13d.8)
- Leerling B9 herkent de eigenschap niet, ook al krijgt zij een aantal hints. (EK 13d. 9)

EK 14. Wat kan je wel en wat kan je niet aflezen uit een euclidische schets?

In verband met EK 14 laat ik de leerlingen probleem 3 oplossen.

- Leerling B5 gelooft dat lijnen AB en CD evenwijdig zijn wanneer dit niet uit de gegevens blijkt, en dit niet expliciet is aangegeven op de schets. (EK 14a.1)
- Leerling B5 gelooft ook dat ze de afstanden op een schets mag meten.

EK 15. Taalgebruik in wiskunde verschilt van de dagelijkse omgangstaal.

1. Wiskundige gedachten moeten correct en geordend geformuleerd worden.
2. Wiskunde beschikt over een eigen taalgebruik.
3. Bij een gegeven probleem zijn er vaak irrelevante gegevens.

B.6.4 Waardeoordeel voor de verschillende EK's voor 4D1E

EK 2.

Leerling B8 krijgt hier een maximale score, + +. Hij beseft dat een lijn eigenlijk met elke dikte getekend kan worden. Hij ziet ook in dat de grootte van een punt niet te benoemen is, maar dat je het best zo klein mogelijk kan tekenen. Ook merkt hij op dat je nooit een superdunne lijn kan tekenen, en dat lijnen, cirkels en driehoeken niet in de realiteit maar alleen in de wiskunde bestaan. Leerling B5 krijgt een – – omdat ze gelooft dat je met passer en liniaal perfecte meetkundige figuren kan tekenen. Leerling B9 verdient een – – omdat ze een punt een klein cirkeltje noemt.

EK 3.

Leerling B5 onderzoekt de gelijkheid van de basishoeken door ruitjes te tellen op de schets. Ze beseft niet dat ze naar een voorwaarde kan zoeken en deze controleren door een deductieve redenering (EK 3c.1 en 2). Ze krijgt voor EK 3c een – –. Leerling B8 verdient hiervoor een 0. Hij schetst eerst verschillende gevallen en gist dan de voorwaarde van gelijke opstaande zijden. Leerling B9 gist naar de formulering van de stelling. Zij verifiëert niet spontaan zelf verschillende gevallen. Ze krijgt een –.

EK 4.

Leerling B5 denkt dat er maar één definitie is, die je op verschillende manieren kan zeggen. Ze denkt ook dat een definitie goed is wanneer ze zegt wat het object inhoudt (EK4a.4). Leerling B5 krijgt een –. Leerling B8 krijgt een +, omdat hij beseft dat de formulering met een asa nodig is, en dat een definitie vaak startpunt is voor nieuwe eigenschappen. Leerling B9 krijgt een 0.

EK 5.

Leerling B5 verdient een – – omdat ze vrij zeker is van haar concrete uitspraak . Hiervoor telt ze vakjes. Op dezelfde manier probeert ze van de schets af te lezen welke algemene eigenschap ze zou kunnen formuleren. Leerling B8 verdient een +. Leerling B9 krijgt een 0.

EK 7'.

Leerling B5 krijgt op EK7'b een – – want ze vindt een bewijs in woorden 'niet wiskundig'. Leerling B8 vindt een bewijs met lettertjes handiger. Hij verdient hierop een –. Ook Leerling B9 krijgt een – omdat ook zij een bewijs in symbolen overzichtelijker en makkelijker vindt om te onthouden.

Leerling B5 krijgt voor EK7'e een – omdat ze uit de schets afleest dat de basishoeken gelijk zijn, en daarvoor een verklaring verzint met behulp van een zelf verzonnen eigenschap. Leerling B8 tekent een hulplijn op de schets en zoekt dan naar een bewijs voor de stelling door na te denken over alle geziene eigenschappen over driehoeken. Hij beseft dat hij via congruentie misschien gelijkheid van hoeken kan bewijzen. Daarom krijgt hij een +. Leerling B9 verdient hier een 0. Ze werkt lukraak in haar hulplijnen alsook in het zoeken naar eigenschappen.

EK 10.

Leerling B5 krijgt een –. Ze denkt wel mee na bij de filosofische vragen die ik haar stel, maar heeft geen diep antwoord. De lijndikte voor de schets van een meetkundige lijn heeft volgens haar belang voor het exact tekenen. Leerling B8 verdient een +. Hij heeft diepe bedenkingen bij wat een punt is, of een lijn. Hij ziet ook in dat een definitie niet enkel dient om een begrip vast te leggen, maar dat je er ook eigenschappen kan uit afleiden. Bovendien kan hij voorbeelden van gebruik van meetkunde opsommen. Leerling B9 krijgt een – – . Ik heb niet de indruk dat ze diep mee nadenkt. Ook haar uitspraak "een punt is een klein cirkeltje" is niet echt diep.

EK 13.

Leerling B5 krijgt voor EK 13d een score –. Ze blijft tijdens het oplossen van de twee problemen plakken aan de realistische voorstelling (EK 13d.4). Ze gaat voor het eerste probleem zelfs niet op zoek naar een eigenschap. Schuin oversteken "lijkt haar gewoon sneller" (EK 13d.5). Verdere vragen over driehoeken brengen haar op geen andere idee. Voor het tweede probleem herinnert ze zich wel even de constructie van middelloodlijn, maar ze beseft niet dat ze deze nodig heeft (EK 13d.7). Ze gokt, en voelt aan dat de oplossing voor probleem 2 een lijn moet zijn. Leerling B9 krijgt een –. Ook zij blijft plakken aan de realistische voorstelling. Ze denkt bij het tweede probleem even aan de stelling van Pythagoras (EK 13d.5). Leerling B8 verdient een +, hij denkt niet op voorhand aan de bruikbaarheid van een stelling.

EK 14.

Leerling B5 scoorde 10/16. Ze liet zich vangen bij de eerste schets, waar evenwijdig getekende lijnen het niet per se hoefden te zijn. Ook ging leerling B5 onterecht lengtes meten op de schets. Dus krijgt ze – – . Leerling B9 deed deze opgave niet vanwege tijdsgebrek, dus krijgt ze *. Leerling B8 scoorde 16/16. Dus verdient leerling B8 + +.

B.7 De kijk op meetkunde van 4D1E tijdens de lessenreeks

B.7.1 Relevante stukken van de geluidsopnames van lessen uitgetypt

Om te bepalen welke stukken relevant zijn of niet, gebruik ik hoofdstuk 9.2. Hierin verwoord ik immers expliciet welke beliefs ik tijdens de verschillende lesonderdelen wil voeden. Zo ontstaat een codering van de verschillende uitspraken tijdens deze lessen.

LES 1.

1. *Dit is een poging om door te dringen in de gedachtenwereld van de leerling (EK 13). Het moet aangeven dat wiskunde gaat over eerlijke, menselijke vragen (AK 4.) Deze toepassing zal de 16-jarige leerlingen interesseren door haar mysterieus karakter.*

   De leerlingen volgen het eerste filmpje erg geïnteresseerd, soms klinkt wat gelach bij de getuigenissen van de getuigen uit het filmpje. Dit geeft aan dat de leerlingen niet echt geloven dat graancirkels van buitenaardse makelij zijn. Na het filmpje beginnen de leerlingen er spontaan over te praten met hun buren.

2. *Dit geeft een verantwoording voor het gebruik van vlakke, euclidische meetkunde, waar cirkels, lijnen en driehoeken geconstrueerd moeten worden met passer en liniaal (EK 13).*

   H Zo'n cirkel in het graan maken, lijkt dat makkelijk B8?
   B8 Met zo'n touw te spannen , dan kun je wel berekenen hoe dat moet.
   H Waarom maakt men een graancirkel in het donker?
   B6 Omdat men het anders ziet.
   H En mag dat niet?
   B5 De boeren hebben dat niet graag, want graan dat platligt kan niet meer geoogst worden.
   B9 Maar dat werken in het donker maakt het construeren toch veel moeilijker?
   H Tuurlijk. Dat maakt ook dat je met ander materieel gaat moeten werken. Stel dat wij hier in Berlaar een graancirkel zouden gaan maken, 's nachts bij een boer op zijn veld. Wat nemen we dan mee?
   B6 Een grote passer.
   H B4
   B4 Een touw.
   H Wie van jullie heeft een passer die groot genoeg is?
   B6 Je kan dat maken.
   B9 Dat wordt toch keizwaar.
   H Wie verkiest een touw?
   Alle anderen steken hun hand op.
   H Wat hebben we nog nodig?
   B1 Een paal.
   H Gaan we pillampen meenemen?
   Klas Neen.
   H Waarvoor gebruikt men de tractorsporen?
   B14 Om geen voetsporen achter te laten.

3. *Wiskundige notaties mogen vrij gekozen worden, is een verwijzing naar EK 5. Meetkundige figuren zijn natuurlijk. Dit voedt EK 14.*

H Welke figuren vinden we in de Harlekijn terug behalve de grote cirkel en de gelijkzijdige driehoek?
We noemen de buitenste cirkel de 'grote cirkel'; Ook de anderen geven we zelf namen. Hoe gaan we de driehoek erin noemen?
B6 De grote driehoek.
B6 Waarom de grote driehoek? Er is toch maar één driehoek?
H Goede vraag. Je hebt gelijk B7. Toch kies ook ik voor de naam van 'grote driehoek' omdat ik weet dat er mettertijd ook nog een kleinere driehoek zal optreden. Dat komt pas later.
Wat zien jullie nog?
B6 Een cirkel in het midden.
H Ik stel voor dat we die de kleinste cirkel noemen. Is iedereen het daarmee eens?
klasgroep knikt instemmend ja.
H B1 wat zie je nog?
B1 Halve cirkels.
H En valt jou daar nog iets aan op?
B1 Die zijn niet recht afgesneden.
H En wat valt er op als je de drie cirkels vergelijkt, B8?
B8 Die zitten juist over de hoekpunten van de driehoek.
H Denk je dat hun middelpunt in de drie hoekpunten gelegen is?
B8 Nee.
H Klopt. B3 wat denk jij over die drie cirkels?
B3 Die zijn even groot.
H Ja. En we zullen ze dan ook de drie cirkels noemen. Wat zie je nog?

4. *Het deductief systeem wordt verantwoord en toegelicht. Ook dat is volgens mij nodig om EK 3 aan te moedigen: om deductief te kunnen redeneren moet de logische opbouw van de meetkunde gekend zijn.*

   De leerlingen zijn stil en luisteren.

   Soms stel ik een vraagje, om de aandacht vast te houden. Enkele voorbeelden hieronder tonen aan dat de leerlingen volgen.

H Wie kent Plato al?
Sommige leerlingen steken hun hand op.
H Kunnen wij ooit een echte cirkel tegenkomen in de realiteit, B10?
B10 Nee.
H Waarom niet B1?
B1 Omdat die een dikte heeft.
H Hoe noemen we zo'n logische afleiding?
B5 Een definitie.
H Neen, geen definitie.
B17 Een bewijs.
H Juist.
...
H Een deel is kleiner dan het geheel. Klinkt dat volgens jullie logisch? klasgroep antwoord gezamenlijk ja.
H Als twee dingen gelijk zijn aan een derde ding, dan zijn al die dingen gelijk. Klinkt dat volgens jou logisch B13?

B13 Ja.

...

B6 Wat is nu juist het verschil tussen een axioma en een postulaat? Want je kan ze toch allebei niet bewijzen?

H Je kan ze inderdaad geen van beiden bewijzen. Wie legt dit verschil eens uit aan B7?

B5 Axioma's gelden voor alle figuren, ...

LES 2. Het constructieprobleem van de Harlekijn wordt meetkundig bekeken

1. *Dit is een directe oefening op EK 14. Fouten worden door medeleerlingen of leerkracht rechtgezet.*

E Heb je een bepaalde symmetrie ontdekt in de Harlekijnfiguur? Of is daar helemaal geen symmetrie in te vinden? Wat denk je daarover?

Ll Als je kijkt naar de kleur ook, dan zijn er volgens mij geen symmetrieassen.

E Ja, als je kijkt naar de kleur kijkt is volgens jou geen symmetrie, maar hoe wordt de kleur hier bekomen? Hoe wordt de kleur bekomen bij een graancirkel?

Ll Als het graan rechtop staat dan is het zwart en als het platligt dan kleur je het wit.

E Ja, of omgekeerd he. Dat heeft te maken met waar ze het graan platleggen of waar ze het graan rechtop laten staan. Maar, en dat zag je op het filmpje, wat doen ze eerst? Wat wordt er eerst gedaan?

Ll De buitenkant.

E Inderdaad de randen worden uitgezet van al die figuren die je ziet. En daarna gaat men beslissen hoe men ze gaat inkleuren, zie je? Denk jij dan dat er symmetrie is, B12 als je dat weet?

B12 Ja.

E Zijn er nog die een symmetrie hebben gevonden? Sommigen zeggen nee, anderen zeggen ja.

Lln Mompelen...

E Wie denkt dat er een symmetrie inzit, en welke symmetrie?

B5 Ik had drie symmetrieassen gevonden.

E Ja, inderdaad, drie symmetrieassen. Maar jij twijfelt daaraan B4.

B4 Ja met die kleur.

E Ja dat heeft te maken met wat we achteraf beslissen van plat te duwen.

B4 Ja dan wel.

Ll Ik heb symmetrie rond het middelpunt.

E Symmetrie rond het middelpunt. Is het middelpunt symmetriecentrum?

Lln morren...

E Ik hoor gemor.
We gaan eens terug naar de drie symmetrieassen, wie denkt er nog dat er drie symmetrieassen zijn?
Blijkbaar iedereen. Hoe kan je dat zien ?

Ll Omdat er uit elk punt van de driehoek een lijn gaat naar het midden van de overstaande zijde van de driehoek .

E ziet iedereen de drie symmetrieassen?

Lln ja.

E De drie symmetrieassen gaan volgens jou vanuit een hoekpunt naar het midden van de overstaande zijde. Hoe wordt dat dan weer genoemd als dat naar het midden zou gaan?

Ll zwaartelijn.

E ja wat is dan weer een hoogtelijn?

Ll die er loodrecht op staat.

E ja bij een gelijkzijdige driehoek hoor ik hier zeggen is dat dan weer allemaal hetzelfde. Dan is de hoogtelijn de zwaartelijn en... waar is dat ook nog aan gelijk?

Lln door elkaar aan het antwoorden. de bissectrice.

E je ziet hier in de figuur inderdaad.

E is er ergens een symmetriecentrum te vinden

Ll neen

E is er iets speciaal aan de drie lijnen?

Ll die snijden elkaar in het midden van de grote cirkel

E jij denkt dat die elkaar snijden in het midden van de grote cirkel wie denkt nog dat het zo is?

Ll ik weet niet

E zijn er die zeggen dat dit niet zo is?

Ll zeggen niks

E we zullen daar straks even op verder gaan. Nu zoeken we verder. Kan je iets over die grote cirkel bijvoorbeeld de straal van afmeten

Ll neen

E waarom niet

Ll je kan het middelpunt niet direct aflezen

E de straal ligt die vast, is dat een gegeven iets, of kan je die uitrekken en eenzelfde figuur bekomen?

Ll ja

E dat kan je dus niet aflezen. Dan denk ik dat het meeste erover gezegd is
de drie cirkels die zijn even groot. Kan je nog iets zeggen over hun middelpunten?

Ll die zijn bij de drie cirkels hetzelfde punt

E nog iets meer

Ll het zelfde punt bedoel je samenvallend ?

Ll nee.

E OK . De middelpunten liggen op de symmetrieas. Moet dat?

Ll ja

E wat zijn de symmetrieassen van een cirkel?

Ll alle middellijnen.

E ja dus het middelpunt zal op de symmetrieas moeten liggen.

2. *Een tip voor het construeren van de Harlekijn wordt gegeven. Dit gebeurt aan bord, de leerlingen tekenen mee op papier. Hierbij wordt nog eens over het tekenen van meetkundige figuren nagedacht. Meetkundige figuren zijn in wezen denkbeeldig dus elke schets is gebrekkig (EK 14). In de tip worden alleen euclidische constructies gebruikt. De drie eerste postulaten van Euclides geven aan welke dit zijn. Weer wordt de link met de realiteit van de constructie van een graancirkel gelegd (EK 13).*

   H We vertrekken van het lijnstukje PQ. De tip die ik geef is de volgende: construeer op dat lijnstuk een gelijkzijdige driehoek. In ons graanveld betekent dit dat we een paaltje p een plaats P en één op plaats Q gaan kloppen. Daarna construeren we met onze koord een cirkel met middelpunt P en door Q: Cp. En ook een cirkel

	met middelpunt Q en door P: Cq. Heeft iedereen dat? Je mag er de namen bij schrijven. Dat is ook belangrijk. De cirkel met middelpunt in P noemen we Cp, en de cirkel met middelpunt in Q noemen we Cq.
Lln	Ja.
H	Zijn we hier op een goede manier bezig? Kunnen we deze constructies maken op een graanveld? Volgen we de postulaten van Euclides? We mochten een cirkel maar construeren als we een middelpunt kennen en een punt dat erop ligt. Doen we dat goed B14?
B14	Ja ik denk het wel.
H	De twee cirkels gaan elkaar snijden in een punt R en R'. De punten P en R kan je verbinden. Ik zet daar een paaltje, span er een koord tussen en krijg zo een lijn. Is dat een goede constructie? Kan je dat doen op een graanveld?
Lln	ja
H	jullie mogen dat met een lat doen. We doen hetzelfde met R en Q. Zo ontstaat een driehoek PQR. Ik beweer dat deze gelijkzijdig is. Is dat zo?
B8	volgens mij wel. die eerste cirkel en de tweede cirkel hebben dezelfde straal.
H	ja. Dat is goed. Maar probeer nu aan de rest van de klas eens stap per stap uit te leggen waarom de drie zijden van driehoek PQR gelijk zijn. Probeer eens voor PQ en PR.
B8	euh je nam de straal PQ en rond P heb je een cirkel getrokken en je weet dat de straal ook rond Q hetzelfde moet zijn
H	waarom is die ook hetzelfde
B8	omdat dat ook PQ is
H	dus de lengte PR is ook hetzelfde is dat voor iedereen duidelijk?
Lln	ja
H	dus hebben we zeker een gelijkzijdige driehoek geconstrueerd. Nu gaan we verder en construeeren met als middelpunt R een cirkel met nog eens dezelfde straal. Of anders gezegd, ik zet het passerpunt in R en ik neem het punt P op de cirkel en teken hem. Hij zal dan door het punt Q moeten gaan. Waarom is dat zo B9?
B9	omdat de straal weer hetzelfde is
H	hoe ga ik deze cirkel nu noemen? B6?
B6	Cr
H	ja. En nu ontstaan er snijpunten hier en hier die we nog niet benoemd hebben. Dit snijpunt hier hebben we al R' genoemd. B10, hoe gaan we dit snijpunt noemen denk je
B10	r'' of zoiets
H	R'' denkt B10 iedereen het daarmee eens? Neen? B13
B13	x en x'
H	ja dat gaat (schrijft x en x' op) Maar kijk eens goed naar de figuur en de namen die we al gekozen hebben.
Ll	s en t
H	ja er zijn erg veel mogelijkheden
B15	P' en Q'
H	ja daar heb ik ook voor gekozen. Waarom maak jij die keuze B15?
B15	omdat ik het gelezen heb in de tekst

Lln gelach

H lacht mee. Dat is een slimme manier van jou. Maar waarom zou ik dan voor P' en Q' gekozen hebben B15?

B15 ...

H jullie zagen daarnet bij mevr. Vanlommel dat er zoveel symmetrie in de figuur zit. B7.

B7 omdat R en R' die liggen allebei op een eerste symmetrieas en Q en Q' liggen ook op eenzelfde as

H ja daarom heb ik hiervoor gekozen
je mag natuurlijk ook x, y, s en t gebruiken, maar in wiskunde worden vaak niet zomaar namen gegeven. Als je namen geeft aan punten en er zit een symmetrie in je figuur dan ga je die ook uitbuiten. Je gaat deze symmetrie weerspiegelen in je naamgeving. Dat wordt achteraf makkelijker om alles op te schrijven P, Q en R spelen een symmetrische rol. (ik zet ze op bord en trek een pijltje van P naar Q naar R naar P. ze permuteren onder elkaar. Wanneer ik de doorsnede neem van Cp en Cq dan krijg ik het punt R en R'. Neem ik de doorsnede van CQ en Cr dan weet ik al zonder mijn schets te bekijken dat ik het punt P en P' zal bekomen. In de namen zit dus dezelfde symmetrie als in de figuur.
zoals B7 zei, gaan we de assen ook tekenen. Dat mogen we, want we kennen twee punten die erop liggen. Tussen twee paaltjes kunnen we een koord spannen. Het tweede postulaat van Euclides zegt dat een lijn altijd verlengd mag worden en ook dat zullen we doen. Zo gaat deze lijn de cirkel Cp snijden.
B8, hoe gaan we dat snijpunt noemen zonder naar de schets te kijken. We hebben al P en P'. En hier hebben we nog een snijpunt zonder naam. Hoe gaan we dat dan noemen?

B8 P''.

H Ja B15, ben je het daarmee eens?

B15 Ja.

H Staat het ook zo in de tekst?

B15 Ja.

H Dan zijn we gerust nietwaar?
het wordt dan ook gemakkelijk om de andere snijpunten een naam te geven. Je trekt de lijn RR' en verlengt die weer. Je snijdt met Cr. Je krijgt dan van boven het punt... B2.

B2 R''

H ja. En ook zo voor QQ'. Het snijpunt met Cq is Q''. Ik heb nu drie punten gevonden: P'', Q'', enR''. Ik ga daar overal een paaltje kloppen, een koord tussen twee paaltjes spannen en ik krijg een nieuwe driehoek. De oorspronkelijke driehoek is hier mooi binnenin gelegen. Nu stop ik met de tip en ik beweer dat de Harlekijn nu door jullie geconstrueerd kan worden. Is dat zo?

Ll ik denk het wel

H Hoe kan je met deze tip nu verder om de Harlekijn te construeren? Voor de Harlekijn heb je bijvoorbeeld een 'grote driehoek' nodig. Wat zouden we als grote driehoek van de Harlekijn kunnen nemen? B5.

B5 De buitenste, die door die puntjes gaat.

H Over welke puntjes gaat het dan?

B5 Die we nu geconstrueerd hebben

H Dus voor de grote driehoek stelt B5 voor om $P''Q''R''$ te nemen.
(ik schrijf dit op bord)
OK Als grote cirkel?

Ll dat hebben we nog niet

H neen maar kunnen we dat maken?
De vraag was kan je de Harlekijnfiguur construeren? B13, kunnen we die grote cirkel maken?

B13 ja rond de punten met de ".

H ja die moet door de punten P'', Q'' en R'' gaan. Je hoeft deze nog niet te tekenen. Want wat is het probleem om die te tekenen?

Ll het middelpunt

H ja het middelpunt waar ligt dat?

Ll in het snijpunt van de drie lijnen PP' en QQ' en RR'

H maar ik heb hier op het bord geen snijpunt. Wie van jullie heeft er een snijpunt?

Lln steken handop

H maar ik heb er drie. En ik ben er echt niet zeker van dat jullie zoveel beter hebben getekend dan ik.
ik stel voor dat we toch even nagaan dat de drie lijnen een snijpunt hebben want ik en er niet zeker van. Jullie wel?

Lln morren door elkaar en zoeken naar verantwoordingen

H in elk geval moeten we daarover nadenken, we kunnen daarvoor niet rekenen op onze schets want een schets kan fout zijn, en Plato leerde ons dat we een schets niet kunnen betrouwen.
ok grote cirkel die rond drie punten van een driehoek gaat. Dat noemen we een omgeschreven cirlel. Hebben jullie dat al gezien?

Lln neen

H goed dan zullen we dat uitzoeken, we zoeken in het algemeen uit waar het middelpunt van een omgeschreven driehoek zal moeten liggen. De drie spiegelassen, wat kan je daarvoor nemen?

B12 PP' en QQ' en RR'

H iedereen het daarmee eens?

Lln ja

H de kleinste cirkel, ziet iemand in hoe je die kan maken

B15 de omgeschreven cirkel van driehoek PQR

H dat zou een mogelijkheid zijn. N

B9 maar je hebt het middelpunt toch nog niet

H neen, maar dat zouden we kunnen zoeken met de eigenschap die we ervoor afgeleid hebben
Hier geef ik echter een tweede kleine tip: als kleinste cirkel nemen we niet de omgeschreven cirkel van PQR maar wel de ingeschreven cirkel
en wat is de ingeschreven cirkel van een driehoek? dat is een cirkel die binnenin de driehoek ligt en die raakt aan elke zijde

Lln lachen

H dat hadden jullie zeker niet verwacht he
maar ook daar zullen we weer op zoek moeten gaan naar het middelpunt van die ingeschreven cirkel. Gaat dat wel in elke driehoek? We zullen ook gaan zoeken naar de drie cirkels hun middelpunt, hun straal enzovoort. En dat zal met de tip allemaal

lukken,

3. *Opdat de tip zou bruikbaar zijn, moeten een aantal dingen onderzocht worden: zo bijvoorbeeld de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een driehoek (EK 4, 5).*

   Met de tips zullen we erin lukken het probleemvan de Harlekijn op te lossen maar we moeten toch eens controleren of we wel goed bezig zijn. We nemen als grote driehoek $P''Q''R''$, maar mogen we dat wel doen?

   B6 neen
   H waren er voorwaarden voor de grote driehoek van de harlekijn wat zagen jullie daarover bij mevr. Vanlommel daarstraks?
   B6 dat moet een gelijkzijdige driehoek zijn
   H zijn wij er zeker van dart P”Q”R” ook gelijkzijdig is
   B17 wij hebben zo'n eigenschap vroeger wel gezien
   H ja, dus ergens in de eigenschappen van vroeger zagen jullie dat als je een kleine gelijkzijdige driehoek vergroot, dan krijg je terug een gelijkzijdige driehoek.
   Is dat juist B10?
   B10 ja ik denk het wel
   H wie heeft dat allemaal gezien?
   Lln sommigen steken hun hand op
   H fantastisch. en wat als ik het volgende doe: ik neem een gelijkzijdige driehoek en vergroot deze (ik teken een grotere driehoek op bord rond een kleine gelijkzijdige. De grote is duidelijk niet gelijkzijdig) heb ik nu terug een gelijkzijdige?
   B6 misschien.
   H dan moet ik wel heel slecht getekend hebben.
   B9 maar mevrouw we mogen toch niet op de schets afgaan.
   H voila. We mogen niet op de schets afgaan, dus het is niet omdat je ziet dat de driehoek vergroot is, dat hij ook gelijkzijdig is.
   wat moeten we doen om te weten of deze gelijkzijdig is B9
   B9 ik zou zeggen dat meten, maar da mag ook niet.
   H neen, en wat moeten we dan doen van Plato?
   B8 logisch redeneren.
   H ja logisch redeneren waar om het zo is dat, wanneer we vertrekken van een gelijkzijdige driehoek, en we daarop zo'n constructie maken als in de tip, waarom we dan een gelijkzijdige driehoek uitkomen
   B10 je hebt overal met dezelfde stralen gewerkt waardoor je die cirkels even groot hebt en de buitenste punten P'', Q'' en R'' even ver van elkaar liggen
   H ja, dat is de idee van het bewijs van de gelijkzijdigheid maar dat moet nu nog stapje per stapje uitgeschreven worden. Je vindt het in de werktekst. Er is nog een ander probleem: de drie lijnen: snijden die in een punt of niet? Het zijn drie middelloodlijnen dus vraag ik mezelf af of drie middelloodlijnen elkaar snijden of niet zowel van een willekeurige als gelijkzijdige driehoek.
   Want ook daarvan zijn wij niet zeker
   al die dingen samen maken dat we toch wel wat bewijzen moeten geven, en wat dingen gaan onderzoeken, en die geven ons een nieuwe theorie van de cirkel. Dus naar aanleiding van het Harlekijnprobleem gaan we zelf komen tot nieuwe definities van in- en omgeschreven cirkel. Tot nieuwe eigenschappen, waar ligt het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek bijvoorbeeld. We gaan die definite moeten

geven á la Euclides. Zijn definities volgen allemaal mooi op elkaar en wij moeten in die trend voortgaan we gaan eigenschappen moeten bewijzen. Bijvoorbeeld hoe zit het met de middelloodlijnen van een driehoek: snijden die altijd in één punt of niet? Zo zullen we zelf nieuwe euclidische theorie maken.
We starten met het eerste probleem: zijn de middelloodlijnen van een driehoek concurrent of niet ?

4. (EK 4,5)

H	de leerlingen achter B13 en B17 mogen p.9 de middelloodlijnen tekenen van de eerst driehoek met passer en liniaal. De leerlingen achter B14 en B9 mogen dat doen voor de tweede driehoek op p.9. En de leerlingen achter B3 en B7 voor de derde driehoek. de leerlingen werken hieraan
H	kent iedereen nog de constructie vand middelloodlijn op een lijnstuk
Lln	ja
Els	met de passer, niet met de geodriehoek he
	de lkrn wandelen rond, de lln werken, hierbij overleggen ze met hun buren
H	is iedereen klaar
Ll	nee
H	wacht nog even
H	we kijken eens wat de resultaten zijn
	B1, zijn de lijnen bij de gelijkzijdige driehoek snijdend of niet
Lln	ja bij iedereen
H	en voor de tweede figuur
Lln	ja
H	voor de derde figuur
Lln	ja
H	ok bij de drie figuren zijn de lijnen snijdend voor iedereen wat mogen we daar dan uit besluiten?
B8	de middelloodlijnen van een driehoek zijn concurrent
H	dus nu mag het bij in de boeken van euclides, omdat we het hebben nagegaan voor drie figuren B8?
B8	lacht Neen
H	waarom niet
B8	we moeten dat gaan bewijzen
H	inderdaad, Plato wou niet weten van voort te gaan op wat je afleest, op een schets en van wat je ziet. hij vond echt dat je moet bewijzen want volgens hem is het verstand superieur aan de materiele wereld

5. *(EK 5, 6a). (EK 6a, 7) Het bewijs op p. 9 is in woorden gegeven, om de leerlingen te tonen dat dit ook kan. Bovendien geeft het beter de redenering weer dan een bewijs in symbolen, dat eerder een soort berekening kan lijken. Begrip primeert op formalisme (EK 7).*

   Hoe ga je zoiets aantonen? Door een logische redenering te maken. Dat vind je op de volgende pagina. Hier vind je een bewijs en nog eens een schets voor de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een driehoek. B5 zijn schets noch bewijs volledig. Jullie moeten het zelf aanvullen. Probeer dat eens. Lees eens alles en probeer te begrijpen, hoe dit bewijs in elkaar zit.

B6 je mag dat aflezen he
de lkn stappen rond

H misschien kan je best eerst de schets aanvullen met wat in het gegeven staat. En dan lees je het bewijs

LES 3. Op zoek naar het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek door gissen en missen

Uit het vooronderzoek maar ook uit de vorige twee lessen blijkt dat aan EK3 nog serieus gewerkt moet worden. Niet B5 het feit dat een bewijs op deductieve wijze verloopt, maar ook het deductief zoeken naar de oplossing van een gesteld probleem moet nog veel aandacht krijgen. De leerlingen geloven dit nog niet. Het heeft niet veel zin om dit steeds weer te zeggen. Het lijkt mij veel zinvoller om het hen te laten ervaren. Daarom krijgen ze in les 3 ruim de tijd om door gissen en missen op zoek te gaan naar het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek. In les 4 zal door deductief na te denken ditzelfde probleem opgelost worden.

De leerlingen krijgen elk twee stukjes maquettekarton. Eén met een grote en één met een kleine driehoek erop getekend. Willekeurige driehoeken, met allerlei vormen. De leerlingen gebruiken passer, potlood, liniaal en krijgen een speldje om eventueel in het gezochte middelpunt te prikken. Zo wordt voor 34 driehoeken gezocht naar het middelpunt van hun ingeschreven driehoek. Deze werd eerst door de leerlingen zelf gedefinieerd als de cirkel die aan de drie zijden van de driehoek raakt.

Definities kunnen zelf gegeven worden vanuit een realistisch probleem (EK 4). Stellingen kunnen zelf gezocht en geformuleerd worden (EK 5).

Zonder na te denken beginnen 16 van de 17 leerlingen ijverig met het tekenen van de middelloodlijnen van de driehoeken. Eén leerling slaagt er in om het speldje op zicht juist te prikken. Ze tekent zonder moeite de ingeschreven cirkel van haar kleine driehoek. Voor de grote driehoek lukt het niet zo best. Wanneer de 16 andere leerlingen het gevonden snijpunt van de middelloodlijnen als middelpunt voor een cirkel nemen, blijkt deze niet voor hun twee driehoeken te raken aan de drie zijden. Het is dus niet de oplossing. Een hint van de leerkracht doet hen inzien dat ze wel het middelpunt van de omgeschreven cirkel gevonden hebben.

Een stelling over de positie van het gezochte middelpunt kunnen we maar formuleren als deze geldt voor elke mogelijke situatie (EK 6a). Door te gissen hebben de leerlingen gemist.

Na even zeer kort na te denken, beginnen de leerlingen aan een tweede poging. Ze proberen met de zwaartelijnen of de hoogtelijnen. Een enkele leerling gebruikt de bissectrices. Ook de poging van de zwaartelijnen en hoogtelijnen mislukt. Dus moeten het de bissectrices zijn. Tijdens deze tweede poging voert de leerkracht een gesprek met de leerlingen. Waarom zullen zwaartelijnen en hoogtelijnen niet altijd het gezochte middelpunt leveren en de bissectrices wél? Welke eigenschappen hebben bissectrices?

De voorkennis van de leerlingen wordt geactiveerd en ze vinden het antwoord in het kenmerk van bissectrices.

Een deductieve redenering gebruiken om een nieuw probleem op te lossen blijkt een goed alternatief voor gissen en missen (EK 3).

LES 4. Noodzaak van een deductieve bewijsvoering voor eigenschappen

Na de vorige les zien de leerlingen wel in dat een deductieve redenering ook tot de oplossing leidt voor het gestelde probleem. Of ze écht geloven dat ze beter deductief kunnen redeneren,... dat denk ik niet. Bovendien hebben ze eigenlijk gelijk: voor één concreet voorbeeld kan je misschien beter gissen. Met wat geluk prik je immers direct in de roos.
Dus moet ik hen laten begrijpen waarom dit gissen niet volstaat in wiskunde. Ziehier mijn opzet:

Tijdens deze les zitten de leerlingen in een U-vorm, zonder banken, schrijfgerief of werktekst. Ze hebben niks nodig, want er gaat B5 nagedacht worden.

Eigenschap over het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek.

De leerkracht vraagt naar de mening van de leerlingen over het volgende: ze toont een zelfgemaakte schets van een ingeschreven driehoek aan een cirkel. De schets is groot en met zeer dunne lijnen getekend. Het snijpunt van de bissectrices van de driehoek wordt als middelpunt van een cirkel genomen. Deze raakt aan de drie zijden van de driehoek.

Op $34 + 1 = 35$ voorbeelden bleek dat het middelpunt van de ingeschreven cirkel het snijpunt is van de drie bissectrices van de driehoek. Mogen we dit dan als eigenschap formuleren?

Zowel EK 6a, 7 en 14 worden hier aangekaart. Het is een poging van de leerkracht om te peilen naar het geloof van de leerlingen in de noodzaak van een bewijs. Ook EK 3 wordt hier nogmaals getest.

Zoals verwacht, zijn er nog steeds een aantal leerlingen die denken dat we vanuit de 35 voorbeelden wel kunnen besluiten dat de eigenschap zal gelden voor elke driehoek.

De leerkracht legt uit dat de eigenschap blijkt te gelden voor de 35 concrete voorbeelden, maar daarom niet voor een denkbeeldige driehoek. Aan de leerlingen wordt dan gevraagd even de ogen te sluiten en zich een driehoek voor te stellen. Heel groot of heel klein. Een denkbeeldige driehoek is een wiskundige figuur volgens Plato. En kennis van denkbeeldige figuren kan dan ook B5 door denken verkregen worden. Dus om een eigenschap te kunnen formuleren moeten we nadenken. Redeneren. Met de ogen toe maken de leerlingen stap per stap de redenering die leidt tot het vinden van het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek als het snijpunt van diens drie bissectrices. De oplossing van het probleem is gevonden voor een denkbeeldige driehoek, en zal gelden voor elke concrete driehoek. Het bewijs van het vermoeden is geleverd, dus hebben we een nieuwe stelling gevonden.

Met dit gedachtenexperiment probeer ik door te dringen in de persoonlijke denkwereld van elke leerling afzonderlijk (EK 13). Het sluiten van de ogen, en het gezellig bijeen zitten in een kring helpt hierbij. Door het sluiten van de ogen neemt de leerling ook afstand van het materiele. Hij richt zich op denkbeeldige vormen, meetkundige vormen dus. En is meer geneigd tot nadenken (EK 3, 7). Wanneer de redenering voltooid is, beschouwt de leerkracht het bewijs als geleverd (EK 8).

Vervolgens komt het bewijs op bord, in woorden. Het wordt via een klasgesprek terug opgebouwd.

Tijdens de redenering benoemt de leerkracht de gebruikte eigenschappen en definities als "de stelling van B10" of de "definitie van B6" (EK 5 en EK 3).

Er wordt nagegaan of de omgekeerde stelling ook geldt. In het bewijs worden de stappen één na één omgekeerd. De verantwoording hiervoor wordt gegeven.

Hier wordt gewerkt op de logische formuleringen.

Eigenschap over de ligging van het raakpunt tussen cirkel en raaklijn

De leerlingen formuleren eerst zelf de definitie van raaklijn aan een cirkel. Ze zagen in analyse de raaklijn aan een parabool. Daarna toont de leerkracht een grote schets op papier van een driehoek en zijn ingeschreven cirkel. Hierop blijkt dat de juiste positie van het raakpunt van een zijde met de cirkel, op een schets zeker niet af te lezen valt. Zelfs niet op een zeer nauwkeurige schets. Het is dus nodig hierover na te denken. En naar eigenschappen te zoeken. Weer op een deductieve wijze.

De leerkracht noteert op bord. De leerlingen zitten in een kring en noteren niet, maar denken mee na.

Vanuit een bestaand probleem wordt gezocht naar nieuwe stellingen en definities, namelijk over het raakpunt van cirkel en raaklijn.

B10 ziet in dat M middelpunt is van de ingeschreven cirkel van een driehoek asa M even ver van de drie zijden van de driehoek gelegen is. Ook dit vraagt een exact bewijs.

Maar eerst wordt de eigenschap over de middelloodlijn van een koorde gegeven. Door een vraaggesprek aan bord. *(EK 3, 8)*

LES 5. Bewijs van de “eigenschap van Wout” door opeenvolgende eigenschappen te bewijzen. een lokaal logisch schema

Bij het starten van de les wordt aan de leerlingen een blad gegeven met een logisch schema van de eigenschappen die nodig zijn om de eigenschap van Wout te bewijzen. Zie het schema op blz. 100.

Eén voor één worden deze eigenschappen aan bord door de leerkracht bewezen in woorden. De leerlingen noteren. Zij bedenken steeds de volgende stappen of verantwoordingen. De leerkracht stelt hiervoor gerichte vragen.

Door deze werkwijze handelt les 5 volledig over het bewijzen van eigenschappen door toepassing van de deductieve methoden (EK 3). Tijdens de laatste les wil ik dan ook extra aandacht schenken aan het oplossen van problemen door deductief te redeneren (ook EK 3).

LES 6. Constructie van de Harlekijn op een groot tekenblad

Als antwoord op het oorspronkelijk gestelde probleem, en als toepassing van alle geziene stellingen en definities over de cirkel, krijgen de leerlingen in groepjes van vier de opdracht om de Harlekijn te tekenen (EK 13). Tijdens deze laatste les wil ik graag nogmaals en zeer opvallend de nadruk leggen op de mogelijkheid van gericht te zoeken naar de oplossing van een meetkundeprobleem (EK 3).

Wanneer de leerlingen de klas binnenkomen zijn de banken reeds in groepjes van vier samengezet. Elke groep beschikt over een groot tekenblad van 110 op 75 cm dat rust op een groot karton. Ook speldjes, draad en passer, liniaal en potlood zijn ter beschikking.

De leerlingen begrijpen snel dat ze de Harlekijn zullen moeten tekenen. Elke leerling krijgt een blad met de opgave, waarop hij zijn naam invult. (opgavenblad zie blz. 101)

Voordat ze hieraan beginnen moeten ze echter eerst op een vraag antwoorden, die ik aan elk van hen stel. Namelijk, ”geloof jij écht dat je de geziene eigenschappen van vorige lessen nodig hebt om de Harlekijn goed te kunnen construeren?”. Hierbij wordt onder ‘goed’ verstaan dat de “kleine cirkel” zal raken aan de “drie cirkels” wanneer je hem construeert op de wijze die op het opgaveblad wordt beschreven (punt 4).

Eén leerling durft toegeven dat hij al de geziene eigenschappen niet nodig denkt te hebben. Hij wordt uitgedaagd om het dan lukraak te proberen. Hij zet zich apart van de rest. Zoals verwacht, slaagt hij niet in de proef van de kleine cirkel. Bij hem raakt deze aan twee zijden, maar is wel 4 cm van de derde zijde verwijderd. Hij startte met de constructie van de grote cirkel. Daarin tekende hij een grote driehoek. Daar liep het al fout: zijn driehoek was allesbehalve gelijkzijdig. En het ging van kwaad naar erger.

De rest van de klas volgt de procedure op het opgaveblad. Ook zij worden uitgedaagd: ze moeten bij elke stap kunnen uitleggen waarom deze verantwoord is. Daartoe dienen de vraagjes van het opgavenblad. Drie van de vier groepen lukken in de proef. De laatste groep was nog niet volledig klaar. Het construeren van de cirkels en lange lijnen verliep bij hen niet zo vlot: dit moest met koord en spelden gebeuren.

Uiteindelijk volgt een bespreking van de resultaten.

B.7.2 Codering van de lesmomenten en van uitspraken uit de lessenreeks

Les 1.

De leerlingen zijn duidelijk geïnteresseerd in het onderwerp van de graancirkel. Dit blijkt uit de aandacht waarmee ze de filmpjes volgen en door de opmerking van de leerling die bereid is om zo’n cirkel te maken.

Les 2.

1. In een klasgesprek wordt besproken wat wel/niet kan afgelezen worden uit de schets van de Harlekijn (EK 14). Tijdens dit gesprek zijn de leerlingen vrij om hun mening te geven, Els antwoordt hier telkens neutraal op. Enkele leerlingen lezen ten onrechte de concurrentie van de drie symmetrieassen af (EK 14 a). Ze leiden geen gegevens af uit andere gegevens (EK 14 d).

2. B8 geeft een goede verklaring voor de gelijkzijdigheid van de kleine driehoek (EK 7’a’.2). Hij gaat naar de kern van het argument (EK 7’ d.1). Wanneer ik hem de uitleg aan zijn klasgenoten laat doen, weet hij niet hoe te beginnen (EK 7’ d.2). Hiervoor geef ik hem een tip (EK 7’ e.1).

   Voor het verklaren van de gelijkzijdigheid van de grote driehoek, geeft een leerling een verkeerde verklaring. Hij vernoemt een stelling die ze niet gezien hebben (EK 7’ e.2’). Hiervoor steunt hij — en degenen die hem bijvallen — op de schets. Daarop ‘zie’ je immers dat de kleine driehoek in elke richting evenveel vergroot wordt (EK 7’ c).

   B9 merkt gevat op tijdens het vraaggesprekje dat onstaat, dat een schets steeds te onnauwkeurig getekend wordt. De rest van de klas valt haar bij (EK2).

   B10’s poging voor een bewijs is waar, maar niet deductief. Ze steunt niet op vroeger geziene eigenschappen (EK 7’ e.2’). Hij gaat naar de kern van het probleem (EK7’ d.1) en gebruikt duidelijk de schets als inspiratiebron (EK7’.d.3)

3. De leerlingen begrijpen waarom er met passer en liniaal geconstrueerd moet worden (EK10 b.5).

B8 vergist zich even maar ziet dan in dat nog een bewijs gegeven moet worden voor de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een driehoek (EK10 b.2). Hij beseft dat een schets onbetrouwbaar is (EK 2).

Les 3.

1. B7 ziet in dat een bewijs nodig is, en dat je op een schets niet mag steunen (EK 2 en EK 7'). B8 en B10 geven allebei de clou van het bewijs dat geleverd moet worden (EK 7'), de rest van het bewijs wordt door de leerkracht samen met de leerlingen opgebouwd door een vraaggesprek. Wat de leerlingen zelf kunnen van EK 7' wordt hierdoor niet duidelijk.

2. Bij het zoeken naar het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek beginnen alle leerlingen direct te tekenen. Ze denken allemaal dat het middelpunt gevonden kan worden als snijpunt van de drie middelloodlijnen, omdat we de eigenschap van concurrentie van de drie middelloodlijnen ervoor zagen (EK 3 a).

3. Wanneer ze er door Els op attent gemaakt worden dat de drie middelloodlijnen niet werken, proberen ze zwaartelijnen. Weer gissen ze naar de oplossing in plaats van erover na te denken (EK 3.c).

4. B10 formuleert zelf een eigenschap, waarnaar we gedurende de rest van de lessenreeks zullen verwijzen als "de eigenschap van B10" (EK 5 a.1). Het kenmerk van bissectrice is de clou van een deductieve redenering (EK 7' 2') om het middelpunt van de ingeschreven cirkel te vinden. Hiervoor wordt vertrokken van het gevraagde middelpunt (EK 3c).

Les 4.

1. Nog één leerling vindt een bewijs voor een stelling overbodig wanneer je er 35 voorbeelden van hebt (EK 2, EK 10b.2 en EK 7'c).

Les 5.

1. Alle bewijzen komen in woorden aan bord (EK 7' b). Hierbij zoeken de leerlingen mee naar bruikbare stellingen (EK 7').

2. De formulering van een omgekeerde stelling gaat niet zo vlot (EK 5b.1). Ook kennen de leerlingen het bewijs uit het ongerijmde nog niet goed.

Les 6.

1. Eén leerling twijfelt nog aan het nut van eigenschappen over de cirkel om de Harlekijn te construeren. Ook hij wordt overtuigd gedurende zijn mislukte poging (EK 13 d.7).

B.7.3 Toekenning van een waardeoordeel aan de EK's vanuit de lessenreeks

Gebruikmakend van de cesuur en waardebepaling zoals beschreven in 10.5.4, ken ik nu een waarde toe aan de verschillende EK's die tijdens de lessenreeks optraden.

EK 2.

B8 verbetert zichzelf snel in les 2 en beseft dat een schets onbetrouwbaar is. B9 merkt in les 2 zeer nadrukkelijk op dat je "op een schets toch niet mag voortgaan". De rest van de klas valt haar bij. B5 twijfelt in het begin van les 4 nog aan de noodzaak van een bewijs wanneer ik aan de klas een zeer fijn getekende schets toon. De leerlingen scoren + + voor EK2.

EK 3.

In les 2 zijn de middelloodlijnen die de 17 leerlingen construeren voor hun driehoek, snijdend in één punt. Wanneer ik vraag wat we daaruit nu kunnen besluiten, antwoordt B8 dat "de middelloodlijnen van een driehoek concurrent zijn" (EK 3a en b). In les 4 vind B5 geen bewijs meer nodig voor de stelling over het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek, omdat er 35 voorbeelden zijn van situaties waarin de stelling geldt (EK 3a en b). De leerlingen scoren hier duidelijk negatief voor EK3.

EK 5.

Tijdens les 5 vraag ik regelmatig of de vernoemde stelling een bewijs nodig heeft. De leerlingen antwoorden dan positief. Tijdens deze les blijkt ook dat ze weten hoe ze een stelling moeten formuleren. De score voor EK 5 is dus 0.

EK 7'.

In les 2 geeft B8 een goede verklaring voor de gelijkzijdigheid van de kleine driehoek (EK 7'a'.2). en gaat hierbij naar de kern van het argument (EK 7' d.1). Voor het verklaren van de gelijkzijdigheid van de grote driehoek, vernoemt een leerling een stelling die ze niet gezien hebben (EK 7'e.2'). B10's poging voor een bewijs is waar, maar niet deductief. Ze steunt niet op vroeger geziene eigenschappen (EK 7' e.2'). Hij gaat wel naar de kern van het probleem (EK7' d.1) en gebruikt duidelijk de schets als inspiratiebron (EK7'd.3).

Tijdens les 3 ziet B7 in dat een bewijs nodig is, en dat je op een schets niet mag steunen (EK 7'e). In les 5 zoeken de leerlingen mee naar bruikbare stellingen (EK 7'e). Voor EK7'e scoren de leerlingen tijdens de lessenreeks een +.

EK 13 c.

Slechts één leerling twijfelt bij het begin van les 6 nog aan het nut van meetkundige eigenschappen om de Harlekijn te tekenen. Door zijn mislukking wordt ook hij overtuigd. De leerlingen scoren positief voor EK 13c.

EK 14.

Enkele leerlingen lezen ten onrechte de concurrentie van de drie symmetrieassen af tijdens het klasgesprek van de eerste les (EK 14 a). Ze leiden geen gegevens af uit andere gegevens (EK 14d). Hierdoor verdienen ze voor EK 14 in het begin van de lessenreeks een –.

B.8 De kijk op meetkunde van 4D1E tijdens de interviews na de lessenreeks

B.8.1 Een omschrijving en modeloplossing van de drie problemen die tijdens een interview door de leerling opgelost moeten worden

Hieronder beschrijf ik de drie problemen die aan elke leerling voorgeschoteld worden tijdens zijn interview. Ook stel ik voor elk probleem een modeloplossing voor.

Probleem 1. Het probleem van het geitje

Schets van het probleem

Een boer heeft een geitje. Hij wil het laten grazen op een mooi groen weiland, waar geen omheining omheen staat. De volgende problemen kunnen zich stellen:

1. Hoe moet de boer het geitje vastmaken als het een cirkelvormig stuk van de wei mag afeten?
2. Waar mag het geitje staan om even ver van twee boompjes verwijderd te zijn?
3. Welke vorm krijgt het afgegeten weiland als het geitje vastgemaakt wordt zoals op de foto?
4. Waar moet hij het paaltje kloppen als het geitje niet aan de schors van de drie bomen van de wei mag kunnen eten?
5. Hoe vind de boer de positie terug van het paaltje dat in het midden van een cirkel stond?

Opmerking. Tijdens het interview staat een maquette van de probleemsituatie op de bank voor de leerling. Hieronder staat een foto van de maquette afgebeeld.

Concrete opdrachten of vragen voor de leerling tijdens het interview

1. Ben je er zeker van dat het geitje een cirkelvormig stuk grasland kan afeten?

2. Kan je de oplossing van vraag 1b voorspellen, zonder het geitje te verplaatsen? Kan je de vorm beschrijven als het als je het uittest? Probeer eens een goede definitie te geven voor een ovaal (ellips).

3. Is gebruik van omgeschreven cirkel ook mogelijk? Hoe doe je dat dan?

Modeloplossing voor probleem 1

1. Het geitje moet vastgemaakt worden aan een paal met een koord die rond zijn nek zit. Zo zal het geitje niet verder kunnen komen dan de koord toelaat. De uiterste punten vormen een cirkel. Per definitie is een cirkel immers een verzameling punten die op dezelfde afstand van een middelpunt liggen.

2. Het geitje kan gaan staan op alle punten van de middelloodlijn op het lijnstuk bepaald door de twee bomen.

3. In geval het geitje vastgemaakt is zoals op de foto, zal het geen cirkelvormig stuk gras afeten. De afstand van een punt van de omtrek tot een van de paaltjes hoeft immers niet dezelfde te blijven. De ring waaraan het geitje vastzit kan over de koord glijden. De totale lengte van de koord kan niet veranderen, maar de afstand van een punt van de omtrek tot een van de palen wel. De som van de afstanden van het punt tot de twee palen is steeds dezelfde. Dit geeft als omtrek voor het afgegeten gras een ellips. Een ellips is dan ook een verzameling punten waarvoor de som van de afstanden tot twee gegeven punten constant is.

4. De positie van het paaltje kan gevonden worden als middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek gevormd door de posities van de bomen. Dit middelpunt wordt gevonden als snijpunt van de drie middelloodlijnen van de bomendriehoek. Het geitje kan dan met zijn snuitje de drie bomen net raken. Indien de boer liever heeft dat het geitje op een veilige afstand van de bomen blijft, dan moet hij zijn paaltje in het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de bomendriehoek plaatsen. Dit middelpunt is snijpunt van de drie bissectrices van de driehoek.

5. Het middelpunt van een gegeven cirkel kan de boer vinden door een driehoek te bepalen met hoekpunten op de cirkel. Van deze driehoek is het middelpunt van de omgeschreven cirkel het gevraagde middelpunt.

Probleem 2. De omtrekshoek op een middellijn van de cirkel

Schets van het probleem

Ik maak een ruwe schets van een cirkel met middelpunt M en middellijn AC. Op de cirkel kies ik een willekeurig punt B. Ik verbind B met A resp. C. Zo ontstaat in B een hoek. Dan stel ik het probleem:

Kan je iets zeggen over de omtrekshoekhoek die op een middellijn van de cirkel staat?

Concrete opdrachten of vragen voor de leerling tijdens het interview

Vier schetsen van het probleem worden aan de leerling getoond. Hij mag hieruit de schets kiezen die hij de beste vindt. Hij moet zijn keuze verantwoorden.

schets 1: een schets met passer en liniaal, één positie van B.

schets 2: een ruwe schets met twee posities voor B.

schets 3: een ruwe schets met één positie voor B.

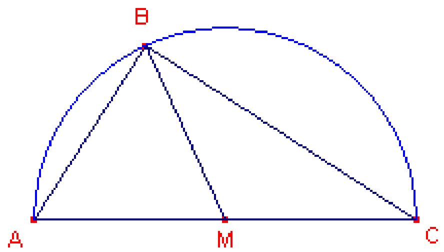
schets 4: een exactere schets met twee posities voor B.

Is deze opgave een vraag naar een nieuwe eigenschap of is het eerder een concrete hoekmeting?

Indien het bewijs niet lukt laat ik de leerling expliciet zoeken in de logische schema's. Weet hij hoe hij deze moet gebruiken? Weet hij daarmee logisch te redeneren?

Indien de leerling niet op bruikbare eigenschappen voor een bewijs komt, help ik hem hierbij. Hij krijgt een aantal kaartjes waarop de verschillende uitspraken staan die samen het bewijs vormen. De leerling moet dan de kaartjes van de verschillende bewijsstappen in een logische volgorde leggen, en elke stap verklaren.

Modeloplossing voor probleem 2



In deze figuur is M het midden van het lijnstuk AC. M is het middelpunt van de cirkel met straal MA. Het punt B is een punt van deze cirkel. We zullen nu bewijzen dat hoek B een rechte hoek is.
Omdat $MA = MB$ zijn de hoeken MAB en MBA gelijk.
Omdat $MC = MB$, zijn de hoeken MBC en MCB gelijk.
De som van deze hoeken is gelijk aan 180°. De hoeken MBA en MBC zijn dus samen 90°.
Met andere woorden, hoek B is een rechte hoek. $\square$

Probleem 3. Een constructieprobleem

Schets van het probleem

Het probleem wordt eerst driedimensionaal gegeven, maar dan door mezelf herleid tot een tweedimensionaal probleem.

Stel dat ik aan een kermiskraam een zak smoutebollen ga kopen. Ik krijg dan zo'n puntzak (dit toon ik door een wit blad op te rollen tot een puntzak) waar de mevrouw van het kraam een lekkere, perfect ronde smoutebol instopt. Al snel verschijnt aan de enen kant van de zak een vetvlek, een punt. Ook aan de andere kant van de zak zal een vetvlek verschijnen. De vraag is waar juist?

Bekijk dit probleem tweedimensionaal. Dat kan wanneer we een vlakke doorsnede maken van de puntzak met de smoutebol erin. Dit geeft een paar snijdende rechten l_1 en l_2. Op l_1 ligt een punt P. In dit punt raakt de smoutebol aan de ene kant van de puntzak. In welk punt aan de andere kant van de zak zal de smoutebol raken? Of anders gezegd, in welk punt van l_2 zal de cirkel door P raken?

Modeloplossing voor probleem 3

Het middelpunt M van de gezochte cirkel met aan twee voorwaarden voldoen. Enerzijds moet het behoren tot de loodlijn op l_1 die door P gaat. Als verantwoording hiervoor dient de eigenschap: "Een lijn is raaklijn aan een cirkel in een punt asa de middellijn van de cirkel die door het raakpunt gaat loodrecht staat op de raaklijn." Bovendien moet het middelpunt even ver gelegen zijn van l_1 en l_2. Daarom moet het middelpunt gelegen zijn op de bissectrice van l_1 en l_2. Dit wordt verklaard door het kenmerk van bissectrice van een paar rechten. Bijgevolg moet M op de snijding van loodlijn en bissectrice liggen. Dit bepaalt het punt M volledig. Dan kan ook het raakpunt van cirkel en l_2 gevonden worden. Het is namelijk snijpunt van l_2 en de loodlijn vanuit M op l_2. Hier gebruik je weer het kenmerk van raaklijn.

B.8.2 De interviews na de lessenreeks uitgetypt

Interview met leerling B1

Algemene indrukken over de gegeven lessenreeks

H	Wat vond je van de lessen van vorige week? Waren die zoals andere lessen?
B1	Neen. Ze lacht. Ze waren ook moeilijk.
H	Ja?
B1	Ja, doordat het ineens meetkunde was, en dan ook nog heel andere meetkunde dan we gewoon zijn. Het was wel een andere manier van lesgeven. Maar da's wel normaal dat elke leerkracht het anders doet.
H	Wat vond je anders dan gewoonlijk?
B1	Dat we de graancirkels zelf mochten tekenen, dat was ook anders. Dat vond ik wel leuk dat we zelf iets mochten uitzoeken, dat we zelf iets mogen oplossen... Dat je zelf iets mag proberen in plaats van de hele tijd naar bord te kijken.
H	Waren er dingen die je slechter vond?
B1	Nee.
B1	Dingen die je beter vond?
B1	Soms was het wel saai, maar dat is gewoon zo.
H	Wat vond je saai?
B1	Dat we bewijzen moesten maken enzo. Het was saai dat het zo lang duurde, wel een hele les voor één bewijs.
H	Was dat de les waarbij je in de kring moest gaan zitten?
B1	Neen, in de kring dat was wel leuk.
H	Waarom vond je dat leuk?
B1	Dat is weer eens wat anders. En als je als leerling in een kring zit en je wordt aangeduid om te antwoorden, dat is goed. Want als je achter een bank zit ben je al sneller geneigd om niet op te letten.
H	Brengt dat een andere sfeer?
B1	ja...
H	Vond je dat er een andere sfeer hing tijdens heel de lessenreeks?
B1	Ik denk dat er wel meer gepraat werd.

Probleem 1

H	Ik heb hier een weiland meegebracht. Daarop graast een geitje. De boer wil dat het geitje op een cirkelvormig stuk van de wei kan grazen. Hoe moet hij het geitje dan vastmaken?
B1	Met één paaltje en een touw.

H Gaat het geitje dan echt in een cirkel kunnen rondlopen?
B1 Neen, het kan ook…
H Ja het kan ook binnenin de cirkelomtrek. maar het verste dat het kan is wel een cirkel.
B1 Ja.
H Dus daar ben je van overtuigd, dat is goed. Stel dat je het geitje laat rondlopen terwijl het vastgebonden is met een ring die over een touw glijdt. Het touw is vastgemaakt aan twee paaltjes en langer dan de afstand ertussen. Hoe kan het geitje dan bewegen?
B1 Ook een cirkel. (ze zegt dit twijfelend)
H Kijk eens goed.
B1 Een ovaal. (hierbij laat ze het geitje echt de beweging uitvoeren.) Terwijl ze dit doet ziet ze het ook echt in. Hier in de buurt van het paaltje geraakt het geitje niet verder.
H Nee inderdaad. Stel nu dat dat het geitje overal mag gaan eten waar het even ver van deze twee bomen staat. Waar mag het geitje dan komen?
B1 In het midden. Hier ergens. (ze wijst een plekje aan op de verbindingslijn tussen de twee bomen)
H Als het gras daar op is, mag het geitje dan ook ergens anders gaan eten?
B1 (ze snapt de hint direct) Ah ja…het kan even goed hierzo…op die lijn hier.
H Wat voor een lijn is dat B1?
B1 Kweetniet, een middellijn of zo.
H Je zou het kunnen weten. Het geitje kan ook hier en hier gaan staan. Kan je dit ergens uit je meetkundekennis halen welke lijn dit zal moeten zijn?
B1 Ja, de lijn staat loodrecht op de verbindingslijn tussen de twee bomen, en in het midden.
H En hoe noem je zo'n lijn?
B1 De middelloodlijn?
H Ja inderdaad. Je gaf mij de definitie van middelloodlijn he: loodrecht op het lijnstuk en door het midden. Maar er is ook een kenmerk van middelloodlijn. Dat staat hier op het schema. Herken je dit schema van in de lessen? Het stond op een Powerpoint.
B1 Nee niet echt. Een beetje.
H De definitie van middelloodlijn staat bovenaan. Daarna komen een eigenschap en zijn omgekeerde. En samengevat gaven die een kenmerk. Ken je dat kenmerk nog?
B1 Neen.
H De eigenschap zei: als je een punt hebt van de middelloodlijn, dan bevindt het zich even ver van beide eindpunten. De omgekeerde eigenschap: als een punt even ver ligt van beide eindpunten, dan ligt het op de middelloodlijn. Dus is de middelloodlijn de rechte van alle punten die even ver van de twee eindpunten liggen. Kan je dat gebruiken voor ons probleem?
B1 Voor dat geitje? (klinkt verbaasd)
H Ja, ik vroeg waar het geitje kan gaan staan als het even ver van de twee bomen moet staan.
B1 Ja dat is bruikbaar want dan moet het geitje op de middelloodlijn gaan staan.
H Dat moet je onthouden: wanneer je op een groot veld of op een plat vlak iets moet uitzoeken over meetkundige vormen, dan moet je eerst eens gaan zien welke meetkunde je studeerde en of je die niet kan gebruiken. Daarvoor moeten jullie het leren.
Nu zetten we het geitje weg. Het heeft zijn werk gedaan.

H Hier voor jou leg ik de schema's die ik heb gemaakt over middelloodlijnen, bissectrices, de 23 eerste definities van Euclides en een schema van jou voorkennis. (ik toon dit even:

voor je weet wat een middelloodlijn is, moet je weten wat een lijn is, wat een punt is, wat afstand is) Dat is de betekenis van de pijlen uit de logische schema's. Als de pijl van boven naar onder staat, betekent het dat je het bovenste nodig hebt om het onderste te kunnen zeggen. Ik bracht kaartjes mee met definities op. Ik zou nu graag hebben dat je ze in een logische volgorde legt. Het kaartje dat je eerst nodig hebt, bovenaan, daaronder het kaartje dat daaruit volt enzovoort. Wat je eerst legt heb je nodig om de rest te definieren.

B1 B1 leest de kaartjes en denkt na. Euhm...

H Je mag gerust luidop nadenken hoor. Je legt het kaartje van de cirkel bovenaan?

B1 Ja want je moet eerst de cirkel kennen voordat je de ingeschreven cirkel te kunt definieren. En ik leg eerst de definitie van raaklijn, want je hebt een raaklijn nodig om de ingeschreven cirkel te kunnen definieren. En dan de omgeschreven cirkel ernaast.

H Goed B1. Dat is nu zo'n logisch schema zoals bij Euclides. En dat was nieuw aan zijn werkwijze. Hierdoor wordt het mogelijk van bewijzen te geven. Heb je door de lessenreeks wat beter begrepen wat bewijzen zijn en waarom dat moet?

B1 Ik heb dat niet beter begrepen maar ik snap het wel.

H Je bedoelt dat je dat vroeger ook al begrepen had?

B1 Ja.

H En je hebt daar niks nieuws over geleerd?

B1 Neen.

H Da's goed. Dan heb ik een nieuwe opdracht voor jou. Ik ga iets voor je tekenen. Ik teken een cirkel met middelpunt M. Ik teken een middellijn dus een lijn door M. Deze snijdt de cirkel in de punten A en B. Ik kies een willekeurig punt B op de cirkel en verbind B met A en C. Zo krijg ik in B een hoek. Dat noemt men een omtrekshoek omdat hij op de cirkelomtrek ligt. Wat ik mij afvraag is, of je iets kan zeggen over die omtrekshoek. Ik herhaal de vraag nu volledig: kan je iets zeggen over de omtrekshoek die op de middellijn van een cirkel ligt?

B1 zegt niks...

H B1, het schetsje dat ik daarjuist maakte, zonder lat en zonder passer is dat een goed schetsje ?
Of had ik dat beter met een passer en een liniaal gemaakt?

B1 O ja,

H Ga je meer punten krijgen voor een schets als je die nauwkeuriger maakt?

B1 Nee, maar dat is wel overzichtelijker.

H Je vind dat duidelijker?

B1 Ja.

H Als je tussen deze vier schetsen zou moeten kiezen, welke zou jij dan gebruiken. Welke zou jij bij het probleem maken?

B1 De eerste of de derde.

H Waarom niet de tweede of vierde?Wat is het verschil met de eerste en de derde?

B1 Daar staan twee hoeken op.

H En dat vind je niet nodig?

B1 Nee.

H Je gaat zoeken naar: wat kan ik vertellen over die hoek. Als ik dat aan jou vraag, vraag ik dan naar een eigenschap, of vraag ik dan dat je die hoek gaat meten?

B1 Een eigenschap.

H Wat is het verschil tussen een eigenschap geven en een hoek meten?

B1 Voor te meten mag het niet gewoon een schets zijn, maar moet dat juister getekend zijn.

Want als je op een ruwe schets gaat meten dan klopt dat niet. Een eigenschap dat klopt ook bij een ruwe schets.

H En wat weet je nog allemaal over een eigenschap?

B1 Euh…

H Dat moet niet alleen voor deze, maar voor de vier de figuren gelden. Waarom?

B1 Een eigenschap dat is voor alle… dat moet altijd kloppen.

H Ja. En hoe kunnen we dat nagaan? Door heel veel verschillende punten B op de cirkel te kiezen en telkens na te gaan of het klopt?

B1 Door te bewijzen.

H Ben je daar zeker van? Want in de les twijfelde je vriendin leerling B5 daaraan, weet je nog?
Toen ik zei dat er 34 voorbeelden waren…

B1 Lacht.

H Moet je dat nu bewijzen of niet om een eigenschap te kunnen maken?

B1 Ik denk van wel, om te zien dat het voor elke keuze klopt.

H Inderdaad. Nu wil ik graag dat jij probeert een bewijsje te geven voor de eigenschap die we zullen formuleren over de hoek in B. We zullen dus eerst naar een eigenschap van de hoek in B moeten zoeken. Wat kunnen we over de grootte van de hoek in B zeggen?

B1 Dat hij dubbel zo groot als de hoek in C is. Of nee dat klopt denk ik niet. Hij is 90°.

H Inderdaad. De hoek in B is steeds 90°. Je ziet het hier zelfs niet duidelijk op de schets. Dat is een reden om naar een bewijs te zoeken. Want als we het kunnen bewijzen, dan zijn we zeker. Kunnen we het niet bewijzen, dan zijn we nog niet zeker van het tegenovergestelde, maar dat kan dan wel een aanwijzing zijn. Probeer deze eigenschap nu eens zelf te bewijzen Hoe ga je eraan beginnen?

B1 Eu… moet ik dan ook zo schrijven als…

H Jaja waarom denk je dat je dat moet zo schrijven? Heb je dat bij mevrouw Vanlommel geleerd of herinner je jezelf dat uit de lessenreeks?

B1 Dat weet ik niet.

H Je denkt dat gewoon.

B1 Bij een stelling is dat gewoon altijd zo. Als… dan blablabla.

H Ja ok wat geeft dat dan hier?

B1 Als deze rechte een middellijn wordt en in een cirkel verbonden met een punt op de cirkel dan is die gevormde hoek 90°.

H Ja dan moet je wel even vermelden dat je het punt op de cirkel met de twee uiteinden van de middellijn verbindt, want anders heb je geen hoek.

B1 Ja.

H Wat is dan je gegeven en je te bewijzen?

B1 Gegeven is de middellijn en het punt M. Euhm mag ik deze schets gebruiken?

H Ja.

B1 Mag ik daar zelf letters bijschrijven?

H Absoluut. Jij mag met je eigen tekening doen wat jij wil.

B1 A en C daar en boven B.

H En wat weet je van B?

B1 Dat is een willekeurig punt op de cirkel.

H Nu schrijf je dat in woorden op. Mag dat zo of moet dat in symbolen?

B1 Dat mag in woorden.

H Waarom denk je dat?

B1 Volgens mij hebt u dat gezegd tijdens de lessenreeks.
H Heel goed. Dat is braaf hoor B1... En wat is er dan te bewijzen?
B1 B is 90°
H En nu het bewijs. Hoe ga je daar nu aan beginnen, denk daar eens luidop over na. Hoe pak jij zoiets aan?
B1 AM is gelijk aan MC, dat weet je maar dat moet je niet weten he of wel?
H Dat kan interessant zijn.
Hoe kan je weten of dit interessant is of niet?
B1 Dat weet ik niet (beslist).
H Dat is moeilijk he?
B1 Ja.
H Uit je voorkennis moet je nu eigenschappen gaan uithalen die je wil gaan gebruiken voor je bewijsje. Ik geef je een hint. In deze envelop zitten zinnetjes op blauwe reepjes papier. Deze zinnen in de juiste volgorde gezet vormen een bewijs. Wil je ze eens lezen en proberen in de goede volgorde te zetten? Kijk hier heb je jou bewering over M die in het midden ligt van A en C.
B1 B1 leest de beweringen op de blauwe strookjes papier. En ze vraagt: klopt dat wel met mijn letters?
H Jaja.
B1 Ok da's goed. Dit is de eerste.
H Is dat al van het bewijs, of eerder van het gegeven of het te bewijzen?
B1 Een gegeven. En... B1 denkt na.
H Is dat een belangrijk zinnetje dat je nu vasthebt: en $MC = MB$ dus zal hoek in B en de hoek in C gelijk zijn?
B1 Ja .
H En is dat waar wat daar staat?
B1 Ja want $MC = MB$ omdat het allebei de straal is.
H En waarom volgt daar dan uit dat de hoeken gelijk zijn? Want er staat toch dat als de zijden gelijk zijn, dat dan de hoeken gelijk zijn?
B1 Die en die?
H Ja.
B1 Omdat als je twee gelijke stralen hebt dan en je verbindt de eindpunten met een koorden, dan zijn de hoeken die ontstaan gelijk.
H Waar haal je dat? Want als jij een bewering doet waarvan je zeker bent dat ze juist is, dan vraag ik jou weer om deze te bewijzen hoor.
B1 (Lacht). Ja dat weet ik niet.
H Tenzij dat dit een eigenschap is die je vroeger al gezien zou hebben.
B1 Ja die hebben we vroeger al gezien.
H Ja? En hoe heb je die toen genoemd weet je dat nog?
Wat voor een driehoek is dat, een driehoek met twee gelijke benen?
B1 Een gelijkbenige driehoek.
H Ja, en wat geldt er in een gelijkbenige driehoek?
B1 In een gelijkbenige driehoek zijn de twee basishoeken gelijk.
H Ja dat is de eigenschap die je nu gebruikt. Je eerste bewering was voor mij geen goede verklaring, je moet echt proberen te refereren naar een eigenschap die je vroeger zag. Dus de bewering op de blauwe strook klopt wel. En verder?
B1 Hier is er nog een. Die horen samen (B1 toont: $MA = MB$ dan hoek in A en hoek in

B gelijk)

H En om dezelfde reden. Maar het gaat wel om andere hoeken nietwaar?

B1 Ja $MA = MB$ dat zijn ook weer die stralen en $MAB = MBA$ want dat is weer hetzelfde.

H Dus heb je al dat $MAB = MBA$ en dat $MCB = MBC$ en de zijdes zijn ook even lang. Kan je nu zelf het bewijs niet aanvullen?

B1 Ja want dan moet hoek A + hoek C = hoek B.

H Inderdaad. Maar haal je daar dan uit dat de hoek in B 90°is? Want dat moet je bewijzen.

B1 Nee dat heb je nog niet.

H Je zit al in de buurt. Hoe kan je nu aantonen dat de hoek in B 90°is?

B1 Dat wil dan zeggen dat de hoeken in A en C samen ook 90°zijn.

H En is dat zo.

B1 Ja dat is zo.

H Is er geen eigenschap uit je voorkennis die over de hoeken in een driehoek gaat? Want je wil aantonen dat een bepaalde hoek 90°is. Je wil niet alleen weten van bepaalde hoeken dat ze gelijk zijn. Dat is iets anders he, begrijp je dat?

B1 Ja.

H Is er dan geen formule die iets over de hoeken van een driehoek zegt, deze op een of andere manier berekent?

B1 Ja de som van de hoeken is 180°.

H Ja en dat heb je ook nodig. Ik noteer $A + B + C = 180$ en $A + B = C$ dus...

B1 (vult aan) $2C = 180$°en dus $C = 90$°.

H Nu heb je zelf een bewijs gemaakt B1. Dus mogen we deze eigenschap toevoegen aan de boeken van Euclides. Wist je van jezelf dat je dat kon? Neen.

B1 Moet je dat kunnen voor wiskunde?

B1 Neen.

H Jawel, wacht maar... (lacht)

H Zou het bewijs juist zijn?

B1 Ja.

H Zeker van?

B1 Nee.

H Is elk van de blauwe zinnetjes juist?

B1 Ja.

H Hebben we logisch hiermee geredeneerd?

B1 Ja.

H Komen we uit wat we moesten bewijzen?

B1 Ja.

H Dan is ons bewijs zeker ook ok...

Probleem 3

H Terwijl jij wat verder eet zal ik het probleem al eens uitleggen.
Ik teken twee snijdende lijnen l_1 en l_2, en op l_1 teken ik een punt P. Dit is een doorsnede van een frietzak, of een zak waar men smoutebollen indoet. Als je in deze zak een smoutebol stopt, maakt hij ter hoogte van punt P een vettige plek op het papier aan de ene kant. Hij raakt net aan het papier langs de linkerkant. Maar wat aan de rechterzijde? Waar zal de smoutebol daar het papier raken? Of in de vlakke doorsnede: waar zal de cirkel die ook aan l_2 raakt en door P gaat, de lijn l_2 raken?

B1 Ik denk op het moment dat de diameter van de cirkel even breed is als de breedte van de puntzak.

H Teken dat eens.
B1 Tekenen?
H Ja want ik wil weten waar de bol juist moet raken, moet dit hier of daar of nog wat verder op l_2?
B1 Euhm als deze hoek...
H Wat tekende je daar nu? Is dat misschien een eigenschap die je in de lessenreeks van vorige week gezien hebt?
B1 Nee.
H Jawel! Welke eigenschap is dat?
B1 Van de bissectrice.
H Nee. We hebben onszelf op een bepaald moment toch ook afgevraagd waar een cirkel en een lijn gaan raken. Ik teken een stukje cirkelboog dat aan een recht raakt. In welk punt is niet duidelijk, want boog en lijn lijken over een hele lengte samen te vallen, tegeneen te plakken. Dit toonde ik ook tijdens de lessenreeks. Er zijn veel puntjes waar het raakpunt gelegen zou kunnen zijn. Maar in welk puntje zal dat gebeuren B1?
B1 Euhm...ik denk in het punt waar de hoek 90 graden is.
H Ja maar welke hoek? Het eerst been is de raaklijn, maar waar is het tweede been?
B1 Door het middelpunt.
H Dus vonden we nu dat het middelpunt van de gezocht cirkel zal liggen op een loodlijn door het raakpunt, op de raaklijn. Zoals je al tekende. Dus dat was juist. Wat zoeken we nu nog?
B1 ...
H We zoeken een cirkel zijn middelpunt. Het ligt al zeker op de loodlijn door het raakpunt op de lijn l1. Waar nog?
B1 In het midden tussen de twee zijden van die zak.
H En wat betekent dat, in het midden van twee lijnen liggen?
B1 Op de bissectrice.
H Wat weet je van punten die op de bissectrice liggen van twee lijnen?
B1 Die liggen even ver van de twee lijnen.
H Ja dat is het. Is het nodig dat het punt even ver van l_1 en l_2 ligt?
B1 Ja want anders zou de smoutebol nog verder naar beneden rollen en als je het meer naar rechts legt, dan kan de smoutebol er niet meer in.
H Ja, wat moet de smoutebol dus doen met l_2?
B1 Hij moet raken.
H Voila hij moet raken, daarom zagen wij eigenschappen over raken: omdat we willen weten of smoutebollen in tipzakken kunnen. Als die moet raken, waar moet het punt M uiteindelijk liggen?
B1 In de snijding.
H Proficiat. Denk nu eens terug hoe je dat oploste, je gaat je wiskunde gebruiken om iets over smoutebollen te weten. Zou het als producent van smoutebollen zakken interessant zijn om te weten wat we net onderzochten?
B1 Ja want onder de smoutebol zit niks meer, dus als je dan de zak minde r puntig zou maken, dan gebruik je dat helemaal.
H Is wiskunde dan enkel interessant voor producenten van smoutebollenzakken? En voor jezelf in je dagelijks leven?
B1 Ik weet niet. Ik kan me daar niet direct iets bij voorstellen.
H Toen we het in de lessenreeks over de graancirkels hadden, vond je dat leuk?

B1 Ja dat vond ik wel leuk.
H Vond je dat het hielp om te begrijpen dat wiskunde bruikbaar is?
B1 Ja voor de graancirkels moet je dat wel weten, maar je moet geen graancirkels maken he?
H Wat zijn dan dingen die je wel moet doen, jij moet ook geen smoutebollenzakken maken…
B1 kweetniet.
H Als ik jou zou vragen om op de speelplaats even ver van twee palen te gaan staan…
B1 Ja dan weet je dat er meer plaatsen zijn , die geen wiskunde kennen gaan alleen in het midden staan.
einde

Interview met leerling B10

H Kijk B10 dit heb ik meegebracht. Daar mag je op elk moment van ons gesprek gebruik van maken. Dit is een schema van de 23 eerste definities van Euclides.
B10 Amai da's groot.
H Het begint met afstand, dan definieert Euclides een punt als "dat wat geen afmetingen heeft". Zo gaat hij naar lijn, oppervlak, rechte lijn, loodlijn, enz…ik toon waar wij tijdens de lessen verder gebouwd hebben, namelijk bij de cirkel. Heb je ooit zelf zo'n logisch schema gemaakt?
B10 Neen eigenlijk niet. Ik leer altijd uit handboeken of een schema dat we in de klas kregen.
Probleem 1
H Er staat een geitje op een wei. (Ik zet de maquette voor de neus van B10.) De wei heeft mooi, mals groen gras. Stel dat de boer het geitje wil laten grazen op een cirkelvormig stukje van die wei. Wat moet hij dan doen?
B10 Hij moet een paal in de grond slaan en de geit met touw vastmaken aan die paal. Zo kan ze alleen maar in cirkels lopen.
H Ben je daar zeker van ?
B10 Nee allee als ze ook binnen de cirkel mag lopen.
H En als ze binnen de cirkel mag lopen ben je er dan zeker van dat dit een goede manier is om de geit vast te maken?
B10 Ja, dan wel door het touw als dat gespannen is dan is de afstand overal gelijk dus dan is dat een cirkel. (Cf lessen over cirkel op veld)
H Ik heb mijn geitje nu wat anders vastgemaakt. Kijk maar: tussen twee paaltjes is een langer touw vastgemaakt. Dit touw kan bewegen door een ring, die vastzit aan het geitje. Zonder het geitje te verplaatsen: welke vorm zal volgens jou het grasoppervlak hebben waarop het geitje dan kan grazen?.
B10 Een parallellogram.
H Waarom denk je dat?
B10 (toont terwijl hij uitlegt) Als hij naar hier loopt en dan zo loopt en zo dan moet het een parallellogram zijn.
H Dan kijk je naar de uiterste hoekpunten of wat ?
B10 Ja nu ik het bezie denk ik dat het ook een ovaal kan zijn.
H Wat zal het zijn?
B10 Een ovaal.
H Een ovaal inderdaad. (ik toon de beweging) Zie je het verschil met de cirkel?
B10 Ja.
H Hoe zou je dan een ovaal kunnen beschrijven? Een cirkel is een verzameling punten die op eenzelfde afstand liggen van een gegeven middelpunt. Welke punten liggen er hier op

een ovaal?

B10 De punten die... wacht hoor een koorde, twee punten... één touw... nee daar kan ik echt niet opkomen.

H Dat is niet erg hoor. Als je het weet mag je het mij altijd komen zeggen.

B10 Ja ik dacht aan iets met een driehoek.

H Nog iets anders: stel dat het geitje niet aan de boompjes mag kunnen, want dan eet het van de schors en dan gaan de boompjes dood. Het moet binnen de boompjes blijven. De boer wil het vastmaken met één touw en één paaltje. Waar moet hij het paaltje dan zetten?

B10 In het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek gevormd door de drie boompjes.

H Goed B10, en waar zal dat middelpunt dan liggen?

B10 Even ver van de drie zijden van die driehoek.

H Goed, en waar ligt dat punt dan?

B10 Dat is het snijpunt van de bissectrices van de driehoek.

H Heel goed. Dus je gaat je wiskunde gebruiken om de boer een handje te helpen.

B10 Ja.

H Doe je dat soms zelf ook: wiskunde gebruiken om een probleem op te lossen als je met één van je hobbies bezig bent?

B10 Niet bewust. Ik denk dat ik dat soms wel doe, maar bewust zal ik dat echt niet doen.

H En als je rond een grasplein moet lopen om ergens te geraken, en je bent gehaast, wat doe je dan?

B10 Dat plein recht oversteken.

H Hoe?

B10 Zo.

H Je zegt dat het onbewust is, maar steunt dat ook op een wiskundige eigenschap?

B10 Ja op het feit dat de som van de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek groter is dan de schuine zijde, dat is op Pythagoras.

H Dus het is niet echt Pythagoras?

B10 Ik heb het daar wel van afgeleid want je kan van beide leden de vierkantswortel nemen.

H Maar pas op hoor: $(b+c)^2$ is niet gelijk aan b^2+c^2. Dat weet je toch he?

B10 O juist.

H Je hebt dus nog een stukje $2bc$ erbij. Maar b noch c zijn nul, dus is $2bc$ steeds positief, dus is $(b+c)^2$ steeds groter dan b^2+c^2 en a^2 is b^2+c^2 volgens Pythagoras dus heb je wat we zochten.

H Je zei zelf dat je onbewust hier wiskunde gebruikt, maar één van de bedoelingen van de lessenreeks was dat jullie bewuster gebruik zouden gaan maken van wiskunde. Denk je dat ik daarin geslaagd ben? Zijn er dingen die jou opvielen?

B10 De manier van lesgeven.

H Wat bedoel je daarmee?

B10 De manier van uitleggen. Wij werken nooit met zo'n schema's. wij hebben dat nooit gedaan.

H En denk je dat het zinvol is?

B10 Op een bepaalde manier wel, ja. Je kunt daar makkelijker dingen door afleiden en daar makkelijker bewijzen door opstellen.

H Ja? Denk je dat?

B10 Ja of eigenschappen uithalen. Dat schema is veel overzichtelijker.

H De dingen die in het schema staan zijn voorkennis, dat zitten ook in je hoofd. Wat is het verschil tussen de eigenschappen zoals ze in je hoofd zitten en de eigenschappen van het schema?

B10 Eigenschappen in zo'n schema staan echt letterlijk geformuleerd, en in je hoofd kan dat soms verkeerd staan of verschillend zijn.

H En zitten de eigenschappen in je hoofd allemaal mooi geordend?

B10 Neen ge haalt die altijd door elkaar.

H Bedoel je dat je de eigenschappen begint om te keren? Je zegt als... dan maar je bedoelt eigenlijk de dan... als...

B10 Ja of als en slechts als.

H Dus dat is toch wel opletten. Daarom deed Euclides het op deze manier. Om exact te kunnen redeneren is het op deze wijze wel nodig. Je mag in de schema' steeds kijken als je dat wil, je moet het niet vragen.

Probleem 2

H Ik teken hier een cirkel. Hij heeft middelpunt M. Ik teken ook een middellijn. Die punten noem ik A en C. Nu kies ik een willekeurig punt B op de cirkel. Hier of daar of hieronder. Ik verbind B met A en met C. Zo ontstaat in B een hoek.

B10 B10 begint te glimlachen.

H Wat is er B10?

B10 Dat is een rechthoekige driehoek he?

H Wat voor een bewering doe je nu ? Lees je dat gewoon af of is dat een eigenschap?

B10 Neen, dat is een eigenschap maar ik kan mij totaal het bewijs niet meer herinneren.

H Heb je die gezien?

B10 Ja, ik denk het wel. Vorig jaar bij rechthoekige driehoeken.

H Dus jij herinnert het je. Het is niet evident he, als je hetzelfde eens op een ande e plaats tekent, is het niet evident dat in B steeds een rechte hoek moet zijn.
Kunnen we dat als stelling toevoegen wanneer we het checken op veel voorbeelden?

B10 Neen je mag je niet baseren op een schets.

H Waarom niet?

B10 Euhm omdat het dan verkeerd kan zijn.

H Bijvoorbeeld. Heb je vroeger geleerd dat het dan verkeerd kan zijn?

B10 Ik denk het maar ik kan mij van zo'n dinges echt niks meer herinneren.

H En in de lessenreeks van vorige week? Hoe komt het dat je niet mag aflezen van een schets?

B10 Door Aristoteles en dinges zei dat een punt geen afmetingen heeft en op een tekening heeft een punt wel afmetingen, dus moet je het echt theoretisch bewijzen voordat je het weet.

H Wat is een punt volgens de Grieken?

B10 Iets zonder afmetingen.

H Ja, zij geven een definitie voor een punt. Zij zijn niet meer tevreden met een punt zoals we dat kennen uit de materiele wereld, zij willen in hun hoofd een punt. Bij een cijfer is dat hetzelfde he: je gaat nooit op straat een cijfer twee tegenkomen want dat is een abstract begrip.

B10 Een twee dat kan eender welke vorm krijgen.

H Ja, de Babyloniers gebruikten het spijkerschrift, de Egyptenaren hadden ook hun eigen notatie.

B10 Het kan even goed een vierkant zijn. Ik zat juist te denken aan de som van de hoeken van

een driehoek.
H Ja?
B10 180 graden.
H Ja... en wat denk je daarvan?
B10 Daarmee kan je volgens mij die hoek berekenen, maar hoe?...
H mmm dat kan je inderdaad gebruiken in een bewijs van de eigenschap.
B10 Ik kan...
H Wat je nu zegt dat is intutie he?
B10 Ja, ik kan mij zo flarden herinneren van dat van vorig jaar. Ik kan soms van die belachelijke details onthouden waarmee je dus niks bent.
H Jawel hoor, die eigenschap is één van de steunpilaren van een bewijs. Over welke hoeken ga je het dan hebben?
B10 De som van hoek A en B moet dan 90 graden zijn en dan is B ook 90°.
H Zoek daar eens een beetje op.
B10 Zoekt.
H Probeer nu eens in mijn mooi schema van de voorkennis...
B10 Ik zat te denken aan de zwaartelijnen, daar kan ik nu niet veel mee doen he?
H Waar kan je wel iets mee doen, waar zit je momenteel te werken?
B10 In een cirkel.
H In een cirkel. En wat weet je over de cirkel?
B10 De afstand van M tot C en van M tot A en B is gelijk.
H J dat is de definitie van cirkel.
B10 Eigenschappen van een rechthoekige driehoek denk ik te kunnen gebruiken... de afstand van het middelpunt van de schuine zijde van...
H Maar dan heb je het over afstanden. En we willen iets bewijzen over hoeken.
B10 En kan je dat dan zo niet bewijzen?
H Maar dan gebruik je dat het een rechthoekige driehoek is.
B10 Stel...
H Dat mag niet he je moet het bewijzen. Bovendien zit je nu met afstanden te werken terwijl je eigenlijk iets over hoeken wil weten. Dat kan niet tot een oplossing leiden.
B10 Ja.
H De eigenschap die je eerst ga vond ik daarom goed: ze zei iets over de som van de hoeken.
B10 Ja.
H Let daarop he B10? Je hebt vaak ingevingen, maar dan moet je wel terug met je voeten op de grond gaan staan en beginnen zoeken in je voorkennis naar eigenschappen. In een schema of in je geheugen: je mag kiezen.
B10 Ik ga dat schema eens bezien.
H Ja. We werken in een cirkel maar die behoort niet tot de voorkennis van vorige jaren, want die hebben we tijdens de lessenreeks juist gezien. Maar het gaat ook over een driehoek. En die staat daar in het schema. En we proberen iets over hoeken te weten te komen. Je kan dan driehoeken opdelen in rechthoekige, gelijkbenige en willekeurige. Dat er een rechte hoek is moeten we juist bewijzen, dus daarmee mogen we niet verder gaan. Is het een gelijkzijdige driehoek?
B10 Absoluut niet.
H Inderdaad en een gelijkbenige?
B10 Neen.
H En de driehoek AMB?

B10 Die wel.
H En welke is nog een gelijkbenige?
B10 Een gelijkbenige, ja en de basishoeken van een gelijkbenige zijn gelijk.
H Ja die eigenschap staat hier op het schema. En die eigenschap gaat nu wel over hoeken. Wat kan je daaruit nu afleiden?
B10 $\widehat{C} + \widehat{A} = \widehat{(E1)} + B2$ en dat wil zeggen dat B 90°is.
H Kijk eens terug naar de driehoek AMB. Is die gelijkbenig?
B10 Ja.
H Waarom?
B10 Omdat b en a punten zijn van de cirkel.
H Ja en welke hoeken zijn dan gelijk?
B10 De hoek in A en in $B1$.
H Ja en wat weet je van de driehoek BMC? Welke hoeken zijn daar gelijk?
B10 $\widehat{(B2)}$ en $\widehat{C}$.
H Gebruik nu eens dat de som van de hoeken in een driehoek 180°is. Wat geeft dat dan?
B10 $\widehat{A} + \widehat{(B1)} + c = 180°$
H En wat weet je nu nog?
B10 $\widehat{(B2)} = \widehat{C}$ en $\widehat{A} = \widehat{(B1)}$
H Vul dat nu eens in.
B10 Dat geeft dat $2.(b1 + b2) = 2B = 180°$dus $B = 90°$.
H Ja dan heb je het. Een bewijs leren maken, vind je dat zinvol?
B10 Ja ik heb daar nooit over nagedacht, ik heb dat altijd gewoon gedaan. Maar ik denk dat het wel zinvol kan zijn want dat kan je gebruiken om iets te maken bijvoorbeeld een computer. Dat is ook op wiskunde gebaseerd en chemie enzo.
H Wat gebruik je dan van wiskunde in een computer?
B10 Van chemie gebruik je bijvoorbeeld eigenschappen, bijvoorbeeld stoffen die electrische stroom kunnen geleiden...
H Maar wat heeft dat dan te maken met bewijzen te kunnen opstellen?
B10 Om mooie symmetrische vormen bijvoorbeeld te hebben moet je soms van die bewijzen gebruiken of om ingewikkelde figuren te maken.
H Bij de opgave van daarjuist maakte ik vier schetsen: twee daarvan zijn met de losse hand getekend, en twee met de passer. Welke schets zou jij bij de opgave maken?
B10 Eé of drie, omdat het nauwkeuriger is. Ik ben niet echt vast van hand en als ik zoiets zou maken dan zou dat eerder een spiraalvorm zijn.
H En is dat fout?
B10 Theoretisch niet maar ik doe dat voor mezelf omdat ik weet dat ik niet ordelijk ben.
H En wat is het verschil tussen schets 1 en 3?
B10 Op schets 4 staan twee driehoeken en op schets 1 staat er één.
H Uit welke van de twee schetsen kan je dan best de eigenschap halen?
B10 Dat maakt in principe niet uit.
H Leg eens uit.
B10 Hier heb je ene driehoek, en hier heb je eigenlijk ene driehoek en een andere driehoek.
H Ha (lacht) dat is goed B10 ik denk dat ik je begrijp en dat je het goed bedoelt — je kan je op geen van de twee baseren maar in geval van schets 4 heb je toch al meer voorbeelden.
B10 Ja.
H Ik zou dus voor schets 4 kiezen, maar in feite heb je helemaal gelijk.
H Is er volgens jou een verschil tussen de logica in de wiskunde en de logica in ons taalge-

bruik?

B10 Je kan dat op verschillende manieren interpreteren he maar op het eerste zicht zou ik direct ja zeggen.

H Ja? Waarom? Welk verschil zie je?

B10 Taal is om iets duidelijk te maken aan mensen en wiskunde is om... ik leg meer het verband met wiskundig schrijven en zo dan wiskunde denken alhoewel dat niet mag.

H Doe maar. Leg maar uit.

B10 Wiskunde gebruik je om iets wetenschappelijks uit te leggen aan mensen en taal is een middel om dat bijvoorbeeld aan mensen uit te leggen. Maar taal gebruik je ook om totaal andere dingen duidelijk te maken. Bijvoorbeeld als iemand zijn schoen in brand staat en hij heeft dat niet door of zo... dan zegt ge: uwe schoen staat in brand.

H Kan je daar voorbeelden van geven?

B10 Als je aan taal denkt denk je hoe ga ik iets uitspreken en als je aan wiskunde denkt dan denk je eerder aan hoe ga ik dat bewijzen, hoe ga ik dat aantonen.

H Ok dat is goed.

Probleem 3

H Voor het derde probleem had ik graag een zak smoutebollen meegebracht maar er was niet direct een kermis in de buurt dus vertel ik er maar over. Stel dat dit (ik toon een opgerold papier in de vorm van een tipzak) een zak is waarin de mevrouw van het smoutebollenkraam een smoutebol stopt. Dan verschijnt aan de linkerkant van de zak een vetvlek. Niet al te groot. Ik geef de positie van de vetvlek aan door een punt. Waar verschijnt er dan ook een vlek op de rechterkant? Nemen we een vlakke doorsnede van de tipzak, dan kunnen we het probleem als volgt voorstellen: twee snijdende lijnen l_1 en l_2 stellen de linker en rechter snijlijn van het vlak met de tipzak voor. Op l_1 bevindt zich het punt P waarin de smoutebol aan de tipzak raakt. Gevraagd wordt dan in welk punt van l_2 de smoutebol raakt.

B10 Mag ik dat hier even tekenen?

H Je mag alles doen wat je wil maar ik zou graag hebben dat je luidop redeneert. Hoe pak jij dit probleem aan ?

B10 Dat moet op dezelfde hoogte liggen als bij de eerst zijde. Omdat de smoutebol een perfecte cirkel is moet die aan de twee zijden perfect op dezelfde hoogte raken.

H Waar haal je dat?

B10 Logisch redeneren. Wacht he. Ik was aan het denken aan een bissectrice. Een middelpunt van die cirkel...

H B10 ik ga je eerst nog iets zeggen. Je begint direct te zoeken he, je begint direct te tekenen. Maar ik wil dat je een gefundeerde manier van zoeken hanteert.

B10 Jaja het middelpunt van die cirkel als die cirkel hier ook raakt moet dat op de bissectrice liggen.

H Daar ben ik het volledig mee eens.
Hoe is de manier om de bissectrice te tekenen?

B10 De cirkel snijdt l_1 en vanuit die twee punten nog eens boogjes.

H Ja dat is de constructie van de bissectrice. Op wat steunt die constructie?

B10 Wacht he; de afstand van hier tot hier en van hier tot hier is gelijk.

H Waar haal je dat?

B10 De afstand van hier tot hier en van hier tot hier is gelijk en dan van deze twee punten.

H Ik ben het met jou eens: we krijgen hier de bissectrice en het punt M ligt op de bissectrice. Waar op de bissectrice?

B10 Als je een cirkel tekent met als middelpunt het snijpunt van l_1 en l_2 met als straal de afstand van het snijpunt tot P, dan snijdt deze cirkel de bissectrice in het middelpunt.
H Dus je denkt dat het middelpunt van de smoutebol op die grote cirkel moet liggen? Waarop baseer je je hiervoor?
B10 De afstand van dat punt tot hier en van dat punt tot daar gelijk is.
H Dat is omdat je een bissectrice hebt.
B10 Neen de definitie van cirkel.
H Niet van de grote cirkel.
B10 Neen van de smoutebol.
H Dus de afstand van het middelpunt tot l_1 is de afstand van het middelpunt tot l_2. Daar ben ik het mee eens.
B10 En omdat het een cirkel moet zijn.
H Wacht hoor B10 die afstanden moeten gelijk zijn. Hoe moet dat: hoe moet ik de afstand van een punt tot een lijn l_1 of l_2 meten?
B10 . . . Ah je moet de afstand kennen?
H Jij zegt dat de afstanden gelijk moeten zijn dus je moet die afstanden kunnen tekenen. Het middelpunt moet zo liggen dat de afstanden gelijk zijn. We weten dat het op de bissectrice ligt maar waar moet het punt dan nog op liggen?
B10 Op de bissectrice.
H Ja dat weten we al. Maar waar precies op de bissectrice?
B10 Ik denk dat ik het weet. . .
H Ja B10.
B10 Teken die boog daardoor en verbindt de snijpunten van de grote boog met l_1 en l_2. Dan heb je de basis van een gelijkbenige driehoek omdat de afstand van P tot daar gelijk is. . .
H Waarom?
B10 . . . (hij begint te tekenen)
H B10, probeer nu eens op een andere manier te redeneren. Jij probeert van alles, ik noem dat gissen en missen, en je probeert dan te begrijpen waarom het juist zou kunnen zijn. Je zegt het middelpunt moet op de bissectrice liggen en je controleert het dan. Nu zeg je weer dat het middelpunt op de koorde van de grote cirkel moet liggen (door p) en nu wil je weer controleren waarom dit zo is.
B10 Zo moet je dat toch doen bij oefeningen. Je moet dat toch controleren?
H Je kan ook anders werken. Dat probeerde ik tijdens de lessen duidelijk te maken. Door deductie, door echt af te leiden. Toen we de les hadden waarbij we in een kring zaten, zijn we ons gaan afvragen: wat weet ik zeker over het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek? Waaraan moet dat punt voldoen?
Het eerste dat we hier zeker weten van het middelpunt van de smoutebol is dat zet op de bissectrice van de twee snijdende rechten zal liggen. Dat leert ons het kenmerk van bissectrice en de wetenschap dat de bol raakt aan de twee zijkanten van de zak. Wat weten we nog van het punt M?
B10 Euh. . . dat het punt M . . . ineens zegt hij luidop: loodlijn. Loodlijnen. Ik zit aan loodlijnen te denken.
H Waarom.
B10 Met de cirkel. De loodlijn uit het raakpunt van een cirkel moet in het middelpunt uitkomen.
H Ja los het nu eens verder op.
B10 Ik ga de twee loodlijnen tekenen.

B10 wil de twee loodlijnen tekenen om te zien of ze allebei de bissectrice in hetzelfde punt snijden.

H Je blijft teveel bij de idee dat het middelpunt van de bol op een grote cirkelboog moet liggen, terwijl je daarnet inzag dat je met een eigenschap over de loodlijn op de raaklijn moest werken.

B10 Juist ja.

H Je moet de loodlijn tekenen op de eerste lijn, dat is goed want die gaat dan ook door M.

B10 Ik zal het eens ongeveer doen.
(B10 tekent verder)

H Nu moeten we vanuit het middelpunt een loodlijn tekenen op l_2 en dat geeft het raakpunt. Zie je dit in?

B10 Juist ja. Jaja nu zie ik het ook.

H Dat lijkt zo wel. Wat leert dat jou nu : hoe moet je redeneren als je zo een oefening moet oplossen?

B10 Logisch redeneren en gebruik maken van de geziene eigenschappen.

end

Interview met leerling B7

Probleem 1

H Hoe moet de boer het geitje vastmaken om het een cirkelvormig stuk gras te laten afeten?

B7 Met een touw rond zijn nek en een paal in de wei en dan kan het in cirkels rondlopen.

H Ben je er zeker van dat het dan in een cirkel gaat rondlopen?

B7 Neen, het kan ook binnenin.

H Maar de buitenste omtrek is een cirkel?

B7 Ja.

H Nu heb ik het geitje anders vastgemaakt, met twee paaltjes en een touw dat door een ring kan schuiven die aan de nek van het geitje bevestigd is. Zonder het geitje te verplaatsen, kan je mij zeggen wat de vorm gaat zijn van het weioppervlak dat hij nu kan afeten? Gaat dat nog steeds een cirkel zijn?

B7 Neen, een cirkel kan niet. Het geitje kan nooit een cirkel maken want hij kan niet helemaal rond, hij kan geen ronde maken. Doordat hij hier vastzit kan hij geen ronde maken en doordat hij daar vastzit kan hij daar geen ronde maken.

H Ja, wat voor een figuur kan hij wel beschrijven?

B7 Ik denk een driehoek. Eerst zo naar hier het verste punt en dan zo. Naar binnen verste punt en dan naar daar denk ik.

H Ja, nu mag je eens proberen met het geitje.

B7 Eerst zo en... hij kan geen cirkel maken, want hij zit vast seffens...

H Is het een cirkel?

B7 Nee eerder een ovaal.

H Wat is het verschil tussen een ovaal en een cirkel?

B7 Een ovaal is langwerpig.

H En een cirkel is overal even rond. Dus er is een verschil.
Als ik van een cirkel beweer dat ik hem kan beschrijven door één middelpunt, en over de punten van een cirkel kan zeggen dat ze allemaal even ver van dit gegeven middelpunt liggen, wat zou jij dan zeggen van de punten van een ovaal?

B7 Ja... Sommige punten liggen op kortere afstand en sommigen op langere afstand.

H Je mag gerust een ovaal tekenen en jezelf daarbij afvragen welke punten daar nu op moeten liggen.

B7 Hier in het midden ligt een middelpunt en elk puntje van de ovaal ligt op een steeds grotere afstand van dat middelpunt.

H Ja maar dat is vrij moeilijk om uit te leggen. We zoeken iets zoals de definitie van de cirkel waar je met één of twee zinnetjes duidelijk uitlegt wanneer een punt erop ligt. Want hier bij deze ovaal moet je per punt gaan zeggen op welke afstand het ligt. Voor elk punt is dat anders en voor een andere ovaal zijn die afstanden weer allemaal anders.
Dat is dus niet de goede oplossing er is een andere manier. Eigenlijk kreeg je al een hint doordat ik in de wei twee paaltjes heb gezet. Zou een ovaal één middelpunt hebben?

B7 Twee waarschijnlijk.

H Als je met twee middelpunten zou werken, probeer dan nog eens de definitie van een ovaal te vinden. Je hebt daarnet al een goede poging gedaan hoor. Zou het met twee punten lukken?

B7 Met twee middelpunten, ik denk dat je dan eigenlijk twee cirkels krijgt, dan krijg je cirkeltjes in elkaar en met de stralen van die twee cirkeltjes samen dat is dan de afstand tussen de twee middelpunten.

H Bijna... Maar nog niet helemaal. Is het zo dat je echt twee cirkeltjes krijgt? Je zit wel in de goede richting hoor. Dat en dat samentellen is nog niet genoeg: je moet naar daar geraken.

B7 ...

H Wat zou er steeds hetzelfde blijven, de straal van een cirkel niet, wat wel? ...het is de som van de afstanden. De koord tussen de twee paaltjes is immers steeds even lang. Soms gaat de verdeling zo zijn, en soms anders. Dat kan je uitdrukken door te zeggen dat de som van de afstanden steeds dezelfde is
Stel nu dat de boer het geitje wil weghouden van de drie boompjes die hij op de wei heeft geplant. Ze zouden anders de schors kunnen opeten en de boomjes doen sterven. Hij wil het geitje vastmaken met één koord en één paal. Waar moet hij dan het paaltje zetten zodat het geitje niet van de boompjes kan eten?

B7 Je moet van de boompjes (B7 toont een driehoek) de ingeschreven cirkel nemen en daar het middelpunt van zoeken.

H Weet je nog hoe we het middelpunt van een ingeschreven cirkel bepaald hebben?

B7 Door de bissectrices.

H Inderdaad, heel goed. Het kan ook op een andere manier, zodat het geitje nog wat meer kan eten. Je kan een cirkel maken door de positie van de drie boompjes en daar dan net binnen blijven. Welke cirkel is de cirkel die door de positie van de drie boompjes gaat?

B7 De uitgeschreven cirkel.

H Ja of de omgeschreven cirkel. En hoe bepaal je daarvan het middelpunt? Weet je dat nog?

B7 Door de middelloodlijnen?

H Ja door het snijpunt van de drie middelloodlijnen te bepalen. Als je nu vergeten bent of dit met de zwaartelijnen, bissectrices of middelloodlijnen moet doen, hoe kan je dat dan terugvinden?

B7 ...

H Door jezelf het kenmerk van bijvoorbeeld middelloodlijnen te herinneren. Welk is dat kenmerk?

B7 Die verdeelt een hoek in twee gelijke delen en gaat door de overstaande zijde.

H Ok. Stel dat de boer een cirkel heeft op zijn wei, waar het geitje vroeger al eens het gras afgegeten heeft. Hoe kan hij nu terugvinden waar het paaltje stond? Hoe kan hij dit aanpakken, van een gegeven cirkel een middelpunt zoeken?

B7 Door een driehoek te tekenen — B7 tekent een driehoek met hoekpunten op de cirkel —.

H En wat is er belangrijk aan die driehoek?

B7 Dat de zijden even lang zijn.

H En de hoekpunten van de driehoek, moeten die op de cirkel liggen?

B7 Ja ik denk het wel. En dan zoek je de bissectrices van de driehoek. Dan krijg je zoiets en dan krijg je hier je middelpunt.

H Dan heb je wel het middelpunt van de ingeschreven cirkel bepaald he?

B7 Oh ja.

H Is het dat wat we moeten hebben?

B7 Neen.

H Wat moeten we hebben?

B7 Van de uitgeschreven cirkel.

H Ja he en hoe zoeken we dat ook weer?

B7 Door de middelloodlijnen.

H Goed door de middelloodlijnen.
Nu heb je de warme choco wel verdiend.

Probleem 2

H Nu ga ik voor jou een tekening maken van een cirkel met middelpunt M. Ik teken ook een middellijn AC en teken een willekeurig punt B op de cirkel. Als ik B verbindt met A en C dan krijg ik in B een hoek. Zo'n hoek wordt ook wel een omtrekshoek genoemd. Vraag aan jou is nu of je iets opmerkt aan deze hoek. Wat kan je erover zeggen?

B7 Zijn A en C dan ook omtrekshoeken?

H Ja. Let wel op: A en C zijn punten, en in A heb je een hoek, en in C ook.
Wat zou je kunnen beweren over de grootte van de hoek in B?

B7 Hij is groter dan de hoek in C.

H mmmmm...

B7 Ik denk dat de hoek in A en in C samen 90°zijn.

H Waarom denk je dat?

B7 Omdat het hoeken zijn aan dezelfde kant van de snijlijn...maar er is geen snijlijn.

H Ik zal maar doen of ik dit niet gehoord heb.

B7 Euh.

H Vraag ik nu eigenlijk aan jou om de hoek in B te gaan meten?

B7 Neen.

H Wat vraag ik dan wel aan jou?

B7 Om die te gaan berekenen.

H Ja die hoek in B ligt nu daar waar we B kiezen, maar als ik je dit probleem op deze manier vraag, dan vraag ik niet om één hoek te berekenen he, welke hoek moet je nog kennen?

B7 De hoek in C.

H Neen dat bedoel ik niet. Als B ergens anders op de cirkel zou liggen, dan zou de hoek in B ook daar gaan liggen.

B7 Die zal dan niet even groot zijn als de eerste hoek in B.

H Denk je dat? En waarom denk je van niet?

B7 Omdat de hoek in C groter is.

H En als ik de hoek in B onderaan de cirkel teken?
Ik vraag mij af of er een eigenschap is over de hoek in B, en die verandert van plaats als ik B op de cirkel ergens anders kies.

B7 Ik denk dat die hoek altijd verschillend gaat zijn, afhankelijk van het plekje waar je hem tekent?

H Ik maakte vier schetsen van deze situatie : twee met de losse hand en twee met passer en liniaal. Welke is volgens jou de beste schets om het probleem te onderzoeken?

B7 Schets 2 denk ik.

H Waarom kies je voor de ruwe schets waarop twee posities voor B zijn getekend?

B7 Een schets dat maakt niet echt uit hoe je die tekent.

H Waarom kies je dan voor de schets met de twee posities voor B?

B7 Omdat je dan beter kunt vergelijken. Dan weet je al iets meer.

H Dus daarom kies je voor 2 in plaats van 3?
En waarom dan niet voor de schetsen met de passer?

B7 Omdat het toch niet uitmaakt, want een schets is nooit precies genoeg.

H Waarom denk je dat?

B7 Omdat Euclides zei dat alles een dikte heeft en je dat moet voorstellen in je hoofd.

H Ja. Vond je het leuk wat we daarover verteld hebben in de lessenreeks?

B7 Ja, nu weet ik tenminste van waar dat komt, en waarom dat niet mag.

H Vond je de lessenreeks leuk?

B7 Ja, alleen het kringgesprek ging moeilijk. Ik kan niet echt iets zeggen als ik het niet kan opschrijven, ik moet gewoon kunnen kijken en dan gaat dat beter.

H Dus je vond dat tijdens het gesprek moeilijk?

B7 Ja, voor wiskunde vind ik dat moeilijk om na te denken zonder te kunnen schrijven. Voor een ander vak gaat dat wel voor godsdienst of zo maar voor wiskunde vind ik dat moeilijk.

H Dat is een goede tip voor mij. Zijn er nog dingen die je door de lessenreeks beter inziet, en die je belangrijk vindt?

B7 Dat je een bewijs ook in woorden mag opschrijven. Ik leer keilang aan een bewijs omdat ik dat niet kan onthouden en als ik dat dan in woorden mag opschrijven en de redenering daarachter, zodat je weet wat je in symbolen aan het schrijven bent, dat dat ook mag.

H Tuurlijk.

B7 Wij schreven altijd alles in symbolen dus...

H Ik heb dat gemerkt. Dat is niet echt nodig. Symbolen zijn laat in de wiskunde gekomen...

B7 Maar hebben ze daar wel veel mee gedaan met die wiskunde, want op een bepaald moment geloofde men toch dat alles door God gemaakt was? En eigenlijk gebruikte men de wiskunde toen dan toch niet zoveel?

H Over welke tijd spreek je dan?

B7 Over de middeleeuwen.

H Toen hebben ze toch wat gedaan hoor. Misschien dacht men wel dat alles van God kwam, maar ook het denken kwam van God he? En het is niet verkeerd om na te denken. En ze gebruikten hun wiskundige kennis in het dagelijks leven, bij het drijven van handel, bij het maken van gebouwen, kerken enzo en in de kunst. Ook werkte men aan het oplossen van vergelijkingen.

H Heb je door de lessenreeks beter begrepen waarvoor je de meetkunde kan gebruiken?

B7 Wel waarom je niet mag afgaan op een schets. En dat elke cirkel die je ziet, niet echt ook rond is.

H Dus het historisch en filosofisch stukje tijdens de lessenreeks vond je wel boeiend?

B7 Ja.

H In feite heb je geen gelijk wanneer je beweert dat de hoek in B van ons probleem steeds verschillend is. Deze is namelijk steeds 90°. Maar je hebt wel gelijk dat je eraan twijfelt. Op een schets zou je inderdaad eerder denken dat de hoek steeds anders is. Het vraagt dus om een bewijs. Probeer jij dat eens aan te tonen. Ik kon je ook vragen om te onderzoeken waaraan die hoek steeds gelijk moet zijn. Hoe kan je dat onderzoeken?

B7 Misschien denken dat je raaklijnen kan tekenen in A en C De raaklijnen in A en C zijn evenwijdig.

H Is dat zo?

B7 Ja ik denk van wel.

H Waarop steun je dan?

B7 Omdat die op de diameter is, en AM en CM zijn beiden de straal en dan weet je dus nee dat kan niet. . . ik wou zeggen dat de raaklijn altijd loodrecht staat op de middellijn maar dat kan niet (B7 ziet dit in via haar schets, waarop ze de raaklijnen in A en C niet loodrecht tekende op de middellijn)

H Is dat niet zo dat de raaklijn in een punt aan de cirkel loodrecht staat op de middellijn door dat punt? Welke eigenschap hebben we gezien tijdens de lessenreeks?

B7 Dat weet ik niet meer.

H Ik ben tijdens de les rondgegaan met een grote schets waarop ik toonde dat de raaklijn in een punt steeds loodrecht staat op de middellijn door het punt. Dus omgekeerd ook: als je een raaklijn aan een cirkel in een punt wil tekenen, dan moet je deze loodrecht tekenen op de middellijn door dat punt. Dus op deze schets heb je dat daarnet verkeerd getekend. Dan kan je dus beweren dat de raaklijnen in A en C evenwijdig zijn

B7 Ja want dan staan ze allebei loodrecht op de middellijn, dus moeten ze evenwijdig zijn.

H Als je moet steunen op eigenschappen die je kent, is het gebruik van logische schema's volgens jou dan zinvol? (ik toon B7 het grote logische schema van de voorkennis)
Had je zo'n schema nog al eens gehoord of gezien?

B7 Neen.

H Vind je dat goed om te weten?

B7 Ja, want dan weet je bij het definitieschema waar een bepaalde definitie van komt en waarom dat je een bepaald begrip mag definieren.

H Dat is één reden, en de eigenschappen staan ook in een logisch schema. Is dat nuttig?

B7 Ja maar ik zou dat zelf niet kunnen opstellen.

H Ja maar dat is niet erg. Stel dat je zo een schema mag gebruiken tijdens het ontdekken van nieuwe eigenschappen. Lijkt dat jou nuttig? Zou je weten wat je daarmee moest doen?

B7 Ik zou op het schema lang moeten zoeken, maar eens ik het begrepen heb, dan zou ik. . . Ik zou het echt in mijn hoofd moeten prenten, want zo vind ik het wel moeilijk om er iets uit af te leiden.

H Ik heb ook een schemaatje gemaakt van de cirkel. Als je een schema maakt, weet je alles natuurlijk ook staan. Tijdens het maken van zo'n schema prent je vanzelf de volgorde van de eigenschappen in je hoofd. Daarbij ben je niet langer met meetkundige vormen bezig, je bent nu met de stellingen op zich aan het puzzelen. En dat is nog een niveau hoger. En dat is nodig om een bewijs te maken. Je mag niet zomaar iets uit je duim zuigen, doordat je het ziet op een schets of doordat he je logisch lijkt. Neen, je moet je baseren op echt geziene eigenschappen.
Van de cirkel heb ik ook zo'n schemaatje gemaakt. Eerst zagen we de definitie, daarna

keken we naar symmetrie, en bestudeerden cirkel en lijn, cirkel en driehoek, enzovoort. De eigenschap van de raaklijn staat hier dus, bij de onderlinge ligging van cirkel en lijn. Denk je dat je zo'n schema kan gebruiken bij het vinden van een logische redenering? Of kan je dat even goed met de eigenschappen zoals ze in je hoofd zitten?

B7 Ik ben niet zo zeker dat het er echt inzit. Ik heb graag een zekerheid dat ik het wel weet en dat ik het dan juist kan gebruiken.

H Dat zijn twee verschillende dingen. Is er een risico nu, zoals je de vorige jaren werkte, zonder schema's, ben je zeker dat de eigenschappen er allemaal in zitten en op de juiste manier?

B7 Neen. We leren die eigenschappen wel maar we leren niet van waar ze komen.

H Ik heb in deze envelop de eigenschappen gestopt die je nodig hebt om aan te tonen dat de hoek in B een rechte hoek is. Ze zitten wel door elkaar. Ik zou graag hebben dat jij ze eens leest, en dat je luidop nadenkt of het waar is wat erop staat. En dat je ze dan op logische volgorde legt, dus gegevens eerst, dan te bewijzen en dan stap per stap het bewijs.

B7 Dus ze zijn niet allemaal waar?

H Jawel maar jij moet mij uitleggen waarom.

B7 Volgens mij is dit gegeven: de som van de hoeken in een driehoek is 180°.
Dat is in een driehoek altijd zo.

H Dus je vindt het voorkennis?

B7 Ja.

H Dan moet het op mijn schema staan. Waar ergens?

B7 Bij driehoek.

H Zoek eens.
(We vinden de plek waar het zou moeten staan. We vullen het aan, want deze eigenschap staat nog niet vermeld.)

B7 M is het midden van het lijnstuk AC.

H En klopt dat?

B7 Ja, omdat M het middelpunt van de cirkel is.

H Is dat een gegeven of een te bewijzen?

B7 Een gegeven.
En ik denk dat dit een te bewijzen is: ' we tonen aan dat de hoek in B gelijk is aan 90°'.
Ik denk dat dit ook een gegeven is: 'B is een punt van de cirkel'.

H Akkoord.

B7 En dan is dit volgens mij het begin van het bewijs: 'M is het midden van AC'.

B7 Omdat MC gelijk is aan MB, zal de hoek in B en de hoek in C gelijk zijn.

H Klopt dat?

B7 Ja want MB is de straal van de cirkel.

H En wat volgt daaruit?

B7 Dat de hoeken gelijk zijn.

H Is dat waar?
(k toon het logisch schema van voorkennis en B7 begint direct te zoeken.)

B7 Bij driehoek. En dan gelijkbenige driehoeken. En dan moeten de basishoeken gelijk zijn.
(Ze vindt de eigenschap terug op het schema.)

H En nu ga je deze eigenschap gebruiken.

B7 Ja. De hoeken zijn dus gelijk en dan geldt dit blauwe strookje.
(B7 zoekt een volgende stap in het bewijs en kiest voor het kaartje waarop staat dat als

$MA = MB$ dan zijn de hoeken in A en in B gelijk.)

B7 En dat heeft dezelfde reden als ervoor he?

H Ja inderdaad.

(Om een beetje sneller te gaan schets ik nu het verdere verloop van het bewijsje.)

Probleem 3

H Ik ga naar de kermis en ga aan het frietenkraam een zak heerlijke smoutebollen kopen. De mevrouw neemt een tipzak (ik toon dit door een wit blad op te rollen) en laat er een smoutebol in vallen. Al vlug verschijnt op de linkerkant van de zak een vetvlek. Een punt. Ook op de andere kant zal een vetvlek verschijnen: een ander punt. De vraag is waar dit tweede punt juist komt te liggen.

Ik ga je al op weg helpen. Dit probleem kan je in een vlak oplossen in plaats van in de ruimte. Door de zak en de bol tegelijk te snijden met een vlak door de linker- en rechterkant van de zak en door het snijpunt. Dit geeft dan de volgende schets (ik teken twee snijdende rechten, en op één van de rechten een punt P.) gevraagd wordt het punt op de andere rechte.

B7 En moet ik er dan van uitgaan dat een smoutebol rond is?

H Ja dat is een perfecte cirkel.

B7 (Denkt na voor ze tekent of spreekt.)...

H Hoe ga jij dit probleem aanpakken? Begin je gewoonlijk met te tekenen?

B7 Nee ik vergeet altijd te tekenen.

H Aha.

B7 Je hebt die bol maar je weet niet hoe die zit. Je kunt toch niet echt weten waar die zich gaat bevinden?

H Je weet dat het een bol/cirkel is. Wat kunnen we dan gaan doen? (ik neem het schema klaar)

B7 Dit is de raaklijn. (B7 toont de eerste rechte en het punt P)

H Goed B7.

B7 Ergens hier bevindt zich het middelpunt, dus dan bevindt zich hier het raakpunt.

H Waarom zeg je dat deze staat loodrecht op de middellijn van de cirkel, en dus ligt het punt M op de loodlijn door P.

B7 Ik wou zeggen omdat de twee rechten evenwijdig zijn, maar dat is dus niet.

H Nee hoor. Als die twee rechten evenwijdig waren, dan zou het raakpunt daar liggen, maar je hebt al een juiste beslissing genomen van het middelpunt: dat ligt op de getekende loodlijn.

Als we nu nog iets over het middelpunt kunnen zeggen dan hebben we het gevonden.

B7 Mag je dan hier geen evenwijdige tekenen?

H Nu begin je te gissen: je tekent zomaar een evenwijdige en gaat kijken wat je daarmee kan aanvangen. In de lessenreeks had ik gezegd dat deductief redeneren minder gevaarlijk is. Met gissen en missen kan je bezig blijven. In dit geval wil deductief redeneren zeggen dat je moet nadenken of je nog iets over het punt M weet. Wat weet je nog zeker van het middelpunt M? Het is middelpunt van de smoutebol. Wat betekent dat?

B7 Dat de straal overal hetzelfde is.

H Ja dus dat de afstand van middelpunt tot de eerst en tweede recht hetzelfde is.

B7 Maar je weet niet hoe die loopt.

Jawel eigenlijk wel want die loopt zowieso op deze wijze. (B7 tekent de loodlijn op de eerste recht door.)

H Waar moet het middelpunt op liggen doordat het even ver van twee rechten ligt?

B7 Op de bissectrice.
H Ja dus op snijpunt van bissectrice en loodlijn op de eerste lijn. . . en voor het tweede raakpunt pas je nog eens de eigenschap over raaklijn toe.
End.

B.8.3 Een codering van de uitspraken uit de interviews

Codering van de uitspraken en reacties van de leerlingen tijdens de oplossing van Probleem 1

Probleem 1 is een realistisch probleem (EK 13d). Ik zal observeren hoe de leerling omgaat met definities (EK4) en eigenschappen (EK5) die in de lessenreeks gegeven werden over de cirkel.

De herkenning van de definitie van cirkel
Leerling B1 vertaalt de definitie van cirkel in deze realistische situatie (EK 13d.1). Leerling B10 legt goed uit dat wanneer een touw gespannen is, de afstand tot het paaltje constant blijft (EK 4a.1) en er een cirkel beschreven wordt (EK 4c). Ook leerling B7 past de definitie van cirkel vlot op deze realistische situatie toe (EK 13d.1).

Posities die even ver van twee bomen verwijderd zijn
Leerling B1 ziet in dat deze op een lijn liggen, die loodrecht staat op de verbinding tussen de twee bomen. Ze kent de definitie van middelloodlijn, maar gebruikt het kenmerk niet (EK4b).

De constructie en definitie van een ellips
Zonder het geitje van de maquette te verplaatsen, gist leerling B1 dat het geitje weer in een cirkel zal bewegen (EK 3.a). Als ze het geitje beweegt, ziet ze in dat het een ovaal gaat beschrijven: in de buurt van het paaltje kan het geitje niet verder. Het kan dus geen cirkel beschrijven (EK 4c.1).

Leerling B10 denkt eerst dat het geitje een parallellogram gaat beschrijven (EK5a.2). Hij kijkt niet naar alle posities die het geitje kan innemen. Wanneer hij dieper nadenkt ziet hij in dat het een ovaal kan zijn (EK3a). Hij kan niet op een definitie van ovaal (ellips) komen, en denkt even aan een driehoek (EK 3a) (EK 13d.5).

Leerling B7 ziet door na te denken eerst in dat het geitje geen cirkelbeweging kan maken, doordat hij niet helemaal rond kan (EK 4a.1). Ze denkt dat het geitje een driehoek kan beschrijven. Ze ziet dus slechts een deel van de oplossing (EK 5a.2). Ze begrijpt wel het verschil tussen een ovaal en een cirkel, maar kan dat niet echt in een goede definitie vastleggen. Haar definitie formuleert een eigenschap voor de punten van de ovaal, die verschilt per punt (EK4.e).

Het geitje mag niet van de drie boompjes eten
Leerling B10 formuleert het antwoord hierop dadelijk in termen van de ingeschreven cirkel van de driehoek gevormd door de posities van de drie boompjes (EK 13d.3, d.4). Hij citeert de juiste stelling om het middelpunt van de cirkel te vinden (EK 13d.6, d.8). Dat de omgeschreven cirkel ook een mogelijke oplossing biedt, ziet hij zelf niet (EK 13d.9). Omdat hij zijn oplossing poneert en niet deductief redeneert vanuit het gevraagde (EK 3.c). Hij schakelt zijn wiskundekennis niet bewust in (EK 13d.5).

Leerling B7 denkt even na en geeft haar oplossing als middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek gevormd door de drie boompjes (EK13d.3,4,6). Zelf stelt ze haar oplossing niet in vraag (EK13d.9).

Het middelpunt van een gegeven cirkel bepalen

Leerling B7 stelt voor om een driehoek te tekenen met hoekpunten op de cirkel, die gelijke zijden heeft. Deze situatie bestond ook in de bestudeerde Harlekijnfiguur (EK 13d.10). Daarna bepaalt ze het middelpunt van de ingeschreven cirkel, terwijl ze het middelpunt van de omgeschreven cirkel zou moeten bepalen (EK 13d.5, 9).

Codering van de uitspraken en reacties van de leerling tijdens de oplossing van Probleem .

Probleem 2 is een wiskundig probleem. Ik wil weten hoe de leerling naar de stelling op zoek gaat (EK 5). Vindt hij een bewijs hiervan nodig en hoe pakt hij dit aan (EK 7')? Welke eisen stelt de leerling aan een schets en waarom (EK 10)? Hoe gebruikt hij de schets (EK 14)?

De keuze van een passende schets

Leerling B1 kiest voor de eerste of de derde schets. Ze vindt het niet nodig om twee verschillende situaties te tekenen voor het punt B (EK5a.2). Ze beseft dat de ruwheid van de schets niets uitmaakt omdat het de schets is voor een stelling, en je dus toch niet mag meten (EK2b.1).

Leerling B10 kiest voor de eerste of vierde schets omdat ze met de passer geconstrueerd zijn en dus ordelijker. Theoretisch zegt hij dat dit ook met de losse hand mag (EK2b.1). Verder kan je volgens hem de eigenschap even goed uit de eerste en de vierde schets halen. In principe maakt het niet uit dat er in de vierde schets meer gevallen getekend zijn, de tekening stelt toch een algemene positie van B voor (EK5a.2).

Leerling B7 kiest voor schets 2 omdat het voor een schets niet uitmaakt hoe ruw je hem tekent, want (EK 2b.1) een schets is toch nooit precies genoeg. Ze weet uit de lessen nu ook dat dit door Euclides komt (EK10b.4). Ze kiest voor een schets met verschillende situaties voor B erop omdat je dan beter kan vergelijken (EK5a.2).

Het zoeken naar een eigenschap

Leerling B1 vindt zelf geen eigenschap. Ze beseft wel dat haar niet gevraagd wordt om de hoek in B te gaan meten (EK5a.2). Ook beweert ze dat een eigenschap altijd moet kloppen (EK5a2 en 5e). Ze zegt ook dat zekerheid omtrent een eigenschap een bewijs vergt (EK 5d). Voor het zoeken naar een eigenschap over de hoek in B steunt ze echter op de schets en leest er eerst af dat de hoek in B dubbel zo groot is als die in C. Daarna denkt ze dat hij 90°is. Ze gist (EK 3a).

Leerling B10 herkent het probleem uit de leerstof van vorig jaar en beweert dadelijk dat de hoek in B 90°is.

Leerling B7 gist en mist, waarbij ze zich duidelijk laat inspireren door één schets (EK 5a.2). Eerst beweert ze dat de hoek in B groter is dan de hoek in C. Daarna dat de hoek in A en C samen 90°zijn. Ze denkt dat ze de hoek in B moet gaan 'berekenen'. Verder denkt ze dat de hoek in B zal veranderen als je een andere B tekent (EK3a).

Het aanvangen van een bewijs

Leerling B1 begint met de formulering van de stelling in "als. . . dan"- vorm te schrijven (EK 5b.1 en EK7'a). Ze vraagt of ze de schets mag gebruiken en er zelf letters bijschrijven (EK 7' c en d). Ze schrijft haar bewijs in woorden op, omdat ze zich herinnert uit de lessenreeks dat dit mag (EK 7' b). Ze voert aan dat AM gelijk is aan MC, maar vraagt zich af of je dit wel moet weten (EK 7'e.3). Ze weet dat ze niet beseft of deze uitspraak bruikbaar is in het bewijs en vindt dat moeilijk om te weten.

Leerling B10 probeert zich het bewijs te herinneren omdat hij het vorig jaar zag. Hij kan uitleggen dat we de bewering niet mogen aflezen uit de schets 'omwille van Aristoteles' (EK10b.4). Hij herinnert zich ineens dat hij de eigenschap over de hoekensom in een driehoek moet gebruiken, maar weet niet meer hoe (EK 7'e.4). Dan denkt hij ineens aan de zwaartelijnen, maar beseft dat hij er niet veel mee kan doen (EK 7'e.3). Mijn hint om te zoeken naar eigenschappen van de cirkel, gebruikt hij niet (EK 7'e.4). Hij denkt ineens eigenschappen van rechthoekige driehoeken te kunnen gebruiken. Bovendien gebruikt hij hier dat de hoek in B recht is, en dat is te bewijzen (EK 7'e.1). Ik krijg door al zijn plotse pogingen de indruk dat hij gist en mist en hoopt dat hij ineens, door één uitspraak het bewijs zal vinden (EK7'a EK 3a). Nadat ik hem hierop wijs, ziet hij in dat hij beter het schema van voorkennis kan raadplegen. Hiermee lukt het hem om een bruikbare eigenschap te vinden (EK 7'e.4 en e.5).

Leerling B7 zegt dat ze door de lessenreeks nu inziet dat een bewijs in woorden mag, en dat het voor haar de redenering daarachter beter weergeeft (EK 7' b). Leerling B7 wil door een raaklijnenconstructie in A en C de hoek in B gaan berekenen (EK7'd.3). Ze citeert hiervoor echter een foute eigenschap (EK7'e.5). Ze herinnert zich geen eigenschap over de raaklijn aan een cirkel vanuit de lessenreeks (EK7'e.2').

Gebruik van een logisch schema over de voorkennis

Leerling B1 weet niet hoe ze eigenschappen uit haar voorkennis kan selecteren die bruikbaar zijn voor het bewijs (EK 7'e.2'). Ze krijgt de uitspraken die samen een bewijs vormen, en zet deze in een juiste volgorde (EK 7'e.6). Ze verklaart de uitspraak: "als $MC = MB$, dan zijn de hoeken in B en C gelijk" door een eigenschap te formuleren die niet tot haar voorkennis behoort (EK 7'e.5). Dan herleidt ze het gevraagde door een korte deductieve redenering (EK3c). Ze ziet in dat ze de eigenschap over de hoekensom in een driehoek kan gebruiken (EK 7'.4).

Ze denkt dat je voor wiskunde geen bewijzen zelf moet kunnen maken (EK 7'a'.1). Verder vraagt ze zich af of het bewijs juist is (EK7'a'.2).

Leerling B10 denkt dat je door logische schema's te gebruiken makkelijker bewijzen kan opstellen of eigenschappen kan uithalen (EK 7'e.2'). Eigenschappen in een schema staan er letterlijk geformuleerd, en in het eigen hoofd kunnen ze verkeerd inzitten of verschillend (EK 5b.4).

Bij de oplossing van probleem 2, vind Leerling B10 na een hint om met de driehoek AMB te werken op het schema van voorkennis de eigenschap over de gelijke basishoeken van een gelijkbenige driehoek (EK e.2'). Hij vervolledigt door een vraaggesprekje het bewijs (EK7' e.6). Hij gelooft dat bewijzen kunnen maken zinvol is om later zelf dingen te kunnen maken en ingewikkelde redeneringen te kunnen doen (EK7'a'.1).

Leerling B7 denkt dat ze een logisch schema van eigenschappen niet zelf kan opstellen, maar ziet het nut ervan wel in. Bij een definitie weet je volgens haar door het definitieschema waar de definitie vandaan komt (EK 4d). Ze is er niet zeker van dat eigenschappen echt in haar hoofd zitten. Ze heeft graag een zekerheid dat ze het wel weet en dat ze de eigenschappen juist kan gebruiken (EK 5b.4). Om te verklaren dat de hoeken in B en C gelijk zijn doordat MC gelijk is aan MB, gebruikt ze vlot het schema (EK 7' e). Ze gaat van 'driehoek' naar 'gelijkzijdige driehoek' en dan naar de eigenschap die gelijkheid van basishoeken vaststelt voor een gelijkzijdige driehoek (EK 7'e).

Codering van de uitspraken en reacties van de leerlingen tijdens de oplossing van Probleem 3

Hoe pakt de leerling dit probleem aan: door gissen en missen of redeneert hij van bij de start deductief (EK 3)? Gebruikt de leerling het kenmerk van de raaklijn aan een cirkel? Gebruikt de leerling het kenmerk van bissectrice (EK 13d.7,8)? Heeft hij hierbij een logisch schema voor ogen (EK7'.e)? Maakt hijzelf een planning van zijn werkwijze? Stuurt hij zelf zijn oplossingswijze (EK 13d.12)?

Aanpak van het probleem

Leerling B1 gist voorzichtig naar bruikbare eigenschappen (EK 3a). Hierbij citeert ze eigenschappen die fout zijn of onbestaand. Ze zoekt niet echt in haar voorkennis (EK 13d.8).

Leerling B10 is er onmiddellijk zeker van dat de smoutebol langs de twee zijden even hoog moet liggen. Hij wijkt hier tijdens zijn oplossing niet vanaf, ondanks mijn hints. Hij vertrouwt te sterk op zijn intutie (EK 3a).

Leerling B7 is van bij het begin zeer voorzichtig met uitspraken. Zij heeft de goede houding: kan je wel weten waar de bol gaat raken (EK3c)? Zij ontcijfert stap per stap wat ze wel weet, en komt zo dichterbij een oplossing (EK 13d.11). Ze vraagt of de smoutebol perfect rond is (EK 2a.3).

Terugvinden van bruikbare eigenschappen

Leerling B1 vindt moeilijk gepaste eigenschappen terug (EK 13d.8). Ze gebruikt het logisch schema niet (EK 7'e.2').

Leerling B10 citeert een heel aantal geziene eigenschappen (EK 7'e.3,4). Hij denkt dat het een goede oplossingsstrategie is van te gissen en dan te controleren (EK3a).

Leerling B7 denkt na en vergeet 'altijd' te tekenen wanneer ze een probleem moet oplossen (EK 13d.2). Ze vertrekt van het gegeven van raaklijn om een eigenschap te vinden die haar iets leert over het middelpunt van de cirkel (EK 3c).

B.8.4 Een waardeoordeel voor de kijk op meetkunde

De toekenning van een waardeoordeel gebeurt zoals in hoofdstuk 10.5.4.

EK 2b.1 vanuit probleem 2

Leerling B1 beseft dat de ruwheid van de schets niets uitmaakt omdat het de schets is voor een stelling, en je dus toch niet mag meten (EK2b.1).

Leerling B10 kiest voor de eerste of vierde schets omdat ze met de passer geconstrueerd zijn en dus ordelijker. Theoretisch zegt hij dat dit ook met de losse hand mag (EK2b.1). Leerling B7 kiest voor schets 2 omdat het voor een schets niet uitmaakt hoe ruw je hem tekent, want (EK 2b.1) een schets is toch nooit precies genoeg.

*Volgens de beoordeling die in deel 5 van bijlage 4d beschreven is, zouden de drie leerlingen hier een – toegekend krijgen. Dit zou incorrect zijn omdat EK2 a en c niet ondervraagd werden in de interviews. Ik geef hier dus een *.*

EK 3.vanuit de drie problemen

Leerling B1 gist naar de oplossing van het eerste probleem en zegt dat het geitje een cirkel zal beschrijven. Om in te zien dat dit niet kan moet ze het geitje verplaatsen en werkt ze vooral empirisch (EK3a). Ook voor probeem 2 werkt ze vooral empirisch. Voor het derde probleem steunt ze weer op de schets en gaat niet echt in haar voorkennis zoeken. Ze verdient een –.

Leerling B10 denkt eerst na over probleem 1 en vindt vier posities van het geitje die op een parallellogram liggen (EK3b). Voor het tweede probleem kende hij de stelling van vroeger. Bij probleem 3 gaat hij op zoek naar eigenschappen die zijn geponeerde oplossing kunnen verklaren. Hij steunde op zijn intuïtie. Hij krijgt een 0. Leerling B7 denkt ook eerst na en vindt drie posities op een driehoek bij probleem 1. Ook bij het tweede probleem redeneert zij deductief. Ze ziet niet in dat de hoek steeds 90°moet zijn, maar denkt hierover na door eigenschappen van raaklijnen te citeren (EK3b). Voor probleem 3 vertrekt zij van het gevraagde en probeert steeds meer over de ligging van de cirkel te weten te komen. Hierbij citeert ze goede stellingen. Ze krijgt een +.

EK 4. vanuit de definitie van een ellips in probleem 1

Aan leerling B1 vroeg ik niet naar een definitie voor ellips. Bij de anderen liet ik het na om achter de logische formulering van een definitie te praten. Daarom kan ik over EK 4 geen oordeel vellen.

De drie leerlingen krijgen dan ook een *.

EK5. vanuit probleem 2, het zoeken van een stelling

Leerling B1 verdient een – voor EK 5. Bij haar protocol voor probleem 2 valt op dat ze zich baseert op één schets om een eigenschap over de hoek in B af te lezen. Leerling B10 verdient een * omdat hij de uitspraak als een geziene stelling herkent. Leerling B7 krijgt een + +, zij bekijkt wel verschillende gevallen, maar denkt dat de hoek zal variëren. Ze probeert een berekening voor de hoek te maken door raaklijnen te construeren.

EK7'b vanuit probleem2

Leerling B1 krijgt voor EK7'b een + omdat ze het bewijs in woorden begint op te schrijven, en beweert dat het mag vermits ik het zelf in de lessenreeks heb gezegd. Leerling B7 beweert dat ze blij was te horen dat een bewijs in woorden mag, omdat woorden uitleggen wat je in symbolen opschrijft. Ze krijgt voor EK7'b een + +. Ook leerling B10 krijgt een + +.

EK7' e vanuit probleem 2 en 3

Leerling B1 gebruikt de schets van probleem 2 als inspiratiebron. Ze citeert lukraak een stelling waarvan ze niet weet of deze bruikbaar is. Bij probleem 3 gist leerling B1 naar bruikbare eigenschappen. Ze krijgt een 0.

Leerling B10 gist naar bruikbare eigenschappen voor probleem 2en 3. Hij krijgt een +.

Leerling B7 krijgt een + + omdat ze vertrekt van gekende eigenschappen, en op de schets van probleem 2 hulpconstructies maakt. Ook op de schets van probleem 3 vertrekt en van de schets en construeert de loodlijn op l1 door P.

EK10 vanuit probleem 2

Leerling B1 weet dat voor een eigenschap een bewijs gegeven moet worden, en dat ze niet alles uit de schets mag afleiden. Ze zegt ook dat een eigenschap ook klopt bij een ruwe schets, en dat een schets met passer gewoon overzichtelijker is, niet juister. Ze krijgt een +.

Leerling B10 verwijst naar Aristoteles om uit te leggen dat je niet zomaar alles mag aflezen van een schets. Hij past de filosofische beweringen toe om uit te leggen waarom de keuze van een schets eigenlijk niet uitmaakt. Hij verdient een + +.

Leerling B7 kan ook goed uitleggen waarom ze schets 2 verkiest, en betrekt Euclides bij haar uitleg. Ook zij krijgt een + +.

EK 13d. vanuit probleem 1, 2 en 3

Leerling B1 ziet voor het geitjesprobleem (EK13d.1) in dat de oplossingen op een lijn zullen liggen, die loodrecht staat op de verbinding tussen de tweeboompjes en door het midden van deze verbinding gaat (EK13d 1,2,3). Ze kan deze lijn niet echt benoemen en kent er ook het kenmerk niet van. Voor het derde probleem gaat ze gissen naar een oplossing (EK13d.5) en naar bruikbare eigenschappen. Ze krijgt een –.

Leerling B10 past voor het geitjesprobleem (EK13d.6) dadelijk de gekende definitie en stelling toe in verband met ingeschreven cirkel. Hij controleert niet of dit de beste keuze was (EK13d.9). Voor probleem 3 steunt hij op zijn intuïtie, die hij 'logica' noemt. Hij gaat niet op zoek naar geschikte eigenschappen op een bewuste manier. Hij krijgt een 0.

Leerling B7 verdient een + + omdat ze op zoek gaat naar de oplossing van het derde probleem door eigenschappen te citeren. Bovendien gaat ze na of deze eigenschappen bruikbaar zijn. Voor het tweede probleem probeerde ze een eigenschap over raaklijnen te gebruiken om de hoek in B te berekenen. Ze ziet ook in dat dit niet gaat.

EK 14 vanuit probleem 2 en 3

Dit werd niet expliciet nagekeken in de interviews. De drie leerlingen krijgen dus een *.

Bijlage C

De tweede onderzoekscyclus

C.1 Gebruikte lesmaterialen

De volgende bestanden bevinden zich in directory `lesmateriaal` op de DVD.

lesvoorbereiding	`lessenreeksvoorwaver.docx`
powerpoint	`powerpointvoorwaver.pptx`
werktekst	`werktekstvoorwaver.docx`
filmpje 1	`filmpje1.wmv`
filmpje 2	`filmpje2.wmv`

De filmpjes zijn een compilatie van stukken uit de Canvas-reportages over graancirkels van september 2008.

C.2 Geluidsopnames

C.2.1 Interviews

directory : `geluidsopnames\waver\interviews`

Leerling W7	`interview_W7_22.02.2011.MP3`
Leerling W12	`interview_W12_24.2.2011.MP3`
Leerling W12 **Leerling W11**	`interview_W12_en_W11_24.03.2011.MP3`
Leerling W18	`interview_W18_25.03.2011.MP3`

C.2.2 Lessen

directory : `geluidsopnames\waver\lessen`

Les 1	`les1_15maart2011.MP3`
Les 2	`les2_16maart2011.MP3`
Les 3	`les3_17maart2011.MP3`

C.3 Meetkundetest

C.3.1 De opdrachten uit de test met modelantwoorden

Opgave 1

1. Formuleer de stelling van Pythagoras zo exact mogelijk.

   In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lengte van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de lengtes van de twee rechthoekszijden.

2. Wat is gegeven en wat is gevraagd in deze stelling?

   Gegeven is dat de driehoek rechthoekig is en gevraagd is dat het kwadraat van de lengte van de schuine zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de lengtes van de twee rechthoekszijden.

3. Formuleer de stelling in 'als. . . dan'-vorm.

   Als een driehoek rechthoekig is, dan is het kwadraat van de lengte van de schuine zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de lengtes van de twee rechthoekszijden.

4. Formuleer de omgekeerde stelling in 'als. . . dan'-vorm.

   Als het kwadraat van de lengte van de schuine zijde van een driehoek gelijk is aan de som van de kwadraten van de lengtes van de twee rechthoekszijden dan is de driehoek rechthoekig.

Opgave 2

Is de omgekeerde van een stelling steeds een ware uitspraak? Leg uit waarom je dit denkt.

De omgekeerde implicatie van een ware uitspraak is niet steeds een ware uitspraak. Dit kan uitgelegd worden door een tegenvoorbeeld te geven.

Opgave 3

Herschrijf de volgende uitspraken in 'als. . . dan'-vorm of met 'als en slechts als'. Geef aan of de uitspraken definitie (D) of stelling (S) of geen van beide zijn.

1. Een zwaartelijn van een driehoek is een lijn door een hoekpunt die gaat door het midden van de tegenoverliggende zijde. (D / S / geen van beide)

   Een lijn is zwaartelijn van een driehoek asa ze door een hoekpunt van de driehoek gaat en door het midden van de overstaande zijde. D

2. Een gelijkzijdige driehoek heeft drie even lange zijden. (D / S / geen van beide)

   Als een driehoek gelijkzijdig is dan heeft hij drie gelijke zijden. S

3. De hoogtelijnen in een gelijkzijdige driehoek zijn tegelijkertijd de drie zwaartelijnen.

   Als een driehoek gelijkzijdig is, dan zijn de hoogtelijnen gelijk aan de zwaartelijnen. S

4. De middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn die bestaat uit alle punten die even ver van de twee hoekpunten van het lijnstuk liggen. (D / S / geen van beide)

   Een lijn is middelloodlijn van een lijnstuk asa ze bestaat uit alle punten die even ver van de twee hoekpunten gelegen zijn. D

5. Als twee rechten loodrecht staan op een derde dan zijn ze evenwijdig.

   Als twee rechten loodrecht staan op een derde dan zijn ze evenwijdig. S

6. Een parallellogram heeft diagonalen die elkaar middendoor snijden.(D / S / geen van beide)

   Als een figuur parallellogram is dan snijden de diagonalen elkaar middendoor. S

Opgave 4

Lees aandachtig de volgende uitspraken :

- “De bissectrices van een paar snijdende rechten zijn de verzameling punten die even ver liggen van beide snijdende rechten.” 5
- “Als een punt even ver van twee snijdende rechten ligt, dan ligt het op één van de bissectrices van de snijdende rechten.” 3 of 4
- “De bissectrices van een paar snijdende rechten zijn de bissectrices van de overstaande hoeken gevormd door deze snijdende rechten.” 2
- “De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen deelt.” 1
- “Als een punt op één van de bissectrices van een paar snijdende rechten ligt, dan ligt het even ver van beide rechten.” 3 of 4

Zet deze uitspraken in de juiste logische volgorde. (Plaats een cijfer voor elke uitspraak)

Opgave 5

Probeer zelf te verklaren waarom de oppervlakte van een driehoek gelijk moet zijn aan basis x hoogte/2.

Opgave 6. Vragenlijst

1. In meetkunde definieren we objecten die we eigenlijk allemaal kennen: driehoek, lijn, vierkant. Waarom dan nog een definitie geven? Bedenk twee redenen.

   Een definitie van een object bepaalt dit object eenduidig en kan in verdere afleidingen gebruikt worden.

2. Eigenschappen van meetkundige objecten worden bewezen. Waarom?

   Om de waarheid van uitspraken aan te tonen worden deze bewezen.

3. Mogen we uit een schets een stelling afleiden? Waarom (niet)?

   Uit een schets mag je geen stelling afleiden. De stelling moet bewezen worden. Een schets is immers maar een gebrekkige voorstelling van het Platonische object.

4. Wat is een bewijs?

   Een bewijs is een reeks van ware uitspraken die de waarheid van een bewering aantonen en in een logische volgorde staan gerangschikt.

5. Moet een bewijs in woorden of in symbolen?

   Een bewijs mag in woorden, of in symbolen.

6. Hoe zou jij aan een bewijs voor een stelling beginnen?

   Eerst moet een correcte logische formulering van de stelling gezocht worden. Hieruit bepaal je gegevens en te bewijzen. Op basis van voorkennis van ware uitspraken zoek je dan een logische afleiding van het gevraagde vanuit het gegeven. Een schets kan hierbij ideeën geven voor de gevolgde strategie.

C.3.2 Een codering van de antwoorden op de opgaven

KD 1a1

Of leerlingen de betekenis van een implicatie juist kennen, probeer ik af te leiden uit hun antwoorden op de opgaven 1, 2 en 3.

Voorbeeld.

Leerling W1 gelooft in opgave 2 niet dat een implicatie steeds omkeerbaar is en vindt voor de beweringen in opgave 1c en 1d de juiste 'als. . . dan'-formulering. In opgave 3 b,c,e,f vindt ze de juiste formulering. Uit opgave 6.7 blijkt dat ze weet hoe ze een implicatie moet bewijzen. Ze krijgt een +.

Leerling W2 geeft een correcte 'als. . . dan'-formulering voor de uitspraken uit opgave 1c en 1d, maar keert de implicatie in opgave 3b om. Ze gelooft niet dat een implicatie steeds omkeerbaar is en weet niet hoe een implicatie te bewijzen. Ze krijgt een –.

Leerling W3 denkt dat de omgekeerde van een ware uitspraak steeds waar is en keert de implicatie in opgave 3 om. Ze krijgt – –.

Leerling W5 krijgt een – – omdat hij gelooft dat een implicatie steeds omkeerbaar is.

Leerling W4 krijgt een 0. Leerling W6 – –. Leerling W7 krijgt –. Leerling W8 –. Leerling W9 – –. Leerling W10 – –. Leerling W11 – –. Leerling W12 – –. Leerling W13 – –. Leerling W14 0. Leerling W15 0. Leerling W16 0. Leerling W17 +. Leerling W18 – –.

KD 1a2

Of een leerling de juiste beliefs over een equivalentie heeft, probeer ik uit opgave 3a,d af te leiden en ook uit opgave 4.

Leerling W1 krijgt + + omdat ze opgave 1a en d correct oplost en ook opgave 4. Leerling W2 doet opgave 3d fout en krijgt dus een –. Leerling W3 krijgt – – omdat ze opgave 3 a en d fout doet. Ook opgave 4 gaat helemaal fout. Leerling W4 krijgt ook – –. Leerling W5 – –. Leerling W6 – –. Leerling W7 –. Leerling W8 – –. Leerling W9 – –. Leerling W10 – –. Leerling W11 – –. Leerling W12 0. Leerling W13 – –. Jasmin– –. Leerling W15 – –. Leerling W16 0. Leerling W17 0. Leerling W18 – –.

KD 1b

Leerling W1 beweert in opgave 6 dat stellingen bewezen moeten worden omdat een schets onbetrouwbaar is. In opgave 2 zegt ze dat een voorwaarde voor alle zaken moet gelden. In opgave 5 gebruikt ze geen rechthoekige driehoek maar een algemene. Ze scoort hier een 0.

Leerling W2 zegt in opgave 2 dat de omgekeerde van een stelling eerst moet bewezen worden voor ze waar is. In opgave 6.2 beweert ze dat door het geven van een bewijs waarheden ontstaan en in opgave 6.3 dat een schets onnauwkeurig kan zijn en een speciaal geval waardoor de stelling niet altijd klopt. In opgave 5 gebruikt ze een parallellogram en geen rechthoek. Zij scoort +, want ze geeft geen tegenvoorbeeld in opgave 2.

Leerling W3 –. Leerling W4 –. Leerling W5 0. Leerling W6 –. Leerling W7 –. Leerling W8 0. Leerling W9 –. Leerling W10 –. Leerling W11 0. Leerling W12 0. Leerling W13 –. Leerling W14 0. Leerling W15 –. Leerling W16 0. Leerling W17 0. Leerling W18 0.

KD 1c

Leerling W1 –. Leerling W2 –.

Leerling W3 beweert in opgave 6 dat een bewijs dient om te tonen vanwaar eigenschappen komen en om de leerstof beter te begrijpen. Een bewijs is volgens haar een rednering over hoe je aan een stelling geraakt. Het bewijs uit opgave 5 vangt ze aan door de basisregel voor het berekenen van een opppervlakte te geven. Ze krijgt een –.

Leerling W4 beweert in opgave 6 dat een bewijs moet aantonen dat een bewering klopt. Hij zou een bewijs aanvangen door te vervangen een nieuwe stelling te bekomen. Over logisch redeneren heeft hij het niet. Hij krijgt een –.

Leerling W5 0. Leerling W6 –. Leerling W7 +. Leerling W8 +. Leerling W9 0. Leerling W10 +. Leerling W11 –. Alex +. Leerling W13 –. Leerling W14 – –. Leerling W15 –. Leerling W16 –. Leerling W17 0. Leerling W18 0.

KD 2

Leerling W1 stelt in opgave 5 zelf een bewijs op in symbolen voor de uitspraak. In opgave 6 beweert ze dat een bewijs best in symbolen kan gegeven worden. Ze heeft het niet over gegevens en te bewijzen en krijgt een –. Leerling W2 geeft haar bewijs in opgave 5 in woorden. Ze krijgt een – omdat ze nergens vermelt hoe je vanuit gegevens naar gevraagde met overgaan.

Leerling W3 geeft een logisch opgesteld bewijs in opdracht 5. Ze ziet in dat een bewijs een redenering is die aangeeft hoe je aan een stelling geraakt. Vanuit gegeven naar te bewijzen. Ze heeft het over het verzamelen van informatie die bruikbaar is in een stelling. Ze scoort een 0.

Leerling W4 –. Leerling W5 0. Leerling W6 0. Leerling W7 +. Leerling W8 +. Leerling W9 0. Leerling W10 – Leerling W11 +. Alex +. Leerling W13 – –. Leerling W14 –. Leerling W15 0. Leerling W16 0. Leerling W17 0. Leerling W18 –.

C.4 De interviews voor de lessenreeks

C.4.1 De vragen en modeloplossingen

Opgave 1

Welke van de volgende uitspraken zijn wiskundige beweringen en welke niet? Leg uit waarom je dit denkt. Wat is het verschil tussen wiskundige en gewone uitspraken? Welke van de volgende uitspraken zijn ware beweringen? Hoe ga je na of deze bewering waar is? Herformuleer deze uitspraken met 'als...dan' of met 'asa'. Formuleer de omgekeerde eigenschap. Is deze waar?

1. Wie de verwarming een graadje lager zet, verbruikt zeven procent minder brandstof.
2. De bewoners van de Ligusterlaan konden niet langer autowassen en grasmaaien, zoals ze zo graag deden, en hadden zich teruggetrokken in de schaduw van hun koele huizen.
3. Een gelijkbenige driehoek heeft twee even lange zijden.
4. De temperatuur in Spanje bedraagt gemiddeld 19°.
5. De hekken van het park zaten op slot, maar Harry sprong eroverheen en liep door het dorre gras.
6. Elke rechthoek is ook een vierkant.
7. Amber heeft dyslexie.
8. Vandaag schijnt de zon.
9. Samen vormen de hoeken van een driehoek een gestrekte hoek.
10. Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie even lange zijden.

Oplossing van opgave 1

Wiskundige uitspraken handelen over wiskundige onderwerpen, zijn waar of onwaar, en zijn vaak opgebouwd met een logica erin (voegwoorden en, of, als...dan, asa, niet). Voor de juiste betekenis van deze voegwoorden verwijs ik naar KD 1a1 en KD 1a2.

Opgave 2

"Een gelijkbenig trapezium heeft gelijke basishoeken."

- Is deze uitspraak waar?
- Hoe ga je dat na? Herformuleer met logisch voegwoord ertussen. Wat is een bewijs? Mag je steunen op een schets voor het maken van ware beweringen?
- Hoe zou je deze eigenschap bewijzen? Hoe pak je dat aan? Hoe moet het bewijs eruit zien?

Oplossing van opgave2

"Als een trapezium gelijkbenig is, dan heeft het gelijke basishoeken."

Om te weten of deze uitspraak waar is, moeten we ze bewijzen. Dit kan door gebruik te maken van vroeger geziene eigenschap ver de gelijke basishoeken van een gelijkzijdige driehoek. De volledige oplossing bevindt zicht in de eerste onderzoekscyclus.

Opgave 3

Waar op de speelplaats zou je gaan staan om jezelf even ver van twee palen te bevinden?

Je beschikt niet over een lintmeter, alleen over een koord die niet zo lang is als de afstand tussen de palen.

Oplossing van opgave 3

Je kan gaan staan op de punten van de middelloodlijn van het lijnstuk bepaald door de twee palen. Deze is construeerbaar met passer en liniaal, dus ook met koord en paal.

Opgave 4

Lees de pagina met een samenvatting en logisch schema van de voorkennis over middelloodlijnen. Wat kan je doen met dit logisch schema? Wat betekenen de pijlen?

Oplossing opgave 4

De pijlen in een logisch schema geven een causaal verband aan tussen de verschillende uitspraken. Dit is zeer bruikbaar in een bewijs, waar ook een logica (afleidingsregels) bestaat tussen de verschillende uitspraken. Een logisch schema is ook een opsomming van ware uitspraken.

C.4.2 Interview met leerling W7 uitgetypt

H Is wiskundetaal volgens jou hetzelfde dan gewone taal?

W7 Ik denk van niet omdat dat eerder ingewikkelder wordt, omdat je met heel veel wiskundige termen zit enzo—in het handboek valt dat nog mee—veel ingewikkelder dan in het gewone leven.

H En is dat het enige verschil denk je?

W7 Ik denk van wel. Alles moet veel uitgebreider en gedetailleerder. Als je iets vergeet dan kan dat zijn dat het fout is.

H Ik heb hier een aantal zinnetjes opgeschreven, en dan moet je eens zeggen welke volgens jou wiskundebeweringen zijn, en welke volgens jou andere beweringen zijn.

W7 "Wie de verwarming een graadje lager zet, verbruikt zeven procent minder brandstof."
Dit is geen wiskundige bewering, er wordt geen definitie van het een of ander gegeven, dat is gewoon puur informatief.
"De bewoners van de Ligusterlaan konden niet langer autowassen en grasmaaien, zoals ze zo graag deden, en hadden zich teruggetrokken in de schaduw van hun koele huizen."
Dat is ook geen wiskundige bewering, komt uit een boek of een artikel of zo.

H Ken je dat niet, de Ligusterlaan?

W7 Ah ja Harry Potter.

H En waarom is dat dan geen wiskundige bewering?

W7 Dat komt uit een boek en dat heeft niks met wiskunde te maken.
"Een gelijkbenige driehoek heeft twee even lange zijden" dat is een wiskundige bewering want dat definieert hoe een gelijkbenige driehoek eruit ziet.

H Definieert die zin hoe een gelijkbenige driehoek eruitziet?

W7 Ja ik denk dat er nog iets ontbreekt, dat er nog bij moet dat de basishoeken gelijk zijn of zo. Volgens mij definieert dat toch in zekere zin dat je weet wat een gelijkbenige driehoek is.

H En dan?

W7 "De temperatuur in Spanje bedraagt 19°." Dat is gewoon een bewering, van het weerbericht en heeft dus ook niet veel met wiskunde te maken, er wordt niet echt iets over wiskunde in uitgelegd.
"De hekken waren op slot maar Harry sprong eroverheen..." dat is hetzelfde als ervoor.
"Elke rechthoek is een vierkant." Dat is wel een wiskundige bewering, want ten eerste zijn er rechthoeken die een vierkant zijn wiskundige figuren het vertelt ook meer over het vierkant en de eigenschappen van het vierkant.

H Is het een ware bewering?

W7 Neen want een rechthoek is geen vierkant maar een vierkant is een rechthoek.

H Kan een bewering waar,onwaar en nog iets anders zijn?

W7 Volgens mij is het in wiskunde juist of onjuist.

H Waar haal je dat?

W7 Omdat als je bijvoorbeeld een oefening hebt, dat ga je niet zeggen van ja dat kan juist zijn of niet juist.

H Is dat in het dagelijks leven ook zo: is iets waar of niet waar?

W7 Neen in het dagelijks leven kan het twijfelachtig zijn, maar in wiskunde volgens mij niet.

H En waarom denk je dan dat deze bewering niet waar is? Waarop steun je dan?

W7 Op wat ik geleerd heb.

H Da's een goed antwoord hoor.

W7 Mij hebben ze altijd geleerd dat een vierkant rechthoek vier rechthoekige hoeken heeft.

H Waar haal je dat?
W7 Dat hebben ze mij in de lagere school geleerd.
H En hoe noem je dat zoiets?
W7 Dat noem ik een definitie.
H Dus je gebruikt je definitie nu om de waarheid van die bewering na te gaan?
W7 Ja, aangezien een vierkant vier gelijke zijden heeft en vier gelijke hoeken.
H Leg dat eens stapje per stapje uit.
W7 Een rechthoek daarvan zijn alleen de overstaande zijden gelijk en niet alle vier. En bij een vierkant zijn ze wel alle vier gelijk dus zijn ook de overstaande zijden gelijk vermits ze allemaal gelijk zijn.
H Ja.
W7 Dus een vierkant heeft ook overstaande zijden die gelijk zijn en bij een rechthoek zijn ze niet allevier gelijk dus een rechthoek kan geen vierkant zijn.
H Ja zo begrijp ik het. Kan je die zin ook op een andere manier formuleren?
W7 Als de figuur een vierkant is, dan is het een rechthoek of zo.
H Ja euhm zoals het daar staat, formuleer je het niet juist. Jou bewering is wel waar, maar de gegeven bewering is niet waar he. Hoe kan je die met als dan formuleren?
W7 Wacht he. . . als een figuur een vierkant is, dan is het een rechthoek of zo.
H Staat dat hier?
W7 Ah ja als een figuur een rechthoek is dan is het een vierkant.
H Is dat hetzelfde, als je dat omdraait, of niet?
W7 De als. . . dan?
H Ja.
W7 Nee. Nu niet omdat een vierkant een rechthoek is maar een rechthoek geen vierkant.
H En gewoonlijk is dat gewoonlijk hetzelfde?
W7 Soms wel en soms niet.
H En hoe kan je dat dan weten, of dat hetzelfde is of niet?
W7 Ja, als het allebei hetzelfde is dan kan je het al eerst in een kenmerk zetten maar dan moet je natuurlijk ook weten dat dat bestaat.
H Wat bedoel je daar mee?
W7 Een als en slechts als, dus . . . een vierkant. . . nee dat klopt eigenlijk niet. . . ik weet niet.
H Wat is een kenmerk?
W7 Euhm hoe moet ik dat zeggen. . . een kenmerk is zo als het het één heeft, dan heeft het zowieso het ander en omgekeerd er zijn altijd twee delen, en als het het een heeft komt dat ook altijd overeen met het andere.
H Dus dat het de pijl heeft in de ene en de andere richting. Is dit een kenmerk?
W7 Nee.
H Waarom niet?
W7 Ik wou zeggen geen twee richtingen maar dat klopt niet in de twee richtingen.
H Ja. "Amber heeft dyslexie." Is dat een wiskundige bewering?
W7 Neen dat heeft niks met wiskunde te maken.
H "Vandaag schijnt de zon."
W7 Ook niet.
H Is dat een ware bewering?
W7 Op dit moment wel.
H En waarop baseer je jezelf dan?
W7 Dat ik naar buiten kijk en de zon zie schijnen.

H Is dat hetzelfde redeneren dan zoals ervoor?
W7 Euhm ik denk het niet.
H Bij "elke rechthoek is een vierkant" zei je dat je gebruikt wat je geleerd hebt.
W7 Het is niet helemaal hetzelfde maar je kan het ook op dezelfde manier doen op de één of andere manier. Als je tekeningen wiskundig correct zijn kun je dan natuurlijk kijken of dat klopt.
H Wat is het verschil tussen de twee redeneringen?
W7 Bij de zon baseer je jezelf op waarnemingen en bij de andere baseer je jezelf op wiskundige eigenschappen.
H En is dat een verschillende manier van denken?
W7 Ik denk van wel. Ik denk dat een wiskundige manier van denken nog altijd iets anders is dan gewoon waarnemen.
H Hoe zit dat dan met die schets. Mag je dat op een schets verifieren?
W7 Een schets niet, maar als dat 100% wiskundig correct is, allee tot op de millimeter juist enzo en de rechthoek juist tot op een graad enzo dan kun je dat wel waarnemen.
H Zou je dat dan met één schets moeten waarnemen, of met meerdere?
W7 Ik denk met meerdere.
H Hoeveel dan?
W7 Ja in ieder geval meer dan één. Ik denk een stuk of drie ongeveer zodat je verschillende rechthoeken kunt proberen, allee zo met verschillende rechthoeken zodat je kan bewijzen dat het wel of niet een vierkant is.
H Ja. Wat weet je als je de eigenschap op de drie rechthoeken hebt uitgetest? Dan weet je dat voor de drie getekende rechthoeken de bewering is nagegaan. Heb je de bewering dan nagegaan voor elke rechthoek?
W7 Nee. Ja dus moet je er eigenlijk oneindig veel tekenen.
H Ja.
W7 Dus eigenlijk valt dat niet na te kijken... In zekere zin.
H Is er dan geen andere manier om dat na te kijken, want je zegde van de bewering dat ze niet klopt?
Stel ik vervelende vragen?
W7 Ja.
H Ik ben aan het doorvragen he.
W7 Ja en ik weet het niet.
H Er moet wel een andere manier zijn want je hebt ze daarjuist gebruikt.
W7 Euhm dat je dan overgaat naar... nu ben ik echt aan het gokken he—dat je dan overgaat naar basisfiguren. Een rechthoek stellen ze altijd voor met de bovenste zijde die de langste is en dan heb je terug een kortere enzo zo heb ik mij altijd een rechthoek voorgesteld. Misschien moet je dat daarmee gaan bewijzen of zo.
H Met dingen die je jezelf voorstelt.
W7 Ja dat eerst in de mensen hun...
H Nu sprak je over bewijzen. Je bent erg goed bezig he. Het verschil tussen dit en dat is dat je het gaat bewijzen en voor het andere ga je een experiment doen. En wat een bewijs is, dat heb je eigenlijk ook allang gezegd. Dan gaan we naar de volgende zinnetjes kijken. Zijn er daar nog interessante dingen bij?
W7 "Samen vormen de hoeken van een driehoek een gestrekte hoek." Dat is een wiskundige eigenschap want de hoeken van een driehoek zijn samen 180°en een gestrekte hoek is ook 180°. En dat kan je bewijzen door verschillende driehoeken te tekenen... zo veel mogelijk.

Je kan er natuurlijk niet oneindig veel tekenen, maar als je die hoeken optelt en je meet het op de graad juist dan zou je normaal altijd 180°moeten bekomen.

H Is dat wat een bewijs is, een algemene figuur tekenen en het daar op meten?

W7 Volgens mij is een bewijs dat je een voorbeeld neemt, een algemene figuur ja maar voor driehoek is er niet echt een algemene figuur want je hebt drie soorten, gelijkzijdig, rechthoekig, stomphoekig, gelijkbenig en dan moet je voor die drie soorten bewijzen allee uitrekenen en zien of dat klopt.

H "Een gelijkzijdige driehoek is een rechthoek met drie gelijke zijden": is dat een wiskundige bewering?

W7 Ja dat is een wiskundige bewering.

H Is die waar of onwaar?

W7 Die is waar.

H Waarop baseer je jezelf dan?

W7 Je zegt eerst al een gelijkzijdige driehoek is een driehoek, dus die driehoek dat klopt dan al en bij gelijkzijdig denk je aan gelijke zijden en aangezien een driehoek drie zijden heeft en drie hoeken, heeft die driehoek drie even lange zijden.

H Ja en waarop steun je dan eigenlijk, doe je een experiment zoals bij de zin over de zon?

W7 Nee, eigenschappen enzo.

H En wat gebruik je in dit geval?

W7 Definitie van driehoek,

H Is dit de definitie van een gelijkzijdige driehoek of is dit een eigenschap?

W7 Euhm.

H Kijk eens naar de zin over de gelijkbenige driehoek.

W7 Dat is een eigenschap, en dit is een definitie omdat je de is kan vervangen door "noemt men".

H Hoe zie je het verschil tussen een eigenschap en een definitie? En dan wil ik... wiskundige beweringen gaan niet alleen over wiskundige objecten. Ze hebben nog een ander kenmerk, nl. dat er vaak een logisch verband zit tussen de verschillende zinsonderdelen. Dit kan en, of niet als... dan of asa zijn. Verschil tussen een eigenschap en een definitie, welke van de twee schrijf je met als... dan en welke met asa?

W7 Als dan is volgens mij... Ik denk dat een definitie met een... wacht hoor. Een definitie is volgens mij een asa.

H Asa betekent equivalent. Zeggen "iets is gelijkzijdig" wil zeggen "heeft drie gelijke zijden". Nu is er nog een ander feit: een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie hoeken van 60°. Is dat volgens jou een definitie of een eigenschap?

W7 Een eigenschap.

H En kan je die afleiden uit de definitie of uit de dubbele pijl?

W7 Ik denk van niet. Het is niet omdat je zijden even lang zijn dat de hoeken allemaal 60°moeten zijn. Dat is logica aangezien je weet dat 180°dat is de som en je hebt drie even lange zijden, dus uw drie hoeken gaan ook gelijk zijn dus 180/3 is 60.

H Ok. In wiskunde redeneer je met je voorkennis: definities, eigenschappen. Leg deze allemaal op een hoopje ik heb er een aantal bij. We combineren die en maken daar een nieuwe eigenschap van of een nieuw besluit. Dat noemt men deductief redeneren. Wat mag je afleiden en wat mag je niet afleiden. Daar gaat de volgende vraag over. "Als een driehoek gelijkbenig is, dan zijn de drie basishoeken gelijk" en "de driehoek is gelijkbenig", wat kan je daar dan uit afleiden?

W7 Dat de basishoeken gelijk zijn.

H dat is een logische afleidingsregel die wij onbewust gebruiken. “Als een figuur een vierkant is, dan is hij ook een rechthoek”, stel dat je dit weet. Wat kan je dan besluiten als de figuur geen rechthoek is?
W7 Dat het ook geen vierkant kan zijn.
H Mag je in “als een vierkant, dan ook een rechthoek” de pijl omkeren?
W7 Nee.
H Nee inderdaad. Maar uit het niet zijn van een rechthoek mag je wel het niet zijn van een vierkant halen. Over de volgende afleidingsregels hebben we het al gehad.

Opdracht 3

H Een bewijs, kan je dat zelf maken, of moet je dat krijgen?
W7 Volgens mij kan je dat ook zelf maken, want je begint . . . allee je weet wat je moet bewijzen, en je begint van een definitie — van een definitie niet echt — maar van symbolen van een stelling en je begint daar meestal mee en je werkt op basis van waarnemingen die je maakt op een figuur. Ik ben het heel ingewikkeld aan het uitleggen denk ik.
H Neenee.
W7 Je werkt naar het geen waar je het bewijs voor maakt en je doet dat aan de hand van dingen die je uit de tekening kunt halen en als je dan juist werkt kan je wel tot een bewijs komen denk ik.
H Dat je de dingen uit een tekening gaat halen, daar heb ik het moeilijk mee. Is die tekening nodig of niet?
W7 Euhm. . .
H Is die tekening echt nodig om dat bewijs te kunnen maken?
W7 Echt nodig denk ik niet, alhoewel bij meetkunde. . . mmm ik denk van wel. . . mmmmm ik denk van wel omdat je soms een zijde moet gelijkstellen aan. . . of als je een hoogtelijn moet tekenen dan wordt de lijn in twee zijden verdeeld en je geeft die alletwee een naam dan moet je die namen kunnen gebruiken in het bewijs.
H Maar dat zou je ook kunnen beschrijven he, zonder een tekening kan dat ook.
W7 Ja da’s waar.
H Maar wat heb je wel nodig voor een bewijs, waaruit bestaat een bewijs?
W7 Met een stelling waarvan je weet dat ze waar is moet je beginnen en . . .
H En wat gebruik je om dan verder te gaan?
W7 Definities, stellingen. . .
H Eender welke stellingen?
W7 Nee ze moeten kloppen natuurlijk.
H Ze moeten waar zijn.
W7 Ze moeten ook van toepassing zijn.
H Wat bedoel je daar mee?
W7 Je moet geen definities gaan gebruiken van vierkanten en parallellogrammen als je bezig bent met een cosinusregel of zo.
H Inderdaad. Dus je moet ze selecteren he. En is er nog iets anders dat van belang is om een bewijs te maken? Je start bij het begin en dan?
W7 Je moet daar pijlen tussen zetten.
H En wat betekenen die pijlen?
W7 Ik denk dat dat . . . als je een dubbele pijl zet dan betekent het dat die in twee richtingen kan gevolgd worden dus als heel het bewijs uit dubbele pijlen bestaat dan kan je dat ook van onder naar boven lezen bij wijze van spreken.

H En anders?
W7 Dan gaat dat niet bij wijze van spreken.
H Ok dus moet je ook een logica in een bewijs brengen. Die logische regels waarover we het net hadden mag je gebruiken om van de ene bewering op de andere over te gaan. Goed W7.

Opdracht 4

H Kijk eens wat ik bij heb. Lees maar eens dit blad over de middelloodlijnen.
(Ik laat leerling W7 lezen. Wanneer ze klaar is vraag ik haar) Wat denk je ervan? Wat staat daar nu eigenlijk allemaal in?
W7 Daar staat een hele redenering waar je een kenmerk kan uit opstellen. Bijvoorbeeld als je een definitie hebt kan je. . .
H Kom je toe met het schema alleen?
W7 Nee.
H Als je een definitie hebt dan kan je wat. . .
W7 Dan kan je een eigenschap daaruit afleiden en uit die eigenschap een omgekeerde eigenschap.
H Uit die eigenschap een omgekeerde.
W7 Ja aan de hand van die eigenschap een omgekeerde eigenschap.
H Dan zou er een pijltje staan van de eigenschap naar de omgekeerde.
W7 Ja da's ook waar.
H En kan je uit een eigenschap een omgekeerde eigenschap halen.
W7 Neen dat moet met de definitie.
H Ja.
W7 En als je de eigenschap en de omgekeerde eigenschap samenneemt kan je een kenmerk maken en daaruit kan je de constructie afleiden.
H Ja dat zegt het schema. Zou je alle meetkunde die je totnutoe zag kunnen samenvatten in zo'n schema denk je?
W7 Neen volgens mij niet want niet van alles is er een kenmerk, je hebt niet overal een omgekeerde eigenschap van.
H Neen dat bedoel ik niet. Het hoeft niet deze volgorde van pijltjes te zijn. Zou je alle definities en eigenschappen die je geleerd hebt kunnen verbinden door pijltjes in één of andere richting?
W7 Ik denk het wel ja. In wiskunde heeft alles op de een of andere manier met elkaar te maken. Je begint ergens bij en je redeneert verder. . .
H Stel dat je een schema zou hebben van heel de geziene leerstof. Zou dit jou achteraf helpen om zelf bewijzen te maken denk je.
W7 Dat kan wel helpen, ja.
H Stel dat de eigenschap dan ook geformuleerd zou worden in het schema.
W7 Ja dat zou kunnen helpen omdat je dan ziet hoe alles uit elkaar volgt. Je kijkt naar wat je wil bewijzen, en vanwaar je begint en je kijkt naar waar die pijltjes allemaal toegaan en hoe je van het een naar het ander geraakt. Zo kan je zien waar je uitkomt als je iets doet.

Opdracht

H Ik teken een trapezium voor jou en ik schrijf "elk gelijkbenig trapezium heeft gelijke basishoeken". Met een gelijkzijdig trapezium bedoel ik dat de twee opstaande zijden

gelijk zijn.Is dat een ware bewering?
W7 Ik denk van wel.
H Hoe doe je dat, werk je zoals bij het zonnetje met een experiment?
W7 Nee maar als je nu zo een trapezium tekent, neem links en recht twee blokjes langs en je tekent dat zo dan kan je daaruit afleiden dat die hoeken wel gelijk zijn.
H Waarom?
W7 (kijkt naar schets) Je ziet dat op de een of andere manier. Je mag dat niet afleiden uit de schets maar als je dat zou gaan meten en dat is wiskundig correct dan zou dat wel kloppen.
H Zou ik hiermee tevreden zijn?
W7 Nee waarschijnlijk niet.
H En waarom niet? Waarom ben ik niet tevreden met exact tekenen en meten?
W7 Omdat je dan nog niet echt bewezen hebt dat je voor elk trapezium dat hebt.
H Maar zo'n bewijs is dat overbodig, is dat om het wat moeilijker te maken?
W7 Neen een bewijs bewijst dat dat echt wel juist is en . . . als je iets bewijst, dan ga je laten zien hoe je daaraan komt en dan kan je begrijpen hoe je daaraan komt en waarom dat klopt.
H Maar jij doet het niet met een bewijs: je maakt een tekening en zegt: zie je wel, het klopt en je telt met de ruitjes
W7 Ja da's waar. Ik denk dat het moeilijk te bewijzen is. Ik zou dat bewijs niet kunnen maken hoor. Als je jezelf baseert op een gelijkzijdige driehoek. . . ik heb dat bewijs niet moeten leren hoor maar als je jezelf baseert op een gelijkbenige driehoek eigenlijk is een trapezium een gelijkbenige driehoek die afgeknot is. . . Als je het trapezium verlengt, dan krijg je een gelijkbenige driehoek. Dus is het trapezium de gelijkbenige driehoek zonder de hoek van boven.
H Ja dat is een goed argument. Maar zou dat mij nu kunnen overtuigen als bewijs. . .
W7 Ik denk het wel.
H Maar wat ontbreekt er nog? Ik ben akkoord als je mij kan uitleggen dat je door te verlengen een gelijkbenige driehoek krijgt. Want je verlengt de eerst en de tweede opstaande zijde van het trapezium en je snijdt die. Maar waarom zijn die dan even lang?
W7 Ja inderdaad.
H Wat is er dan nog nodig? Hoe kan je argumenteren dat de driehoek gelijkzijdig is?
W7 Ik denk als je daar de middelloodlijn op neemt dat die dan door het top moet gaan. Want dan liggen alle punten van de middelloodlijn even ver van de twee hoekpunten.
H Da's waar. Maar dan moet je aantonen dat het snijpunt op de middelloodlijn ligt, dus even ver van de twee punten. En dat is juist het probleem he. Het leek een heel goed idee maar je zit vast omdat je niet kan uitgaan van de idee dat de driehoek gelijkbenig is. . .

Einde.

C.4.3 Codering en evaluatie van de uitspraken van leerling W7

KD 1a1 Leerling W7 beseft dat een implicatie niet steeds omkeerbar is, maar slaagt er niet steeds in om uit een uitspraak de juiste implicatie te vinden. Ze krijgt een –.

KD 1a2 Leerling W7 weet dat voor een kenmerk de pijlen in de twee richtingen moeten gelden, en dat een definitie een asa is. Ze krijgt een 0.

KD 1b Leerling W7 beseft dat een wiskundige manier van redeneren (door geziene eigenschappen te gebruiken) verschilt van gewoon waarnemen. Ze denkt dat een eigenschap kan waargenomen worden op een drietal goede schetsen. Ze denkt dat je misschien een bewijs moet maken voor een eigenschap op basis van een 'algemene' figuur, een soort basisfiguur. Ze krijgt een 0.

KD 1c Ze zegt dat je voor drie soorten driehoeken een bewijs moet geven, en herformuleert dit als 'uitrekenen dat het klopt'. Uit een definitie kan je volgens haar een eigenschap afleiden. Ze laat zelfs het begrip logica vallen. Je gaat van het een naar het ander en komt zo van gegevens naar te bewijzen. Ze krijgt een 0.

KD 2 (deductie voor bewijs) Gelooft de leerling dat:

Volgens haar kan je een bewijs zelf maken, je begint met wat je moet bewijzen, van een definitie of van symbolen van een stelling en je werkt op basis van waarnemingen die je maakt op een figuur. Bij een meetkundig bewijs heb je een tekening nodig om een hulpconstructie te maken of namen te geven. Leerling W7 gelooft bovendien dat een bewijs verhelderend werkt. Ze krijgt een +.

C.4.4 Uittypen van het interview met leerling W12

H Leerling W12, ik heb hier een aantal zinnen opgeschreven en sommige ervan zijn wiskundige uitspraken en andere niet. Ik zou graag hebben dat je ze bekijkt en zegt welke volgens jou wiskundige uitspraken zijn en welke niet.

W12 Ja.

H Je mag ze één per één lezen en dan mag je zeggen wat je ervan denkt.

W12 "Wie de verwarming..." ik denk dat dit op zich geen wiskundige uitspraak is maar aan de andere kant die 7 procent is natuurlijk wel... je kan dat wiskundig bezien.

H En de volgende?

W12 "De bewoners van de Ligusterlaan konden niet langer..." euhm dat denk ik dat niet wiskundig is.

H Neen, waarom niet?

W12 Ik zie daar toch niet direct iets wiskundigs in staan

H Zie je daar niks anders instaan dat je kent? De Ligusterlaan bijvoorbeeld?

W12 Nee.

H Neen? Harry Potter niet gelezen?

W12 Neen. Wat is dat dan?

H De straat waarin hij woont. En de volgende?

W12 "Een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke zijden". Ja da's wiskundig.

H Waarom?

W12 Met de driehoek en de twee even lange zijden, we hebben geleerd dat dat wiskunde is. "De temperatuur is gemiddeld..." met dat gemiddeld dan... het gemiddelde berekenen is wiskundig, maar ik weet niet of dat op zich wiskundig is.

H Mmm.

W12 "De hekken..."

H Da's weer Harry Potter he, en is dat een wiskundige uitdrukking, een zin die in Harry Potter staat?

W12 Neen.

H En waarom niet?

W12 Ik kan daar niks wiskundigs uit besluiten. "Elke rechthoek is ook een vierkant" da's dan wel een wiskundige denk ik maar het is wel fout.

H Ja is dat iets dat je van elke wiskundige bewering kan zeggen: dat ze juist is of fout?

W12 Neen. Soms is dat overal waar maar soms ook niet.

H Neen, ik bedoel of je van elke wiskundige uitdrukking kan zeggen ofwel fout ofwel juist is?

W12 Ja, ik denk van wel.

H Ja he,of is er nog een derde mogelijkheid?

W12 Neen, daarom zei ik soms en soms niet.

H Is dat in de dagelijkse omgangstaal ook zo dat je kan zeggen van elke uitspraak dat ze waar of onwaar is?

W12 Ja soms en soms niet.

H "Ik voel mij rot".

W12 Dat kan waar zijn en dat kan niet waar zijn.

H Kan je dat bepalen?

W12 Nee je kan daar geen getal opplakken zoals in wiskunde.

H Dus daaar zit ook een verschil met dagelijkse taal: onderwerp is verschillend maar ook is een wiskundige bewering waar of onwaar. Lees maar voor "Amber heeft dyslexie" dat heeft volgens mij niks te maken met wiskunde.

W12 Neen.
W12 "Vandaag schijnt de zon" ook niet denk ik.
H Dat is geen wiskundige uitdrukking. Als je wil nagaan of dat waar is of niet, hoe doe je dat dan?
W12 Gewoon naar buiten stappen en kijken of ze schijnt.
H Inderdaad.
W12 "Samen vormen de hoeken..." dat is dan weer wel wiskundig.
H Ja waarom?
W12 Met die hoeken enzo, en met die driehoek dat is wiskunde volgens mij...
H Kan je van die uitdrukking zeggen of ze waar is of niet?
W12 Ja da's waar want die vormen dan samen 180°en een gestrekte hoek is ook 180°.
H Ja, en hoe weet je dat de hoeken van een driehoek 180°vormen, hoe weet je dat dit waar is?
W12 Omdat we dat zo geleerd hebben vooral, maar als je dat optelt dan klopt dat ook altijd.
H Voor elke driehoek?
W12 Ja.
H Moet dat, als je een bewering doet in wiskunde, moet dat voor alle driehoeken gelden?
W12 Dat moet niet maar dat is wel zo.
H Mmmm. Leg dat eens uit.
W12 Wat bedoel je eigenlijk?
H Je zegt "dat moet niet", waarom zeg je dat het niet moet?
W12 Ja, een driehoek is zowieso 180°, dus je kunt geen driehoek tekenen zonder dat hij 180°is he.
H Dus waarom is dat waar, omdat het waar is voor elke driehoek die je kan tekenen? En wat dan voor driehoeken die je nog moet tekenen, of die je nog gaat tekenen, of niet kan tekenen
W12 Als je ze niet kan tekenen dan wil dat zeggen dat ze ook geen 180°zijn.
H mmm. Gaat deze eigenschap waar zijn voor alle driehoeken die alle kinderen over heel de wereld gaan tekenen?
W12 Mmm (bedoelt ja)
H Geldt dat dan voor een driehoek in het algemeen?
W12 Ja.
H Ok.
W12 "Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie even lange zijden."
H Is dat een wiskundige bewering?
W12 Ja ik denk het wel.
H Ok. Waarom?
W12 Waarom...
H Omdat ze gaat over wiskundige objecten: dat heb je al vaak gezegd he. Is die waar of niet waar?
W12 Die is waar.
H Waar haal je dat?
W12 Met een gelijkzijdige driehoek die heeft even lange zijden.
H Kan je die zin ook met als dan schrijven?
W12 Als een driehoek even lange zijden heeft dan is deze gelijkzijdig.
H Ja, zeg je nu precies hetzelfde dan wat in de zin staat.
W12 Als een gelijkzijdige driehoek...eum ja als een driehoek gelijkzijdig is dan heeft hij drie

	gelijke zijden.
H	Dat is niet hetzelfde zeggen als daarjuist, of wel?
W12	Dat is gewoon omgekeerd.
H	En mag je de volgorde in een wiskundige stelling omkeren? Als het een waar is, blijft dan het omgekeerde ook waar?
W12	Ja ik denk dat wel.
H	Ben je daar zeker van?
W12	Vrij zeker toch. Wij hebben dat altijd zo gezien: als het ene waar is dat dan het andere waar is en andersom ook.
H	Ok ja. . . er staat nog iets boven "elke rechthoek is een vierkant". Kan je dat ook met als dan omschrijven?
W12	Eeuhm ik denk het niet. Eigenlijk als een figuur een vierkant is dan is het ook een rechthoek.
H	Is dat wat er staat?
W12	Als een figuur een rechthoek is, dan is het een vierkant, maar dat is niet juist.
H	Een bewering in wiskunde, mag die fout zijn?
W12	Neen, want dan mag je er niet mee werken.
H	Dan mag je er niet mee werken. Ben je nog nooit in wiskunde een foute bewering tegengekomen, heb je nog nooit een bewijs of zo op bord gezet dat een foute zin was?
W12	Neen ik denk het niet neen.
H	roosNeen. Wel ik zal u vertellen dat het kan. Een bewering kan fout of juist zijn, maar dan mag je er niet stelling boven schrijven.
W12	Neen want dat moet juist zijn.
H	En moet dat juist zijn in één gevalletje?
W12	Nee in het algemeen. Dat moet kloppen voor alle figuren. Voor alle figuren moet dat juist zijn.
H	Je zegt dat de bewering fout is. Waarom is dat zo?
W12	Omdat sommige rechthoeken. . . eigenlijk omdat een vierkant zowiezo een rechthoek is, maar een rechthoek is geen vierkant.
H	Wat je hier zegt, kan je dat ook met als dan formuleren?
W12	eEhm. Als een figuur vierkant is, dan is het ook een rechthoek.
H	Dus als een vierkant dan een rechthoek. En omgekeerd?
W12	Dat kan je ook zeggen maar dat is niet juist want als een rechthoek dan is het een vierkant dat gaat soms juist zijn maar soms ook niet.
H	Kan je daar een tegenvoorbeeld van geven?
W12	Een tegenvoorbeeld?
H	Ja, je zegt dat het fout is dus moet er ergens een voorbeeld bestaan waar de bewering niet klopt.
W12	Dat snap ik niet goed eigenlijk.
H	Nee? Dan laten we dat zo. Je formuleerde 'als een vierkant, dan een rechthoek' en het omgekeerde 'als een rechthoek, dan een vierkant'. Welk van die twee formuleringen komt overeen met het zinnetje 10? Of komt daar geen van de twee mee overeen?
W12	Ja, hier zeggen ze dat elke rechthoek is een vierkant, dus het tweede dat we zegden.
H	Dus die bewering kan je toch met 'als. . . dan' schrijven?
W12	Ja.
H	Zou je alle wiskundige beweringen van deze met 'als. . . dan' schrijfbaar zijn?
W12	Ik denk het wel ja.

H	Die 'als. . . dan': wat drukt dat eigenlijk uit?
W12	Dat als het ene waar is, het andere eruit volgt.
H	Ja. En als het ene fout is, wat kan je daar dan uit afleiden? Gaat het andere daar dan ook uit volgen?
W12	Neen dat kan niet, dan gaat het andere ook fout zijn.
H	Nu zeg je: 'als het ene, dan het andere' en 'als het ene niet geldt, dan het andere niet' is dat wat je beweert?
W12	Ja maar niet altijd waarschijnlijk. Mmmm.
H	Ik ga dat eens in een ander geval zeggen. 'Als het regent, dan pak ik de paraplu' als het niet regent, dan. . .
W12	Dan kan je nog altijd een paraplu nemen, maar dat zal niet nodig zijn. . .
H	Mag ik daar dan uit besluiten dat je dan een paraplu gaat pakken?
W12	Neen dan zou ik besluiten dat je geen paraplu pakt
H	Als het niet regent, dan pak je geen paraplu, dat is jou besluit?
W12	Ja.
H	'Als je aap bent dan eet je graag bananen', wat mag ik dan besluiten als je geen aap bent? Op basis van de eerste zin?
W12	Op basis daarvan zou ik dan zeggen dat je niet graag bananen eet. Maar ja, je kunt toch nog altijd graag bananen eten.
H	Maar besluit je dat er nu uit of niet?
W12	Als ik alleen dat zou lezen,. . .
H	Als je in deze klas zit, dan heb je les van Vera. Als je niet in deze klas zit, kan je dan besluiten dat je geen les van Vera hebt?
W12	Ja, dat kan nog wel buiten de school.
H	En hier in deze school? Zijn er geen leerlingen die les van Vera hebben en niet in deze klas zitten?
W12	Ja.
H	Dus het klopt niet he?
W12	Nee.
H	Uit het een volgt het ander, maar dat betekent niet dat uit de negatie van het een, de negatie van het ander volgt. Wat mag ik daar wel uit besluiten? Dat als je niet graag bananen eet, . . . wat kan ik daar uit besluiten?
W12	Dat je geen aap bent.
H	Ja, dat is wel correct. Als je geen les van Vera hebt, dan kan je niet in deze klas zitten, dat is wel juist. Je kan met wiskundige beweringen redeneren, maar je moet er voorzichtig mee zijn. Dat is de les. Euhm. . . soms maken we voor een wiskundige eigenschap, bijvoorbeeld die van de hoeken in de driehoek dat deze 180°samen zijn, om er zeker van te zijn is het niet voldoende om dit op één voorbeeldje te testen, of wel?
W12	Om daar zeker van te zijn. . . moet dat voor alle gevallen gelden, dus zou je dat voor meerdere voorbeelden moeten nagaan. Of dat klopt. . . dat bewijzen ze dan.
H	Maar dat zijn twee verschillende dingen he: meerdere voorbeelden gebruiken of het bewijzen. Of is dat hetzelfde?
W12	Meerdere voorbeelden gebruiken dan ben je nog niet zeker dat je alles gehad hebt, dus moeten ze dat bewijzen.
H	Ja en wat is een bewijs dan eigenlijk?
W12	Dat is een soort van. . . je vertrekt van. . .
H	Probeer dat eens op te stellen voor de eigenschap die ik daarjuist vernoemde: de som van

de hoeken in een driehoek is 180°.

W12 Mmm dan moet je vertrekken van een driehoek .

H Mmm.

H Maar je tekent nu een driehoek. Ga je op basis van die tekening je besluit trekken? Ga je jou bewijs steunen op de tekening?

W12 Ja, nee ik denk dat dat eigenlijk de einduitkomst is'als. . . dan' maar hoe je dat moet beginnen. . . eum

H Schrijf het zinnetje eens op, 'de hoeken in een driehoek zijn 180°. Waarmee moet je beginnen bij een bewijs, hoe moet je daar aan beginnen?

W12 Bij wat je hebt in het begin.

H En wat heb je in het begin? Kan je dat aflezen uit het zinnetje?

W12 Je hebt al zeker een driehoek.

H Ja, onderstreep eens wat gegeven is.

W12 Onderstreept driehoek.

H Is er nog een gegeven?

W12 Ja, dat ze samen 180°zijn.

H Ja, kan jij dat in 'als. . . dan' formuleren, het zinnetje dat daar staat?

W12 Als de hoeken van een figuur samen 180°zijn, dan is het een driehoek.

H Daar ben je zeker van he? Daarjuist merkten we op dat de enen en de andere richting niet gelijkwaardig zijn he?

W12 Vrij zeker toch.

H Ja schrijf dat daar maar onder. Dus de gegevens zijn : de hoeken van een driehoek en de driehoek. En wat moet je dan bewijzen?

W12 Dat ze samen 180°zijn.

H Hoe gaan we zo een bewijs nu verder maken, of kan je dat zelf niet maken?

W12 Ik weet niet dat je dat zelf kunt maken eigenlijk. Ik heb dat ook nog nooit gedaan.

H Ja. En de leerkracht dan, waar haalt die haar bewijzen, maakt ze die zelf?

W12 Dat is gewoon zo, ik denk niet dat het iets is dat je kan bewijzen, ik denk dat het gewoon zo is.

H Ja. De dingen die in wiskunde beweerd worden, kan je die allemaal bewijzen denk je?

W12 Nee.

H En wat moet je dan doen als je dat toch wil gebruiken?

W12 Steunen op de definitie denk ik.

H Ja da's goed. Nog eentje. Stel dat je hier in het lokaal twee palen hebt staan. De eerste daar aan de transparantmachine, en de tweede daar op de plaats van de borstel. Nu moet je goed nadenken he W12. Ik vraag je nu waar jij zou gaan staan om even ver van de twee palen te gaan staan.

W12 Waar ik zou gaan staan?

H Ik zou ook op de speelplaats een eerste paal kunnen zetten in die hoek ginder en een tweede paal aan de andere kant van de speelplaats of zelfs in het park. Ik zou dan aan jou vragen waar je tussen de twee palen kan gaan staan. Je hebt geen meter.

W12 Dan zou ik dat op mijn gevoel doen en schatten. Hoeveel er tussen de ene en de andere paal zou zijn. Dat zal wel moeilijk zijn.

H Beschrijf eens precies waar je dan zou gaan staan. De afstanden gelijk. Welke afstanden bedoel je dan?

W12 Welja die afstanden van de paal tot mij moet even groot zijn als de afstand van mij tot de tweede paal.

H Kan je daar een tekening van maken?
W12 (tekent twee punten en een kruisje in het midden waar hij wil gaan staan)
H Stel dat je toch iets krijgt van mij, namelijk een koord en paaltjes.
W12 Dan zou ik die in kleine stukjes verdelen en dan kijken hoeveel elk stukje in zo'n afstand gaat en dan zien of dat gelijk is.
H Ja maar als het ene paaltje op de speelplaats staat en het ander in het park, ga jij dan de juiste richting uitgaan?
W12 Neen, dat is een probleem.
H Wat ga je dan doen? Dan ga je meten, en dat is niet correct als je in de foute richting zit he?
W12 Dat is waar.
H Hoe zou je dat nog kunnen doen? Stel dat je een koord hebt van hier tot hier, korter is dan de afstand tussen de twee paaltjes.
W12 Euhm..
H Is dat een realistisch probleem?
W12 Neen want daar heb je andere dingen voor natuurlijk maar...
H Welke andere dingen?
W12 Een echte meter.
H Zo een lange?
W12 Met een toestelletje zal je dat ook kunnen meten maar...
H Maar we hebben dat dus niet: we hebben alleen een koord en paaltjes. En toch is er een manier om dat te doen.
W12 Euhm je vertrekt van hier maar je kan niet zien.
H Waar dat ergens zal komen?
W12 Eerst al je kunt daarop zien dat je recht loopt maar kun je dat ?
H Ja.
W12 En dan tot hier meten en dan...
H Je bent er direct van vertrokken dat het midden het plaatsje is waar je moet gaan staan maar ik denk dat er nog een plaatsje is waar je kan gaan staan.
W12 Je kan ook op... dus je moet in het midden staan.
H Neen je moet even ver van de twee palen staan.
W12 Dan moet je hier gaan staan want dat is het meest logische omdat je dan minder afstand hebt.
H Gewoon dezelfde afstand van de ene paal tot de andere. Waar kan je dan nog gaan staan?
W12 U bedoelt dat je gewoon even veel afstand tussen u en het paaltje moet zijn of...
H Ja tussen u en de twee paaltjes moet evenveel afstand zijn.
W12 Dan zou je ook hier kunnen gaan staan.
H Ja, de ene afstand is wel veel langer dan de andere.
W12 Hier dan.
H Ok is er nog een plek waar je kan gaan staan?
W12 Je kan op oneindig veel plekken gaan staan.
H Ja? Welke plekjes?
W12 Hier.
H Wat is dat voor iets dat je nu tekent?
W12 De middelloodlijn.
H De middelloodlijn; wat is dat voor iets?
W12 Da's een rechte die uw lijnstuk in twee gelijke delen verdeelt. En dat moet ook loodrecht

staan.

H Die middelloodlijn wat heb je daarvan gezien?

W12 Dat die het lijnstuk in twee gelijke delen verdeelt.

H En wat is dat, dat je daar juist noemt: is dat een eigenschap?

W12 Ik denk dat dat de definitie is.

H En is dat de definitie van middelloodlijn?

W12 Neen want daar komt ook nog bij dat die loodrecht staat op het gegeven lijnstuk.

H Dus een middelloodlijn van een lijnstuk is een lijn die er loodrecht op staat en het lijnstuk in twee gelijke delen verdeelt. Is dat de definitie?

W12 Ja.

H Ik zeg nu "een middelloodlijn is. . . " Kan je deze is vervangen door een pijl?

W12 Euhm.

H Als. . . dan of. . .

W12 Ah in 'als. . . dan'-vorm schrijven?

H Ik vraag of je dat door een pijl kan vervangen.

W12 Als een rechte een lijnstuk in twee gelijke delen verdeelt en er loodrecht op staat, dan is ze de middelloodlijn.

H Is dat nu juist hetzelfde zeggen dan zeggen "een middelloodlijn is. . . " Wordt de 'is' vertaalt in één pijl?

W12 Nee.

H Wat is er dan verschillend?

W12 Wacht he. Ik had gezegd als een rechte. . . dat weet ik niet meer.

H Denk eens terug na, we zullen het in 't kort opschrijven. Je doet het heel goed hoor W12, je hebt misschien wel het gevoel dat ik rare vragen stel maar je doet het heel goed hoor. Laat jezelf niet ontmoedigen als ik zit door te vragen, da's gewoon om te zien hoe je precies denkt.

W12 Ja.

H Dus een middelloodlijn is een lijn die loodrecht en door midden (ik schrijf dit op), ik vraag nu of je dit kan vertalen in wat zei je daarjuist? 'Als een lijn loodrecht en door midden, dan middelloodlijn'. Ik zet er zo een pijl tussen. Ik vraag nu: is dat zeggen juist hetzelfde dan dat zeggen?

W12 Hier heb je dat ook. . .

H Ik ga het u vertellen. Een 'is' komt neer op een pijl in twee richtingen, dus een asa. Een eigenschap is vaak maar een pijl in één richting. Heb je dat nog nooit gehoord?

W12 Neen, we leerden wel een eigenschap is dit en. . .

H Dus wiskundige zinnen gaan over wiskundige objecten, zijn waar of onwaar en wat blijkt nog? Gewone woordjes krijgen een betekenis van logische pijltjes. In wiskundige zinnetjes zit een logica verstopt. Had je dat beseft?

W12 Ja. Maar ik ben er nooit zo diep op ingegaan.

H Dus als je een 'is' hebt mag je dat vertalen door de pijlen in de 2 richtingen.

H Is er nog een andere definitie voor middelloodlijn?

W12 Je kan dat omdraaien denk ik 'een rechte die loodrecht op een lijnstuk staat en door het midden gaat is een middelloodlijn' dat is gewoon omgedraaid.

H Ja maar ik bedoel een heel andere, die heel andere voorwaarden geeft?

W12 Nee.

H Kan er maar één definitie zijn voor een wiskundig object of kunnen er meer zijn?

W12 Ik denk dat er maar één is, want als er nog andere zijn allee dat moet allemaal in één zin

komen denk ik.
H Ja. Lees je dit eens.
W12 Luidop?
H Neenee lees het maar stilletjes. Het is bijna gedaan hoor de vuurproef.
W12 Mmmm ja.
H Wat hierop staat in de tekst, is dat hetzelfde dan wat in het schema staat?
W12 Wat bedoelen ze hiermee met die pijlen?
H Wat zou men er kunnen mee bedoelen?
W12 Dat je de definitie nog kan opsplitsen in een eigenschap en een omgekeerde eigenschap dat je dat kan formuleren.
H Eigenlijk niet. Nu weet ik dat jij hiervan de betekenis niet kent. Het schema betekent dat je de definitie nodig hebt om de eigenschap en de omgekeerde eigenschap te kunnen bewijzen. En dat je de eigenschap en haar omgekeerde nodig hebt om het kenmerk te kunnen bewijzen. En dat je het kenmerk nodig hebt om de constructie van middelloodlijn te kunnen hebben. Zegt dat jou iets zo een logisch schema? Vertelt dat jou iets?
W12 Ja want als we dan een middelloodlijn zouden moeten tekenen, bijvoorbeeld dit hier dan gaan we terug op dat hier.
H In feite steunen we op de definitie.
W12 Ja.
H Lees de samenvatting van het kenmerk eens. Is dat hetzelfde dan de definitie?
W12 Neen dat is niet hetzelfde maar dat zal wel op hetzelfde neerkomen.
H Als het echt op hetzelfde neerkomt, zijn die twee dan verbonden door een enkele of dubbele pijl ?
W12 Als het echt op hetzelfde neerkomt met een dubbele pijl.
H Ja inderdaad. Zou je het kenmerk als definitie kunnen nemen? Als het een definitie kunt nemen moet het een dubbele pijl zijn. Is dat zo?
W12 Ik denk het wel.
H Zou je heel de meetkunde allemaal in zo een schema kunnen schrijven waar je de ene eigenschap verbindt met de andere (definitie, stelling Thales, Pythagoras. . .)
W12 Ik denk het wel ja.
H Heb je ooit zo een schema gezien?
W12 Niet echt. We hebben wel de definities en de eigenschappen gezien.
H Maar nooit het verband ertussen.
W12 Nee.
H Ok. Als je zo een schema zou krijgen, van al je voorkennis, verbonden met pijltjes. Zou je dat kunnen helpen om een bewijs te maken denk je?
W12 Ik denk het wel omdat je in een bewijs toch al die verschillende dingen nodig hebt om uiteindelijk tot iets te komen.
Einde.

C.4.5 Codering van de uitspraken van leerling W12 tijdens het interview

KD 1a1 Leerling W12 gelooft niet echt dat een implicatie steeds omkeerbaar is. Hij beweert dit wel ingeval van de definitie van gelijkzijdige driehoek, maar gelooft dit niet ingeval van de uitspraak dat “elke rechthoek een vierkant is”. Toch scoort hij hier geen 0 maar een – omdat hij deze implicatie omkeert omdat ze fout is.

KD 1a2 Hij geeft een omgekeerde als–dan–formulering voor de uitspraak dat een gelijkzijdige driehoek even lange zijden heeft Vrij zeker toch. Wij hebben dat altijd zo gezien: als het ene waar is dat dan het andere waar is en andersom ook. Hij scoort een – omdat hij niet beseft wat het verschil is tussen de definitie van middelloodlijn en een pijl in slechts één richting.

KD 1b Leerling W12 beseft dat een wiskundige bewering niet tegelijk waar en onwaar kan zijn. Hij beweert dat je geen driehoek kan tekenen zonder dat deze een hoekensom van 180°heeft (Hij weet niet dat deze eigenschap equivalent is aan het parallellenpostulaat). Een wiskundige bewering moet kloppen voor alle figuren. Hij scoort hier een 0.

KD 1c Bewijzen is iets wat 'ze' volgens leerling W12 doen om te zien of een uitspraak klopt die je eigenlijk al weet vanuit vele voorbeelden. Om te bewijzen dat de hoekensom in een driehoek 180°is, kan je steunen op de definitie denkt hij. Hij scoort een 0.

KD 2 Leerling W12 weet niet of je een bewijs zelf kan maken, hij heeft het nog nooit gedaan. Hij scoort – –.

C.5 Interviews na de lessenreeks

C.5.1 Beschrijving van de gestelde problemen en een modeloplossing

Probleem 1. Het probleem van het geitje (KD 1a1 en KD 1a2)

Schets van het probleem

Een boer heeft een geitje. Hij wil het laten grazen op een mooi groen weiland, waar geen omheining omheen staat. De volgende problemen kunnen zich stellen:

1. Hoe moet de boer het geitje vastmaken als het een cirkelvormig stuk van de wei mag afeten?
2. Waar mag het geitje staan om even ver van twee boompjes verwijderd te zijn?
3. Welke vorm krijgt het afgegeten weiland als het geitje vastgemaakt wordt zoals op de foto?

   Hoe weet je dat dit geen cirkel kan zijn?
4. Waar moet hij het paaltje kloppen als het geitje niet aan de schors van de drie bomen van de wei mag kunnen eten?

Opmerking. Tijdens het interview staat een maquette van de probleemsituatie op de bank voor de leerling. Hieronder staat een foto van de maquette afgebeeld.

Concrete opdrachten of vragen voor de leerling tijdens het interview

1. Herformuleer de definitie van cirkel met gebruik van een logisch voegwoord. “Een cirkel is een verzameling punten die op dezelfde afstand van een gegeven punt liggen.” Welk stuk van de definitie van cirkel gebruik je dan? Waarom is dit een waarheid? Wanneer is deze uitspraak waar? En wanneer is ze niet waar? Betekent dit hetzelfde als “een punt ligt even ver van het paaltje, dus ligt het op de cirkel”?
2. Kan je de oplossing van deze vraag voorspellen aan de hand van de definitie van cirkel? Welk deel gebruik je dan? Probeer eens een goede definitie te geven voor een ovaal.

3. Hoe vind je het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek? Formuleer de gebruikte eigenschap. Hoe bewijs je een implicatie? Is gebruik van omgeschreven cirkel ook mogelijk? Hoe doe je dat dan?

Modeloplossing voor probleem 1

1. Een punt behoort tot een cirkel met gegeven middelpunt M en straal r asa het punt op een afstand r van het punt M ligt. “Als een punt op een afstand r van een middelpunt (paaltje) ligt, dan behoort het tot de cirkel met middelpunt B” wordt gebruikt. Dit mag omdat een definitie een equivalentie is, en de twee implicaties apart ook gelden. Een implicatie omkeren mag niet steeds. Ze betekent iets anders dan een ‘dus’.

2. Het geitje kan gaan staan op alle punten van de middelloodlijn op het lijnstuk bepaald door de twee bomen.

3. In geval het geitje vastgemaakt is zoals op de foto, zal het geen cirkelvormig stuk gras afeten. De afstand van een punt van de omtrek tot één van de paaltjes hoeft immers niet dezelfde te blijven (contrapositie van “als een cirkel, dan elk punt op dezelfde afstand”). De ring waaraan het geitje vastzit kan over de koord glijden. De totale lengte van de koord kan niet veranderen, maar de afstand van een punt van de omtrek tot één van de palen wel. De som van de afstanden van het punt tot de twee palen is steeds dezelfde. Dit geeft als omtrek voor het afgegeten gras een ellips. Een ellips is dan ook een verzameling punten waarvoor de som van de afstanden tot twee gegeven punten constant is.

4. De positie van het paaltje kan gevonden worden als middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek gevormd door de posities van de bomen. Dit middelpunt wordt gevonden als snijpunt van de drie middelloodlijnen van de bomendriehoek. Het geitje kan dan met zijn snuitje de drie bomen net raken. Indien de boer liever heeft dat het geitje op een veilige afstand van de bomen blijft, dan moet hij zijn paaltje in het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de bomendriehoek plaatsen. Dit middelpunt is snijpunt van de drie bissectrices van de driehoek.

Probleem 2. De omtrekshoek op een middellijn van de cirkel

Schets van het probleem

Ik maak een ruwe schets van een cirkel met middelpunt M en middellijn AC. Op de cirkel kies ik een willekeurig punt B. Ik verbind B met A resp. C. Zo ontstaat in B een hoek. Dan stel ik het probleem:

1. Wat kan je zeggen over een omtrekshoekhoek die op een middellijn van een cirkel staat?

2. Ben je daar zeker van?

Concrete opdrachten of vragen voor de leerling tijdens het interview

1. Vragen bij de formulering van de eigenschap. **KD 1b**

   Wat betekent de ‘een’ in de eerste vraag?

   Vier schetsen van het probleem worden aan de leerling getoond. Hij mag hieruit de schets kiezen die hij de beste vindt. Hij moet zijn keuze verantwoorden.

schets 1: een schets met passer en liniaal, één positie van B.

schets 2: een ruwe schets met twee posities voor B.

schets 3: een ruwe schets met één positie voor B.

schets 4: een exactere schets met twee posities voor B.

Is deze opgave een vraag naar een nieuwe eigenschap of is het eerder een concrete hoekmeting? Gelooft de leerling dat een wiskundige bewering niet tegelijk waar en onwaar kan zijn? Gelooft de leerling dat een stelling waar moet zijn in alle gevallen?

2. Hoe zou je het niet waar zijn van deze eigenschap aantonen? Hoe kan je nagaan of deze uitspraak waar is?

3. Hoe bewijs je deze stelling? Kan de leerling in deze uitspraak het causaal verband ontdekken? **KD 1a1**

4. Wat hebben we in de euclidische meetkunde ter beschikking om vanuit de gegevens het gevraagde af te leiden? **KD 1d**

   Welke definitie(s) gaan we gebruiken? Wat is een axioma of een postulaat?

5. **KD 2** (deductie voor bewijs)

   Wat is de bedoeling van een bewijs? Mag een bewijs in woorden? Mag je waarheden afleiden uit een schets? Waarom niet? Waar moet je ze dan halen? Kan je een bewijs eigenlijk wel zelf opstellen? Hoe ga jij hiervoor tewerk?

   Indien het bewijs niet lukt laat ik de leerling expliciet zoeken in de logische schema's .Weet hij hoe hij deze moet gebruiken? Weet hij daarmee logisch te redeneren?

   Indien de leerling niet op bruikbare eigenschappen voor een bewijs komt, help ik hem hierbij. Hij krijgt een aantal kaartjes waarop de verschillende uitspraken staan die samen het bewijs vormen. De leerling moet dan de kaartjes van de verschillende bewijsstappen in een logische volgorde leggen, en elke stap verklaren. Lukt dit hem? **KD 1c**

Modeloplossing voor probleem 2

1. Formulering van een eigenschap.

   De 'een' wijst erop dat de eigenschap voor alle cirkels, middellijnen en omtrekshoeken moet gelden.

   Schets 2 of 4 is de beste: ze geven verschillende gevallen van de eigenschap weer.

   Deze opgave is een vraag naar een nieuwe eigenschap en geen concrete hoekmeting. Een wiskundige bewering kan niet tegelijk waar en onwaar zijn, en een stelling moet waar zijn in alle gevallen.

2. Een stelling wordt weerlegd door één tegenvoorbeeld.

   Door een bewijs wordt de waarheid van een stelling bevestigd.

   De stelling luidt: "zij een omtrekshoek op een middellijn van een cirkel gegeven, dan is deze een rechte hoek".

Een implicatie wordt bewezen door de waarheid van de oorzaak te veronderstellen en die van het gevolg aan te tonen.

In een wiskundige theorie moeten er beginwaarheden ter beschikking zijn om daaruit nieuwe waarheden af te leiden aan de hand van de afleidingsregels uit KD 1c.

(a) definities : nodige en voldoende voorwaarden waaraan een object moet voldoen
(b) axioma's: algemene logische waarheden voor elke theorie
(c) postulaten : speciale voorschriften voor een bepaalde wetenschapstak

Doel van een bewijs is de lezer te overtuigen van de waarheid.

Een bewijs in woorden is een volwaardig bewijs.

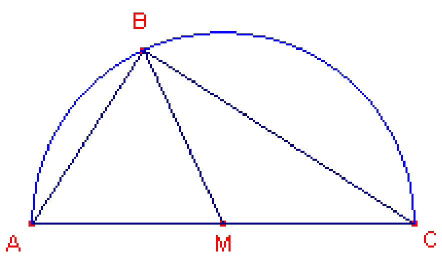
Uit een schets mag je geen waarheden afleiden (Plato). Je kan uit de voorkennis waarheden halen.

Een bewijs kan je zelf opstellen:

(a) je moet eerst de gegevens en het gevraagde filteren uit een expliciete logische formulering van de bewering.
(b) aan de hand van 1. en met behulp van een schets kan je naar een idee zoeken voor het bewijs.
(c) je kan op zoek gaan naar bruikbare eigenschappen voor het bewijs in een logisch schema. In de formulering van deze eigenschappen is het expliciete logisch verband belangrijk.
(d) Je moet de gemaakte beweringen in een logische volgorde zetten door gebruik te maken van de logische afleidingsregels.

Expliciet zoeken in de logische schema's kan helpen om een bewijs op te stellen.

De kaartjes waarop de verschillende uitspraken staan die samen het bewijs vormen, kunnen in een logische volgorde gelegd worden door de afleidingsregels te gebruiken.



In deze figuur is M het midden van het lijnstuk AC. M is het middelpunt van de cirkel met straal MA. Het punt B is een punt van deze cirkel. We zullen nu bewijzen dat hoek B een rechte hoek is.
Omdat $MA = MB$ zijn de hoeken MAB en MBA gelijk.
Omdat $MC = MB$, zijn de hoeken MBC en MCB gelijk.
De som van deze hoeken is gelijk aan 180°. De hoeken MBA en MBC zijn dus samen 90°.
Met andere woorden, hoek B is een rechte hoek. □

C.5.2 Interview van leerling W12 en W11 op 24/3/2011

Over KD 1a1 implicatie
Over KD 1a2 equivalentie
Over KD 1b waarheid en bereik van een steling
Over logische afleidingsregels in een bewijs
Over het zelf opstellen van een bewijs.

Alleen de antwoorden van leerling W11 worden in rekening gebracht.

H Wat vonden jullie van de drie lessen die ik jullie gegeven heb?
W11 Op zich wil interessant om zo tussendoor te krijgen, 't is wel iets anders dan een gewone wiskundeles.
W12 Wel wat raar.
H En waarom?
W11 Omdat je er niet bij stilstaat dat dat op een bepaalde manier geconstrueerd wordt.
H Vond je het makkelijk en triviaal?
W12 Neen, ik vond dat wel moeilijk.
H Jij ook leerling W11?
W11 Ja.
H Maar jullie hebben het toch juist gedaan?
W11 Ja, als u dat uitlegde.
H Was het gevit, of kan het helpen denk je?
W11 Ja dan zie je eens hoe dat opgebouwd is, allee bij dat bewijs dan he. Dat het stapje per stapje is en dat er altijd een reden voor is.
H Had ik dat op een andere manier duidelijker kunnen maken, of vonden jullie het saai of vervelend?
W12 Neen, ik vond dat niet voor mij niet want dat was goed uitgelegd met de powerpoints enzo.
H Wat vonden jullie het leukste van de drie lessen?
W12 Euhm dat we dat zo mochten tekenen en zo met die cirkels.
W11 Die papieren.
W12 Dat bewijs en zo in groep.
W11 Dan leer je diep logisch nadenken.
H Je mag van mij gerust zeggen dat je het stom of prullerig vond he dat met die papieren.
W11 Dat is wel eens iets anders maar ik vond dat wel interessant dat je dat eens doet.
H Als je dat vergelijkt met gewone wiskundelessen, waar zie je dan verschillen?
W11 Euh.
W12 Dat is gewoon pure theorie als je niet echt oefeningen had gemaakt of zo en dat is ook uit het dagelijks leven gegrepen.
H Ga je dat nu gebruiken voor in het vervolg?
W11 Misschien om na te denken : hoe is dat opgebouwd en mag dat wel. . .
H Ik heb een maquette gemaakt van een geitje en twee paaltjes, maar ik ben het vergeten dus zal ik het op foto laten zien maar ik ga het wat vergroten. Voila: dat is een geitje van playmobil, dat een bandje rond de nek heeft met een ringetje eraan. Over dat ringetje glijdt een koordje en dat koordje is vastgemaakt aan twee paaltjes. Stel jullie dat voor dat hier op tafel twee paaltjes staan, daar een geitje dat met een ringetje vastzit aan de koord tussen de twee paaltjes. Het geitje wil gras eten, want het staat op een malse weide

	en mag eten zover het kan reiken. Stel dat het geitje op deze manier vastzit. Welke vorm gaat het beschrijven, heb je daar een idee van?
W12	Als hij zover kan gaan als hij wil?
H	Ik zal het eerst een beetje gemakkelijker maken: stel dat het aan één paaltje is vastgemaakt, met één koord.
W12	Een cirkel.
H	En waarom zeg je dat?
W11	Dan is het enen paaltje het middelpunt en dan is het koordje de straal en dan kan je zover mogelijk en ook daarbinnen.
H	Ja dan kan het geitje mooi binnenin een cirkel bewegen en daar het gras afeten. Hoe weet je dat het een cirkel moet zijn?
W11	Euh ja ge hebt altijd eenzelfde afstand tot één punt en daar kan het dan rond gaan.
H	En wat gebruik je dan eigenlijk?
W11	Eén van de postulaten.
W12	De definitie van cirkel.
W11	Oh ja.
H	En wat is de definitie van cirkel W12?
W12	Zo van: als alle punten tot dezelfde afstand van een punt liggen, dan is da een cirkel.
H	Zegt hij dit goed, W11? 'zo van' is het zo dat we met een definitie beginnen?
W11	Neen.
W12	Alle punten die op een gelijke afstand van een gegeven punt liggen.
H	Zeg dit nu eens in een mooie zin. Stel je voor dat je tegen een kind, een wiskundig genietje moet uitleggen wat een cirkel is.
W12	Alle punten...
H	Hoe begin je? Een cirkel...
W12	Een cirkel is een figuur die gevormd wordt door alle punten die op gelijke afstand liggen van een punt.
H	Ja. Ik heb hier opgeschreven "een cirkel is een verzameling punten die op eenzelfde afstand van een gegeven punt liggen". Ben je het daarmee eens?
W12	Ja.
H	Kan je dat met een 'als... dan' of een 'en of een asa' schrijven, W11?
W11	Als alle punten wacht he... euhm... een figuur is een cirkel asa alle punten van de figuur op dezelfde afstand van een gegeven punt liggen.
H	Akkoord, W12?
W12	Ja.
H	Ik ook. Een definitie is een asa, daar moet je mee opletten he, de 'is' vertaal je in een asa. (Ik leg twee strookjes op tafel met "een cirkel is een verzameling punten die op...", en "een punt behoort tot een cirkel asa alle punten op dezelfde afstand van een gegeven punt liggen".) Wat kan je van deze beweringen zeggen, die ik hier onder elkaar op tafel leg? ... Euh...
H	Denk maar na hoor... W12.
W12	Dat dat alletwee hetzelfde zegt. Maar dat dat begint met het omgekeerde.
H	Ja mag je de ene vervangen door de andere in een bewijs?
W12	Neen dat denk ik niet.
W11	Jawel.

H Waarom wel W11?
W11 We hebben juist gezegd dat dat hetzelfde is.
H Ja. Wat voor beweringen gebruik je in bewijzen? Wat is een voorwaarde om het te mogen gebruiken in een bewijs?
W11 Het moet al bewezen zijn.
H Ja dat het bewezen moet zijn, en wat weet je als het bewezen is?
W11 Dat het waar is.
H Dat het waar is en je mag enkel ware uitspraken gebruiken in een bewijs. Zijn dit hier ware uitspraken? (Ik verwijs naar de twee strookjes op de tafel.)
W11 Ja.
H En je mag die dus door elkaar vervangen. Hebben wij één van deze twee uitspraken gebruikt om te beseffen dat het geitje op een cirkelvorm gaat lopen? Of hebben we daar iets anders van gebruikt?
W11 Ja. Dit is het middelpunt en de koord is altijd dezelfde afstand, en als die geit dan rondloopt dan krijg je een verzameling van punten.
H Ja, maar nu zou ik graag hebben dat je goed naar de 'als…dan', de logische volgorde kijkt en dat je mij zegt wat we van de definitie precies gebruiken, in feite gebruiken we ze niet helemaal. Ik heb gezegd dat het geitje is vastgebonden aan een koord, wat leidt jij daaruit af?
W11 Niet veel anders dan dat dat een koord lang is.
H Maw, wanneer je dat met afstand uitdrukt.
W11 De afstand blijft altijd hetzelfde.
H De afstand blijft altijd hetzelfde. Welk deel van de definitie heb je dan?
W11 Dezelfde afstand.
H Ja. Wijs dat eens aan op het kaartje 2… (W11 wijst naar het tweede deel van de zin) en wat leiden wij daaruit af?
W11 Dat als je wat gaat opschuiven, je allemaal punten hebt op dezelfde afstand en dus ook een cirkel.
H Als…dan hebben we een cirkel. Dus feitelijk gebruiken we maar één van de twee pijlen. Als een punt altijd even ver ligt, dan zit het op een cirkel. Zo hebben we beseft dat we een cirkel moeten hebben.
(Ik toon nu twee nieuwe kaartjes, met de implicaties van de definitie van cirkel op.) Is deze uitspraak waar?
W11 Ja want dat is één van de twee pijlen van de definitie.
H En als een asa waar is, weet je dan dat één van de twee pijlen ook waar is?
W11 Allebei.
H Ja dus ik kan zeggen uit het feit dat de asa geldt, geldt de ene en de andere pijl. Mag ik deze twee uitspraken door elkaar vervangen? Zijn dit gelijkwaardige uitspraken?
W11 Neen.
H Wat denk jij W12?
W12 Ik denk ook van niet.
H En waarom niet?
W11 Bedoel je dat het deel voor de pijl gelijkwaardig is aan het deel achter de pijl?
H Neen, want gelijk waardig betekent een dubbele pijl en er staat maar een enkele. Maar de dubbele pijl van de definitie gaat in de twee richtingen. Zo en zodat geeft deze twee zinnen, die allebei waar zijn. Maar betekenen ze hetzelfde?
W12 Je vertrekt van een andere voorwaarde.

H Dus mogen we ze door elkander vervangen?
W12 Neen.
H Was dat de eerste keer in de lessenreeks dat je hoorde dat dit niet mag?
W11 Dat is nooit echt benadrukt denk ik, maar dat is wel logisch.
H Natuurlijk is dat logisch... maar wat is eigenlijk belangrijk is de is-definitie een goede definitie om mee te werken? Als je ze bijvoorbeeld daarna in een bewijs wil gebruiken? Is dat dan een goede definitie?
W12 Ik zou die andere gebruiken.
H Ja. Beide definities zijn waar, dus je kan ze allebei gebruiken, maar toch gebruik ik liever de definitie met het logisch voegwoord ertussen, de logische connector noemt men dat ook wel eens. Dat moet je goed onthouden he.
Stel dat het geitje tussen de twee palen staat, met een koord die kan glijden over een ring rond zijn nek. Gaat het geitje dan ook een cirkelbeweging maken?
W11 Neen, omdat...
H Waarom niet?
W11 Omdat die afstand altijd anders is. Een cirkel rond één punt of... want rond één punt dat kan dan niet he?
H Nu zijn er twee punten vast. Een koord hangt daartussen, en daarover kan het geitje zijn ringetje glijden. Het geitje mag eraan trekken, en het koordje rekt niet mee.
W11 Dat kan geen cirkel zijn.
H Waarom niet. Hoe weet je dat zo zeker?
W11 Als die bijvoorbeeld in het midden staat, dan kan die verder naar achter gaan, maar als die meer naar de torens staat dan kan die maar een deel naar achter.
H Ja. Kan je dat met behulp van de definitie van cirkel ook kunnen aantonen dat het geen cirkel kan zijn?
W11 Omdat je dan niet één middelpunt hebt, en je hebt niet eenzelfde afstand.
H Ja en welke deel van de cirkeldefinitie gebruik je nu? (Ik doe de definitie van de cirkel met 'is' weg en toon de drie andere kaartjes.) Wat gebruiken we nu eigenlijk van de cirkeldefinitie, de ene pijl, de andere of de dubbele pijl?
W11 Die "als een punt even ver van een gegeven punt ligt, dan ligt het op een cirkel met dat punt als middelpunt".
H Gebruik je dat nu om te zeggen: "het is geen cirkel"? want hier zeg je: "het ligt op geen cirkel".
W11 Ja.
H Ja? Leidt je dat af uit het feit dat het punt niet even ver ligt?
W11 Ja, eigenlijk wel.
H Wat denk jij W12?
W12 Ik denk dat ook.
H Ja? Dus nu zeg je: "als zin p geldt dan geldt zin q" dat zegt dit kaartje he?
W11 Ja.
H En zeg jij dat je hieruit mag besluiten dat "als niet p geldt, dan niet q".
Akkoord?
M,A Ja.
H Ok da's goed. Hoe kan je een 'als dan' bewijzen?
W11 Als de als-voorwaarde voldaan is, dat je dan via iets dat al bewezen is, een andere waarheid kan besluiten dat...
H Ok heel goed. Een ander probleem over het geitje. Hebben jullie ook al het vervolg gezien

van de theorie van de cirkel?

M,A Neen, dat is voor het derde semester.

H Stel dat je drie bomen hebt: hier, hier en hier. De boer heeft deze boompjes pas gepland en het geitje durft hier nogal eens aan knabbelen, en dan kan het sap niet meer doorstromen, dus gaan de boompjes kapot. En dat wil de boer niet, dus wil hij dat we het geitje zo vastmaken met één koord en één paaltje, zodat het niet aan de boompjes kan. De bomen staan niet in een gelijkzijdige driehoek, maar in een willekeurige. Waar zal de boer het paaltje moeten kloppen?

W12 Ergens op een punt waar de afstanden tot de drie punten zover mogelijk is.

H Wijs zo eens een punt aan, W12.

W11 Dat hangt er toch vanaf hoe lang het koordje is…

H Ja maar hij kan de koord zo lang maken als hij wil. Hij kan het koordje zo kort maken…

W11 Maar dan heeft hij niet veel eten.

H Ja maar de vraag is eigenlijk hoe lang moet hij de koord nemen zodat het geitje zoveel mogelijk kan eten? Maar toch niet aan de boompjes geraakt. Hoe moet de cirkel dan lopen?

W12 Ongeveer hier ergens denk ik.

H Hier ergens? Ja, zou je daar ook kunnen toe komen door te redeneren met eigenschappen die je gezien hebt?

A,M Grote stilte…

H Als opdracht voor thuis denk hier eens over na. Hoe kan je dat middelpunt vinden? In het derde trimester krijgen jullie het antwoord.

Wiskundig probleem van de rechte hoek

H Ik ga een vraag stellen. Je moet goed luisteren. Ik maak een schets: een cirkel met een middelpunt M en een punt A ligt daarop. Door A en C van de cirkel trek ik een middellijn en ergens op de cirkel, hier of hier teken ik een punt B. Dan kan ik een driehoek maken: ABC. De hoek ABC: kan je daar van iets beweren? Ik heb een cirkel, een middellijn, ik had ook een andere kunnen nemen, een punt B, ik had ook een ander punt kunnen nemen, en toch beweer ik dat de hoek die zo gevormd wordt, voldoet aan een bepaalde eigenschap. Nu de vraagjes. Die 'een' elke keer, waarop wijst die?

W11 Dat je geen afstanden of eenheden hebt.

H Ja bijvoorbeeld. W12?

W12 Dat dat ook een willekeurig punt is.

H Ja en een willekeurige cirkel en middellijn. Als je daar zo moeten opplakken: voor allemaal, voor enkele, voor een: wat zo je daar dan opplakken?

W12 Getallen. Afmetingen en zo.

H Neen, ik bedoel 'voor allemaal'.
Denk eens na over een eigenschap van die hoek. Waaraan moet die voldoen?

A,M …

H Als je dat wil vinden, wat kan je dan best doen?

W11 Nog zo een punt nemen en driehoeken tekenen. Het ziet er wel een rechte hoek uit maar…

H maar je bent niet zeker. En wat ga je dan doen als je niet zeker bent?

W11 ja…nameten.

W12 Nog zo'n hoeken tekenen en dan kijken of dat klopt.

H (Ik toon de vier schetsen.) Als je zou kiezen tussen deze schetsen, welke zou je dan nemen? Om de stelling te …want wat ik eigenlijk vraag is: "formuleer eens een eigenschap die uitlegt wat er hier aan de hand is". Welke tekening zouden jullie gebruiken om zoiets uit te zoeken? Deze, deze of deze? Jullie hebben al gezegd dat jullie meerdere posities van B wilden checken.

W11 Wat is het verschil tussen de eerste en de derde?

H Ja wat is het verschil?

W11 Euhm. . . ik zie niet echt een verschil.

H De eerste is met een passer getekend en de derde niet. Heeft het belang dat we ze met een passer tekenen?

W11 Ja voor een schets niet denk ik, maar als je het wil bewijzen wel: dan moet dat helemaal juist zijn.

H Leg dat eens wat uit W11.

W11 Als je iets bewijst mag je alleen maar waarheden gebruiken en een schets is nooit waar getekend.

H Maar als je met een passer tekent, is dan een schets waar getekend?

W11 Ja.

H Ik weet niet of jij dat ziet maar de lijn die we met de passer trokken, is enorm dik. . .

W11 Ah zo ja.

H Hoe dik mag die maar zijn: de dikte van één punt. En hoe dik mag een punt zijn?

W11 Je kan dat niet zien eigenlijk.

H Een punt heeft geen afmetingen meer, dus is enorm dun. Dus is schets 1 goed?

W11 Neen.

H Is schets 1 beter dan schets 3?

W11 Neen.

H Zouden jullie nu zelf een eigenschap kunnen formuleren? De hoek is inderdaad steeds 90 graden. Wat ga je in die eigenschap zetten? Vertel het verhaaltje van daarjuist nu eens terug.

W11 als. . . dan

H (Ik lach, en schrijf op als. . . dan. . .) Goed W11, waarom is dat met als. . . dan?

W11 Omdat het ja. . . voor dat te bewijzen heb je die waarheden nodig.

H Ja en een waarheid dat moet je weten in welke logische vorm dat staat. Is dat het belangrijkste dat je van de lessen hebt onthouden? Is dat nieuw? Wist je niet dat je bewijzen moest maken met waarheden?

W11 Jawel maar je staat daar nooit bij stil. Als je er fouten in gaat zetten dan. . .

H Dan kan het nooit een bewijs vormen he. Dat dacht Plato ook. (Ik toon de als. . . dan op papier.) Wat gaat er hier achter de als komen, en wat achter de dan?

W11 Dan. . . is de hoek 90°.

H Ja en over welke hoek heb je het, dat moet je nu achter de 'als' gaan zeggen.

W11 Die gevormd wordt tussen de twee lijnen van het willekeurig punt op de cirkel en de grenspunten van de middellijn.

H Ja inderdaad dat zou een goede formulering zijn euhm. . . Ik had ook aangegeven, als je dat echt wil weten of het waar is, ga je dat dan op drie schetsen controleren of vier of vijf? Of op hoeveel schetsen zou je dat controleren, of zou je dat op een andere manier doen, om echt te weten dat deze uitspraak waar is en altijd waar zal blijven, tot in de eeuwen der eeuwen?

W11 Op een willekeurige schets, met willekeurige punten en driehoek en dat dan kunnen bewijzen, dan weet je dat zeker.

H Ha dus toch niet op een schets maar via een bewijs. Wat is een bewijs dan eigenlijk?

W12 Voor het algemene. Dat voor alles geldt.
H Ja. Als ik nu een cirkel teken met straal 55000km gaat dat daar dan voor gelden?
W12 Ja.
H En voor een cirkel met straal 0.000000000. . . 1 mm gaat dat daar voor gelden?
W12 Ja.
H Dus dat geeft zekerheid? Geeft dat altijd zekerheid, en overal, of is dat enkel binnen het systeem waar wij werken van euclidische meetkunde, heb je daar een idee van?
W12 Ik denk dat dat altijd is.
H Ok is het tijd?
W12 Nog 4 minuten. Zo een bewijs mag dat in woorden?
W11 Ja want dan geeft dat meer de logica weer, de logische redenering.
H Ja. Hebben jullie al veel bewijzen gezien in woorden?
W11 Neen. Dat wordt wel met woorden uitgelegd, zo van dat betekent dit of dat?
H Ja maar echt in woorden die doen jullie niet he? Nochtans in de meetkunde boeken staan ze vaak met woorden. Ik heb hier weer briefjes gemaakt. Aan jullie om dit in de logische volgorde te leggen. Graag heb ik dat jullie luidop redeneren.
W11 Dat staat in het dan-lid, dus gaat dat het resultaat zijn.
H W11 als je gaat zoeken naar een bewijs, wat zoek je dan eigenlijk?
W11 Een manier om een nieuwe waarheid aan te tonen met ander waarheden.
H Ja die andere waarheden, wat is dat: waar kan je uit kiezen?
W11 Ja wat al bewezen is.
H En wat je al geleerd hebt.
W11 Ja.
H En waaruit nog, mag je postulaten en axioma's ook gebruiken? Wat is het verschil tussen axioma's en postulaten? En een definitie?
W11 Axioma's kunnen niet bewezen worden, dat is gewoon zo.
H En postulaten.
W11 Dat weet ik niet.
H Bijvoorbeeld "door 2 punten gaan lijnen": kan je dat bewijzen?
W11 Neen, wat is dan het verschil met een axioma?
einde

C.5.3 Interview met leerling W18 na de lessenreeks

Materiaal:

- Maquette van het geitje.
- Kaartjes met de volgende zinnen erop:
  1. Een cirkel is een verzameling punten op dezelfde afstand van een gegeven punt.
  2. Een punt ligt op een cirkel asa het punt even ver ligt van een gegeven punt.
  3. Als een punt op een cirkel ligt, dan ligt het even ver van een gegeven punt.
  4. Als een punt even ver van een gegeven punt ligt, dan ligt het op een cirkel.
- Papier met vier schetsen van probleem 2:
  1. één punt B, cirkel met passer getekend.

2. twee punten B, met losse hand cirkel getekend.
3. één punt B, cirkel met losse hand getekend.
4. twee punten B, cirkel met passer getekend.

H Hier staat een geitje op een grasland met lekker groen fris gras (ik toon de maquette) en het geitje mag na de winter terug buiten om op het grasland te grazen. De boer zet het geitje vast aan een paaltje door een koordje rond zijn nek te doen en hier klopt hij een paaltje in de grond. Wat voor grasland gaat het geitje kunnen afeten?
W18 Een cirkel.
H Ja en hoe gaat deze cirkel verlopen?
W18 Dat is de straal. (Ze wijst van het paaltje naar het geitje.)
H Hoe weet jij dat het een cirkel gaat worden?
W18 Omdat je een punt hebt, en je gaat rond dat punt op dezelfde afstand dus heb je alle punten op dezelfde afstand van het middelpunt eigenlijk.
H Waar haal je dat ?
W18 Van een eigenschap... euh ja van een eigenschap of zo.
H Of zo?
W18 Een eigenschap of een definitie, ja eerder een definitie denk ik.
H Wat is de definitie van een cirkel?
W18 Alle punten die op dezelfde afstand liggen van een gegeven punt.
H Wat is de definitie van een cirkel? Zeg het eens in een mooie volledige zin.
W18 Dus alle punten die op dezelfde afstand liggen van hetzelfde middelpunt noemen ze... allee we... een cirkel.
H Ja euhm ik heb hier kaartjes bij ... weeral kaartjes... in feite heb je dit hier gezegd (ik toon kaartje 1). Is dat waar?
W18 Ja.
H Een cirkel is een verzameling punten die op dezelfde afstand van een gegeven punt liggen. Nu, om aan te tonen dat het geitje hier een cirkel gaat beschrijven, hoe ga je de definitie dan gebruiken? Begrijp je de vraag?
W18 Neen niet echt.
H Goed. Die definitie kan je die ook anders formuleren, met een als dan of een asa of een ander of, een en.
W18 Ja met als... dan. Euhm als...
H Denk goed na he W18.
W18 Als alle punten op een gelijke afstand liggen van een gegeven punt dan heb je een cirkel.
H Is dat de definitie van cirkel?
W18 Ja.
H Ok. Dus je zegt dat dit (ik toon kaartje 1) hetzelfde is dan dit (ik toon kaartje 4). De is-definitie van een cirkel is hetzelfde als "als een punt... dan heb je een cirkel".
W18 (Denkt na en zegt ja.)
H Als een punt tot een cirkel behoort, dan ligt elk punt even ver van het middelpunt.
W18 Ja dat klopt ook he?
H Dat klopt ook. Wat is het verschil tussen die eerste 'als... dan' en die tweede 'als... dan'?
W18 Ja daar wordt het vergeleken met een middelpunt en dat met een ander punt van de cirkel.
H Ja. Zie jij geen ander verschil? (Ik wacht even.)
Komen dezelfde stukjes zin daarin terug? Ja he?
W18 Mmm (beaamt ja).

H Er zitten twee belangrijke zinsdelen in. Welke zouden dat kunnen zijn denk je?

W18 Euhm "als een punt even ver ligt van een gegeven punt" en "als een punt tot een cirkel behoort".

H Ja. Het ene is "behoren tot een cirkel" en het andere is "even ver liggen van een gegeven middelpunt"?

W18 Ja.

H En dan? Wat is nu het verschil tussen deze twee uitspraken? (Ik toon 1 en 4.)

W18 Ja hier is dat eigenlijk al gezegd dat het een cirkel is, en hier is dat al gezegd dat zo alle punten even ver van eenzelfde punt liggen.

H Ja dat is het he. Hetgeen achter de als staat is het omgekeerde van daar. De twee zinsdeeltjes worden gewisseld he?

W18 Ja.

H Het ene is een als. . . dan en het andere is het omgekeerde. Zo zeggen we dat. Is dat eigenlijk hetzelfde zeggen?

W18 Ja, niet?

H Als het goed weer is, dan gaan we in de zon zitten. Als we in het zonnetje gaan zitten, dan is het goed weer. Is dat hetzelfde zeggen?

W18 Ja neen, want als je in het zonnetje gaat zitten kan het ook regenachtig zijn.

H Voila en je hebt toch goesting om een luchtje te scheppen dus zijn dat geen gelijkwaardige uitspraken he?
Het is niet omdat het ene waar is, dat het andere ook automatisch waar is. Dus we mogen dat niet zomaar omdraaien die pijlen. Hier doen we dat toch, omdat we weten dat we een asa hebben, ja? Nu vraag ik mij af welke van de drie papiertjes (2, 3 of 4) gebruiken we nu om te beweren — en die bewering was juist — dat het geitje op een cirkel beweegt?

W18 Mag die ook? (Ze wijst naar 2.) Een van die twee? (Leerling W18 wijst naar 3 en 4.)

H Ja, maar we weten dat uit een asa elke van de twee beweringen volgt. Als je weet dat een van de beweringen voldoende is, dan moet je die nemen.

W18 Ik zou de deze pakken. (Ze wijst naar bewering 4.)

H En waarom kies je dat?

W18 Euh. Omdat awel ja. Als een punt even ver ligt van een gegeven punt — da's dan eigenlijk uw geitje —

H Ja.

W18 Dan ligt dat eigenlijk op de cirkel, dan gaat die heel de tijd op de cirkel lopen.

H Inderdaad dus je gebruikt maar één deeltje van de definitie. Als we zo'n pijl moeten bewijzen — zo een als. . . dan — hoe moet je dat dan eigenlijk doen?

W18 Ah (ze herinnert het zich uit de lessen) door te zorgen dat als uw één ding waar is, als je een dubbele pijl hebt dan moeten ze allebei. . .

H Neenee, het is geen dubbele pijl. Het is een enkele pijl he. Bijvoorbeeld, als een driehoek rechthoekig is, dan geldt de stelling van Pythagoras, dan is de schuine zijde in het kwadraat gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden. Hoe bewijs je zoiets? Wat wil dat zeggen, bewijzen dat een uitspraak geldt?

W18 Wat dat bewijzen wil zeggen?

H Ja

W18 Ah, euhm door middel van eigenschappen en logisch redeneren — allee logische bewerkingen na elkaar allemaal — alle tonen dat dat dan waar is.

H Tonen dat het waar is, dus je gaat proberen van die uitspraak, die 'als. . . dan' aan te tonen dat die waar is. En hoe doe je dat, van een 'als. . . dan' aantonen dat die waar is?

W18 Ja door te beginnen met uw als en dan te bewerken totdat je bij de dan zit.
H En dat bewerken, hoe doe je dat?
W18 Euhm door logische stappen te doen, dus door onze eigenschappen te gebruiken of zo.
H Nu zeg je twee dingen he, door eigenschappen te gebruiken... en wat is een voorwaarde opdat je die eigenschappen mag gebruiken, wat is een voorwaarde opdat je die zou kunnen gebruiken?
W18 Als uw gegevens van uw eigenschap erin zitten.
H Ja bijvoorbeeld. Mmm. Ja ok ik laat het hierbij.
Zie je het nog zitten W18, vind je de vragen moeilijk?
W18 Een beetje raar.
H Ja ik weet het, maar ik moet het zo wel doen. Als ik gewoon in je hoofd kon kijken en zien hoe je denkt, dan moest ik zo geen rare vragen stellen.
Het geitje was op de maquette eerst anders vastgemaakt, met twee paaltjes en een koord. (Ik maak het geitje op de maquette terug zo vast.) Die koord maak ik vast aan de twee paaltjes, ze kan niet uitrekken, en is een beetje langer dan de afstand tussen de paaltjes. Door de koor doet de boer een ringetje en dat ringetje maakt hij vast aan de nek van het geitje. Dus als het geitje beweegt...
W18 dan kan dat glijden.
H Ja, maar hij kan niet overal naartoe gaan waar hij wil. (Ik toon dat het geitje wordt tegengehouden door de koord.) Wat is de omtrek van het domein dat het geitje kan afeten?
W18 Ja een rechthoek, met een uiterste hoek langs hier, en ...
H Wacht he. Kan je dat zonder te doen, maar door gewoon na te denken. Zou je kunnen weten wat die figuur is? Je denkt aan een rechthoek. Waarom denk je dat?
W18 Ik denk dat wel. Maar je kan hier ook nog achter het paaltje...
H Nu ben je het toch aan het doen he.
W18 Ja.(lacht)
H Kan dat een cirkel zijn?
W18 Nee.
H Waarom niet? Nu neem ik terug de kaartjes over de cirkel en wil ik graag weten aan de hand van welke van deze kaartjes jij zegt dat het geen cirkel kan zijn.
W18 (denkt na)
H Wat wou je zeggen daarnet? Het kan geen cirkel zijn want...
W18 Ik zou denken dat het een ovaal moest zijn dan omdat je daar langer zit dan zo.
H Ja maar dat is omdat je het uitgetest hebt he. Dat je merkt dat het een ovaal moet zijn. En het moet inderdaad een ovaal zijn. Maar kan je niet aan de hand van de definitie — waar ligt ze: hier (ik neem kaartje 1) — en we hadden nog iets he met asa. (ik neem kaartje 2) Zijn deze twee dingen eigenlijk gelijkwaardig?
W18 En nu moet ik zeggen welke dat waar is?
H Neen: is dat gelijkwaardig? Mag je die uitspraken door elkaar vervangen als je een bewijs maakt bijvoorbeeld?
W18 euhm...
H Is dat met andere woorden allebei een definitie voor cirkel?
W18 Ik denk van wel.
H Inderdaad. Welke van die twee is eigenlijk het makkelijkst bruikbaar in een bewijs denk je: die met de 'is' of die met de 'asa'?
W18 Die met de asa. Ja.

H Ok dan mag dit kaartje al weg. En we weten dat de asa neerkomt op pijlen in de twee richtingen. En nu vraag ik u: op welk van deze twee richtingen (3 en 4) baseer jij jezelf om te zeggen dat dat hier geen cirkel kan zijn maar een ellips. Dat het een ellips kan zijn kan je er niet uit afleiden maar dat er geen cirkel kan zijn, dat kan je wel. Dat kon je eigenlijk ook zo weten. Door één van de twee eigenschappen te gebruiken. Welke denk je?
W18 De tweede denk ik (ze verwijst naar 3).
H Leg dat eens uit.
W18 Euh. Als een punt ligt op een cirkel dan ligt het even ver van een gegeven punt...
H Hoe ga je dat nu gebruiken? Als een punt tot de cirkel behoort dan moet het even ver van een gegeven punt liggen.
W18 Ja dus... euhm
H Redeneer eens voor mij W18.
W18 (Herhaalt voor zichzelf: als een punt tot een cirkel behoort dan...) Ja als uw punt van de cirkel ... mmmmm ja ik heb toch niet echt een middelpunt, want je hebt er twee.
H Ja.
W18 Dus die kunnen niet even ver liggen van allebei de middelpunten... dus als je hier een punt hebt dan ligt het nooit even ver van het andere punt.
H Tenzij het op de middelloodlijn zou liggen he, dan ligt het even ver van alletwee. Je wil eigenlijk besluiten dat het geen cirkel kan zijn he?
W18 Ja.
H Dus hoe moet je zinnetje eruit zien? Dat moet eruit zien als: "als... dan is de figuur geen cirkel". Welk van de twee uitspraken (3 en 4 liggen op de tafel) kan je daarvoor dan gebruiken?
W18 Ja je kan ook het eerste ...
H Maar zie je geen probleem, want dat gaat over ... dan is het een cirkel. En ik zeg dat je moet kunnen besluiten: ... dan is het geen cirkel.
W18 ...
H Zie je het niet?
W18 Ja dat gaat niet he want je hebt plaatsen waar het wel kan, aan die kant...
H Ok. Gaat het nog?
W18 Da's raar (lacht).
H Ik heb graag dat je dat zegt.

Probleem 2

H Nu komt een probleem niet met een geitje maar iets anders. Ik neem een blad papier en wil jij een balpen nemen? Ik dacht dat ik er een bijhad maar dat is niet zo...
W18 (geeft balpen)
H Ok ik maak voor jou een schets van een cirkel (ik teken met de losse hand een cirkel op het papier, we kunnen allebei zien) met middelpunt M, hier een punt A en een C. Ik trek hier een lijn door en dat noem je een middellijn zodat ze door het midden gaat en op die lijn ga ik een hoek tekenen. Dat noem je een omtrekshoek omdat het derde punt dat je nodig hebt om deze hoek te maken, op de omtrek van de cirkel ligt. En ik noem dat het punt B. Dus ik kies een cirkel, een middellijn — ik had even goed deze middellijn kunnen nemen en had ook een grotere cirkel kunnen nemen — ik neem een punt — ik had even goed dit punt kunnen nemen — maar ik kies dus een, een, een en ik maak daarmee een hoek op deze manier. Het is over deze hoek dat ik het wil hebben. Wat denk je dat je van deze hoek kan beweren? Kan je daar iets over beweren?

W18 Ik denk dat je zelfs kan zeggen dat het een rechte hoek is.
H Jij denkt dat je dat kan. Ok inderdaad je hebt gelijk. Zeg dat nu eens in een juiste wiskundige formulering. Probeer dat eens in een mooie wiskundige formulering te zeggen.
W18 Hoe dat je kan... allee hoe dat je kunt doen om een rechte hoek te bekomen? Of wat moet ik nu formuleren?
H Wel we hebben eigenlijk een nieuwe eigenschap gevonden. Ik heb een heel verhaal gedaan over wat ik allemaal ging tekenen en we hebben dan gezien, we vermoeden, dat de hoek die je zo krijgt, dat dat een rechte hoek is. Zet dat verhaaltje nu eens in een mooie zin, zodat we het bij in de boeken van Euclides kunnen schrijven als een nieuwe eigenschap.
W18 Dus als je een middellijn...
H Kan je dat ook opschrijven W18? Je mag dat in het kort doen hoor. Die als hoor ik al heel graag.
W18 (schrijft: als de grenspunten van een middellijn van een cirkel verbindt met een punt dat ligt op de omtrek van de cirkel dan bekom je een hoek van 90.) Ok.
H Mag ik eens zien. Lees het eens.
W18 (leest haar zin)
H Inderdaad. Ik zei: een cirkel, een middellijn, een punt B... Wat wil dat eigenlijk zeggen, die een?
W18 Dat je er eigenlijk veel meer kan trekken.
H Ja. Die uitspraak die je hier doet, een implicatie, een als... dan: is die waar? Of niet waar? Of onwaar en waar tegelijkertijd?
W18 ...
H Denk je dat het een wiskundige uitspraak is?
W18 Ja.
H Ik ook want het gaat over wiskunde dus... Een wiskundige uitspraak, kan je daar altijd van zeggen dat die waar of onwaar is?
W18 Volgens mij zijn er ook die onwaar kunnen zijn, maar deze is waar.
H En hoe weet je dat deze waar is?
W18 Omdat je altijd met een werkt, dus dat je het eigenlijk keiveel keer kunt zeggen. En euhm...
H Hoe zou je zelf nagaan of die eigenschap waar is of niet?
W18 Door drie of vier keer te tekenen en een paar keer te proberen.
H Ja. Ik heb dat hier vier keer getekend. (Ik toon de vier schetsen.) Nu moet je mij eens zeggen welke dat jij zou kiezen. Deze zijn met een passer gedaan, en deze met de losse hand.
W18 Schets, of om te bewijzen dat het waar is? Allee ja, mag je op het zicht of moet je echt kunnen bewijzen?
H Kan je via een schets bewijzen dat het waar is?
W18 Neen, want dat is met de losse hand getekend.
H Neenee deze is met een passer getekend.
W18 Ik zou voor schets 4 gaan.
H En waarom?
W18 Omdat die punten hier zowiezo allemaal op dezelfde afstand liggen van het middelpunt en omdat dat een echte cirkel is, terwijl dat bij schets 3 niet zo is.
H Maar ik heb er bij gezet dat het een cirkel is.
W18 Mmmm.
H En waarom kies je schets 4 en niet schets 1, want die is toch ook met een passer getekend?

W18 Omdat je daar bewezen hebt dat het een cirkel mag zijn, en een punt, hier maakt niet uit welk.

H Ok omdat je daar meer punten B hebt. Wat wou ik nog vragen... Om dat te bewijzen, is het nodig dat je tekening helemaal juist is? Schets 2 geeft ook twee posities voor B maar die schets is niet helemaal juist he? Om te bewijzen, heb je dan een schets nodig die helemaal juist is?

W18 ... Nee... ja... nee ... wacht he om te bewijzen. Ja dat (2) is eigenlijk om te zien hoe het is, en dat (4) is om het wiskundig te bewijzen.

H Is 4 om het wiskundig te bewijzen? Als je dat tekent, hoe ga je dan bewijzen dat uw hoek 90... is?

W18 Door euhm Pythagoras of zo... Wacht he, je hebt niks gegeven of zo?

H Ik weet het niet.

W18 (Bekijkt formulering van haar stelling.) Dus moet ik nu bewijzen dat dat is. Wacht he. Mag ik daar op tekenen?

H Jaja. Absoluut.

W18 (Ze maakt de schets met de hand en tekent twee punten B.)

H Ik heb niet echt gezegd dat je het moest gaan bewijzen he.

W18 Ah je moet het niet bewijzen?

H Ik vroeg alleen: hoe zou jij het bewijzen?

W18 Door hier een assenstelsel, zo met M als middelpunt, dan weet je dat dees 1 is en dees -1.

H Ja met coördinaten en zo. Maar zo werk je niet in euclidische meetkunde. Vraag maandag maar aan mevrouw Mues wat het verschil is tussen euclidische meetkunde en de meetkunde die jullie doen met assenstelsels. Ga je dat doen?

W18 Ja.

H Euhm we zitten hier met een uitspraak, die jij gedaan hebt en vermoeden wel dat ze waar is aan de hand van de tekening die we hebben gemaakt maar hoe maken we dat nu hard? Hoe weten we nu dat het waar is voor alle mogelijke cirkels die we gaan tekenen, en niet voor twee of drie gevalletjes? Hoe kunnen we dat doen? Of is het voldoende van drie exacte tekeningen te maken en daarop te meten? Is dat voldoende?

W18 Ja uiteindelijk maakt dat niet uit want per cirkel... bij een cirkel is dat altijd of die nu groot is of klein... de straal die is wacht he... euhm awel ja als de cirkel groot is of klein, het is die afstand die is in verhouding met de cirkel dus dat maakt niet uit.

H Dat maakt niet uit hoeveel tekeningen je maakt bedoel je?

W18 Ja want...

H Maar ik bedoel per positie van B bijvoorbeeld.

W18 Ah.

H Maakt dat uit op hoeveel tekeningen je dat nagaat? Of is het voldoende op één tekening, om dat na te meteen: het is 90°. Gaat dat ons overtuigen van de waarheid van deze zin?

W18 Ik zou dat precies... zo precies is dat toch genoeg om dat met één cirkel te doen. Maar ja je kan altijd nog een kleinere proberen.

H Een bewijs, wat was dat weer?

W18 Logische opeenvolgingen uit het vorige en dan met eigenschappen werken enzo.

H En waarvoor dient dat zo'n bewijs? Is dat eigenlijk zinvol?

W18 Dat is dat je niet alles meteen aanneemt, dat je ook weet vanwaar dat komt.

H Is het nodig om een bewijs te geven voor deze eigenschap? Daarjuist beweerden we dat als we het mooi tekenen en dat op één hoek nameten, dan zijn we overtuigd. Waarvoor is dat bewijs dan nog nodig? Of is het niet nuttig?

W18 Misschien als je dat zo verder nodig hebt voor als je iets moet berekenen uit de cirkel dat je dan via het bewijs kunt. . . dat je dat om kunt draaien of zo een beetje.

H Ja dat je het daarvoor kan gebruiken. Ik heb hier een bewijsje gemaakt. De zinnen staan op groene stroken en je moet ze in de juiste volgorde zetten. Is het belangrijk dat ze in de juiste logische volgorde staan?

W18 Ja het moet volgen uit het vorige dus. . . Ah het is volgens die. . .

H Ja het is met dezelfde letters dan op de schets. Je mag gerust luidop lezen en denken. Want het is dat denken dat me interesseert, niet het eindresultaat. Dat interesseert mij helemaal niet.

W18 Dus je begint met het gegeven. (Leerling W18 legt kaartje met gegeven op.) Gegeven is (Ze kijkt naar haar formulering van de eigenschap.)

H Duid eens aan met potlood wat allemaal gegeven is.

W18 (Onderlijnd 'grenspunten van de middellijn', 'het punt', 'omtrek van middelpunt') ja dus eigenlijk is heel dat eerste stuk toch gegeven?

H Welk eerste stuk bedoel je?

W18 Zo voor de als.

H Achter de als en voor de dan.

W18 Ah ja (lacht).

H Inderdaad da's allemaal gegeven. Heel goed. En wat is er te bewijzen?

W18 Dat uwen hoek 90°is.

H Ja.

W18 Moet ik dat nu met die kaartjes leggen?

H Heel graag.

W18 Dus gegeven is. . . dat is ook één van die kaartjes.

H Een of meerdere.

W18 (legt kaartje van te bewijzen) Te bewijzen is dat het een rechte hoek is. En het midden is. . .

H Kan je zo een bewijs zelf maken, of moet je dat in een boek leren?

W18 Je kan dat zelf maken want daar zijn verschillende versies. . . Allee je kan toch elk bewijs nog op een andere manier oplossen?

H mmm. Nu staat dat hier allemaal in woorden, maar moet dat niet in symbolen?

W18 Dat maakt niet uit.

H Waarom niet? Wat verkies jij, woorden of symbolen?

W18 Ikke symbolen omdat het overzichtelijker is.

H Ja, euhm. Wat zal het allemaal liggen, wat zijn die groene papiertjes?

W18 Eigenschappen.

H Of. . . wat kan je nog gebruiken in een bewijs?

W18 Postulaten of zoiets.

H Goed, en wat nog?

W18 euhm. . . kenmerken en definities.

H Heel goed. En iets met een a.

W18 Axioma's.

H Heel goed W18. Heb je dat van mij geleerd of wist je dat al?

W18 Ik wist alles al buiten de postulaten.

H Ok. Wat ga ik nu vragen? Wat is het verschil tussen een axioma en een postulaat W18?

W18 Axioma's moet je gewoon waarnemen — zeg je dat —? En postulaten dat moet je nog bewijzen, allee kan je bewijzen.

H Ja?

W18 Ja.

H Welke postulaten hadden wij aangenomen, weet je dat nog?

W18 Dat van een punt en een lijnstuk geloof ik.

H Wat hebben de dingen die je kan gebruiken in een bewijs gemeenschappelijk?

W18 Uw gegeven zeker?

H Zijn ze waar of onwaar?

W18 Waar.

H Mag je ook dingen die niet waar zijn gebruiken in een bewijs?

W18 Euh ja. Ja om te bewijzen dat het niet waar is.

H Wat vond je van de lessenreeks: leuk of niet? Hielp het jou of wat kan ik beter doen?

W18 Ik vond dat raar allee het is zo iets helemaal anders bij onze gewone les. Er wordt voor gezorgd dat je niet allemaal aanneemt wat er gezegd werd maar en ook waarom niet, klopt dat.

H Vond je het leuker, moeilijker, interessanter, stommer. . . wat vond je ervan?

W18 Ik vind andere lessen een beetje leuker omdat het zo. . . ja daar mag je gewoon je oefeningen maken omdat je dat al weet en nu was het zo van “waarom denk je dat” en “waarom”.

H En dat vind je niet fijn?

W18 Jawel maar je denkt daar zo niet bij na en nu moesten we daar nog allemaal redeneringen achter vinden.

H En vind je dat niet fijn, waarom denk je dat voor jou later het nuttigst gaat zijn, dat je al je oefeningen kan, of dat je leert nadenken?

W18 Ik denk dat als je al je oefeningen kunt maken, dat je dan toch onbewust ook die redeneringen maakt.

H Wat vond je het leukste of raarste van de lessen?

W18 Euh ja dat was helemaal anders en ik vond het wel interessant om te zien hoe je van alles bekomt door. . . je denkt daar niet allemaal bij na want toen je die driehoek moest tekenen in de Harlekijn dan denk je er niet over na. . .

H Daar denken alleen abnormale mensen over na (lacht).

W18 Ja. . . nee maar ik weet niet.

H Wat is wiskunde volgens jou?

W18 Problemen oplossen en van alles bewijzen.

H De problemen die jullie in “van basis tot limiet” tegenkomen, zijn dat realistische problemen, ga je die tegenkomen in de realiteit?

W18 De problemen die wij in de les?

H Die uit het handboek, die je zo graag en vrij makkelijk kan oplossen.

W18 Ja maar anders. De vraagstukken enzo wel. De meetkundige niet letterlijk, maar als je een gebouw of zo moet maken dan denk ik dat dat ook wel allemaal met die dingen word gedaan.

H Doe je graag wiskunde?

W18 Ja omdat je dan zelf van alles mag doen en denken in plaats van Latijn, dat is altijd hetzelfde. . .

Einde.

C.5.4 Codering van de antwoorden op de gestelde problemen tijdens de afgenomen interviews

KD 1a1: implicatie

Leerling W11 beseft dat het geitje in een cirkel beweegt doordat het zich steeds op dezelfde afstand van het paaltje bevindt. Hij denkt eerst dat hij hiervoor een postulaat gebruikt, maar bij het zien van de definitie weet hij wel dat hij van het gegeven van “dezelfde afstand tot een vast punt” vertrekt, en hieruit besluit tot een cirkelvorm. Hij gelooft niet dat een pijl en zijn omgekeerde pijl evenwaardig zijn. Wanneer het geitje aan twee paaltjes is vastgemaakt zoals beschreven in de opgave, ziet leerling W11 in dat het geitje geen cirkelbeweging kan maken doordat de afstand tot één paaltje niet steeds dezelfde hoeft te zijn. Hij gelooft dat uit “als p dan q” hij mag afleiden dat “als niet p dan niet q” (in plaats van contrapositie). Hij ziet wel in dat achter ‘als’ de gegevens van een bewering staan, en achter ‘dan’ het te bewijzen. Hij geeft een goede ‘als…dan’-beschrijving van het tweede probleem.

Op basis van de vooropgestelde waardebepaling in 12.3 krijgt leerling W11 voor KD 1a1 een + +.

Contrapositie werd niet behandeld in de les.

Leerling W18 beseft wel dat je een cirkel krijgt wanneer je op een vaste afstand ronde een vast punt blijft, maar ziet niet in hoe ze hiervoor de definitie van cirkel gebruikt. Ze ziet de logische ‘als…dan’-structuur niet vanzelf in wanneer ik haar kaartje 3 en 4 toon. Na wat hulp beseft ze dat achter ‘als’ de gegevens staan, en achter dan het te bewijzen. Ze weet hoe ze een als…dan moet aantonen — in theorie. Ze denkt dat een pijl mag omgekeerd worden, tot ik een tegenvoorbeeld over de zon en regen geef. Dat het geitje aan twee palen gebonden geen cirkelbeweging kan maken, ziet ze in door het geitje te verplaatsen (empirisch dus). Ze geeft de juiste vorm aan van de definitie die ze hiervoor gebruikt, maar beseft niet dat ze met de negatie werkt. Ze kan het verhaal van probleem 2 in een mooie en correcte ‘als…dan’-zin omzetten.

Ze krijgt een +. Ze zegt wel dat een implicatie steeds omkeerbaar is maar ik denk dat ze dit bedoelt in het geval van de definitie. Bij het concrete voorbeeld ziet ze het wel dadelijk in.

KD1a 2. Kent de leerling de juiste betekenis van een equivalentie?

Leerling W11 vindt de juiste formulering van de definitie van cirkel met asa. Hij beseft dat de ‘als…dan’-formulering van leerling W12 fout is. Equivalente uitspraken mogen we volgens hem door elkaar vervangen worden in een bewijs. Hij beseft dat uit de waarheid van een equivalentie de waarheid van de twee implicaties volgt. Met het kaartje 2 voor zich, kan hij aanduiden in welke richting hij de definitie van cirkel voor het eerste geitjesprobleem gebruikt.

Hij krijgt een + +. (Naar het bewijzen van een equivalentie werd niet echt gevraagd.)

Leerling W18 vindt de juiste ‘is-formulering’ en de juiste ‘asa-fomulering’ van de definitie van cirkel. Toch blijkt ze te geloven dat kaartje 1 en 4 gelijkwaardig zijn. Een pijl in een richting volstaat volgens haar om een equivalentie te krijgen… Om de bewering aan te duiden die ze gebruikt voor de cirkelbeweging van het geitje vast te stellen, weet ze niet of ze de asa’ of een van de enkele pijlen te kiezen. Wanneer ik haar zeg dat ze niet meer moet kiezen dan nodig, maakt ze de juiste keuze.

Ze krijgt –.

KD 1b. Gelooft de leerling dat een wiskundige bewering niet tegelijk waar en onwaar kan zijn?

Op de schetsen vind leerling W11 dat de hoek er 90°uitziet, maar hij is niet zeker. Om zeker te zijn, wil hij nameten, Voor een bewijs mag je volgens hem alleen een schets gebruiken die met de passer is getekend, omdat hij dan waar is. Nadat het probleem als stelling is geformuleerd, moet je volgens leerling W11 om hééél zeker te zijn, op een willekeurige (hij bedoelt algemene) schets werken en bewijzen. Bewijzen is volgens hem voor het algemene, dat voor alles geldt. Het geeft volgens hem volledige zekerheid, ook buiten het systeem van euclidische meetkunde (kent hij niet).

Hij krijgt een +.

Leerling W18 beseft dat de door haar geformuleerde stelling voor veel meer gevallen geldt dan wat we al tekenden. Ze beseft dat deze uitspraak waar of onwaar kan zijn. Deze waarheid zou ze nagaan door drie of vier keer te tekenen en te proberen. Uit een schets die je met de losse hand maakte kan je volgens haar niet afleden dat een stelling waar is. Schets 4 zou ze gebruiken om de stelling wiskundig te bewijzen. Het echte bewijs zou ze geven door de gegevens en Pythagoras (of andere gekende stellingen) te gebruiken. Overtuigd van de waarheid van de zin is ze zelf door één tekening, omdat ze denkt dat het niet uitmaakt of je met een grote of kleine cirkel werkt (over de positie van B spreekt ze niet, noch over de positie van de middellijn). Een bewijs is volgens haar zinvol om te weten waar alles vandaan komt. Het kan ook helpen bij de berekeningen later.

Ze krijgt een 0.

KD 1c. een bewijs en logische afleidingsregels

Leerling W11 beseft dat een bewijs opstellen diep logisch nadenken vergt. In bewijzen gebruik je volgens hem beweringen die al bewezen zijn, waardoor je weet dat ze waar zijn. Een 'is-definitie' is minder bruikbaar dan een 'asa-definitie' in een bewijs. Een bewijs in woorden geeft volgens hem meer de logische redenering weer dan symbolen.

Hij krijgt + +.

Op mijn expliciete vraag naar wat een bewijs is, antwoordt leerling W18 dat het tonen van waarheid is, door middel van eigenschappen en redeneren. Ze begrijpt dat in een bewijs logische stappen mogen gebeuren, door geziene eigenschappen, postulaten of axioma's of definities te gebruiken. Ook de gegevens moeten gebruikt worden, en je moet naar hetgeen achter de 'dan' staat toegaan. Ze beseft dat een 'asa-definitie' bruikbaarder is in een bewijs dan een 'is-definitie'. Je weet volgens haar dat de geformuleerde implicatie waar is doordat je 'een' gebruikt in de formulering, wat waarheid garandeert voor keiveel gevallen (fout). Echt bewijzen verschilt volgens haar van 'op het zicht' nagaan. Voor een echt bewijs moet je een nauwkeurige (met passer getekende) schets gebruiken. Bewijzen moet je door te vertrekken van het gegeven en dan... te berekenen: Pythagoras, assenstelsel, voor grote en kleine straal. Een bewijs is zinvol doordat het je leert waar alles vandaan komt en het wordt bruikbaar in 'andere' berekeningen. Ze krijgt een 0.

KD 2

Leerling W11 vond uit de lessenreeks vooral het opstellen van het bewijs interessant. Hij ziet nu beter hoe zo een bewijs stap per stap is opgebouwd. Om een stelling te kunnen formuleren moet je volgens hem verschillende tekeningen maken, want een schets kan onnauwkeurig zijn. In een bewijs mag je alleen maar waarheden gebruiken en een schets is nooit waar. Een bewijs in woorden geeft beter de logische redenering weer van het bewijs. Ook gelooft leerling W11 dat wat in het dan-lid van de uitspraak staat, te bewijzen is. Een waarheid aantonen gebeurt volgens hem met andere waarheden die al bewezen zijn. Hij scoort + +.

Leerling W18 gelooft dat je eerst op een schets moet zien hoe iets is, en het daarna bewijzen. Je gaat de uitspraak over de rechte hoek bewijzen door Pythagoras of door een gegeven te gebruiken. Of door een assenstelsel te plaatsen en te rekenen. Een bewijs dient om te weten vanwaar een uitspraak komt. Een bewijs is een logische opeenvolging van het vorige en dan met eigenschapen werken. Je moet beginnen met het gegeven en naar het te bewijzen gaan. Het gegeven staat achter de als en het te bewijzen staat achter de dan. Woorden of symbolen maken niet uit, maar zij verkiest symbolen. Tijdens de lessenreeks moeten er allemaal redeneringen gevonden worden en mag niet zomaar iets aangenomen worden. Zij scoort een 0.

Literatuur

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics.* Buckingham, England: Open University Press.

Boaler, J. (2009). *The elephant in the classroom. helping children learn and love maths.* Londen: Souvenir Press.

Chassapis, D. (2007). Integrating the philosophy of mathematics in teacher training courses. In A. J. Bishop, K. François & J. P. Van Bendegem (red.), *Mathematics education library: Philosophical dimensions in mathematics education* (Dl. 42, pp. 61–79). New York: Springer Science+Business Media.

Crowley, M. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. M. Lindquist & A. Shulte (red.), *Learning and teaching geometry, k12. 1987 yearbook.* (pp. 1–16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

de Moor, E. (2001, dec). Het kistje van Van Albada. *de Nieuwe Wiskrant*, *21*(2), 32.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (2006). Mathematical thinking and learning. In W. Damon, R. M. Lerner, K. A. Renninger & I. E. Sigel (red.), *Handbook of child psychology, vol. 4: Child psychology in practice* (6e ed., hfdst. 4). Hoboken, NJ: Wiley.

Dossey, J. D., Mullis, I. V., Lindquist, M. M. & Chambers, D. L. (1988). *The mathematics report card: Are we measuring up?* Princeton, N.J.: National Assessment of Educational Progress, Educational Testing Service.

Dreyfus, T. & Hadas, N. (1987). Euclid may stay and even be taught. In M. M. Lindquist & A. Shulte (red.), *Learning and teaching geometry, k12. 1987 yearbook.* (pp. 47–58). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. design research on the understanding of the concept of parameter.* Academisch proefschrift, Universiteit Utrecht. Beschikbaar op `www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation`

Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1931). *Ubungensammlung zu einer geometrischen propädeuse.* Den Haag: Martinus Nijhoff.

François, K. (2007). The untouchable and frightening status of mathematics. In A. J. Bishop, K. François & J. P. Van Bendegem (red.), *Mathematics education library: Philosophical dimensions in mathematics education* (Dl. 42, pp. 13–39). New York: Springer Science+Business Media.

Ginsburg, H. P., Klein, A. & Starkey, P. (1997). The development of childrens mathematical thinking: connecting research with practice. In W. Damon, K. A. Renninger & I. E. Sigel (red.), *Handbook of child psychology, vol. 4: Child psychology in practice* (5e ed., hfdst. 7). New York: Wiley.

Hardy, G. H. (1940). *A mathematician's apology.* Cambridge: University Press.

Hiele-Geldof, D. van. (1957). *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het v.h.m.o.* Purmerend, Nederland: Muusses.

Janssen, B. (z. j.). *Crop circle reconstructions - winterbourne bassett, england 1997.* Beschikbaar op `http://www.bertjanssen.nl/cropcircles/croprec03wb.html`

Kemme, S. (2006). *De übungensammlung van Tatiana Ehrenfest - Afanassjewa: inspiratiebron of relikwie?* uiteenzetting op het 12de symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs te Utrecht, 20 mei 2006.

Leder, G. C. & Forgasz, H. J. (2003). Measuring mathematical beliefs and their impact on the learning of mathematics: A new approach. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (red.), *Mathematics education library: Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (Dl. 31, hfdst. 6). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Leder, G. C. & Forgasz, H. J. (2006). Affect and mathematics education. In A. Gutirrez & P. Boero (red.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past present and future* (pp. 403–428). Rotterdam, Nederland: Sense Publishers.

Lester, F. K. J. (2003). Implications of research on students' beliefs for classroom practice. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (red.), *Mathematics education library: Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (Dl. 31, hfdst. 20). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Lockhart, P. (2002). *A mathematician's lament.* Posted in Devlin's Angle on MAA online. Beschikbaar op `http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf`

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (hfdst. 23). New York: MacMillan.

Meskens, A. (2007). *Geschiedenis van de wiskunde.* kursustekst U.A.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nederpelt, R. P. (1984). Over de taal van de wiskunde. *Toegepaste Taalwetenschap in Artikelen*, *19*, 31-39.

Pólya, G. (1945). *How to solve it, a new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press.

Prediger, S. (2007). Philosophical reflections in mathematics classrooms. In A. J. Bishop, K. François & J. P. Van Bendegem (red.), *Mathematics education library: Philosophical dimensions in mathematics education* (Dl. 42, pp. 43–58). New York: Springer Science+Business Media.

Robitaille, D. & Garden, R. (red.). (1989). *The IEA study of mathematics II: Context and outcomes of school mathematics.* Oxford: Pergamon Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic press.

Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Stillwell, J. (2005). *The four pillars of geometry.* New York: Springer Science+Business Media.

Van Albada, P. (1958). An introductory course of geometry. In H. Freudenthal (red.), *Report on methods of initiation into geometry.* Groningen, Nederland: Wolters.

Van den Broek, R. (2006-2007). *Psychopedagogische competentie.* kursus GPB, CVO Mechelen.

van Hiele, P. & van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary school. In H. Freudenthal (red.), *Report on methods of initiation into geometry.* Groningen, Nederland: Wolters.

Van Leemput, G., Roelens, M., Schatteman, A. & Gyssels, F. (1991, nov). Onder de loep genomen. *Uitwiskeling*, *8*(1).

Visser, A. & Van Eyck, J. (2005). *Inzien en bewijzen.* Amsterdam University Press.