Universiteit Antwerpen

Faculteit Wetenschappen

Departement Fysica

Power flow metingen aan de hand van stroboscopische digitale holografie

Auteur: Keustermans William

Promotor: Prof. Dr. J. Dirckx

Copromotor: Daniël De Greef

Proefschrift ter verkrijging van de graad van Master in de Fysica

Academiejaar 2014 - 2015

Dankwoord

Duffel, Antwerpen, mei 2015

Een avontuur van een kleine twee jaar loopt ten einde met een gevoel van opluchting en voldoening, maar toch ook spijt. Alles tezamen was dit namelijk een ongelooflijk leerrijke en aangename ervaring, een perfect einde van een academische verhaal dat vijf jaar eerder startte. Dit had natuurlijk nooit gekund zonder de hulp van een aantal personen. Bij deze maak ik dan ook met alle plezier van de gelegenheid gebruik om die mensen te bedanken.

Als eerste professor Joris Dirkx, naar mijn mening één van de meest goedlachse academici op het departement fysica. Het onderwerp van deze thesis is me door hem aangereikt en daar ben ik in reflectie zeer blij om. Ook de handige tips te gepasten tijde werden ten zeerste geapprecieerd.

De volgende persoon is doctoraatstudent Daniël De Greef. Na mijn bachelorproef mocht ik ook nu weer mijn beide handen kussen dat hij mijn copromotor was. Altijd kon ik bij hem terecht en stond hij me met raad en daad bij wanneer er weer ergens een kronkel zorgde dat ik de oplossing niet meer zag. Dat we veel interesses delen (sommige duidelijk met nog meer wetenschappers (*)) en allebei al eens graag lachen, zorgde er alleen maar voor dat de deur tussen lokalen U.323 en U.324 het merendeel van de tijd openstond. Merci Daniël!

Ook Joris, Sam, Pieter en de andere leden van Bimef wil ik bedanken voor de aangename sfeer die er altijd aanwezig was tijdens de pauzes.

Mechanicus Fred Wiese en elektronicus William Deblauwe verdienen hier ook een woordje van dank. Met elk probleem kon ik bij hen terecht en hielpen ze me maar al te graag verder. In een experimenteel kader is het dan ook onmogelijk werken zonder zulke handige mensen.

De afgelopen vijf jaar zijn in een hoog tempo voorbij gevlogen en daarmee ook de vele lessen. Mijn naaste medestudenten wil ik danken, zij stonden immers altijd klaar voor een woordje uitleg, een goede mop of een scherpe maar o zo zalige opmerking.

Mijn ouders die me al heel mijn leven steunen en de kans geven om me zorgeloos bezig te houden met datgene wat me interesseert. Zij betekenen heel veel voor mij en ook zij verdienen een welgemeende merci.

Als laatste wil ik nog mijn allergrootste dank uitdrukken aan iemand die gigantisch veel voor mij betekend heeft en dit altijd zal blijven doen, mijn oma. Je had me gezegd dat je dit moment nog graag had meegemaakt, maar dat heeft niet mogen zijn. Toch ben ik zeer blij dat ik je heb mogen kennen en ik zal je nooit vergeten.

Bedankt.

(*) Coffee roasting acoustics, Preston S. Wilson, J. Acoust. Soc. Am. 135, EL265 (2014); http://dx.doi.org/10.1121/1.4874355

Abstract

Situering

Het onderwerp van deze thesis situeert zich in de biomedische fysica. De onderzoeksgroep BIMEF aan de Universiteit Antwerpen tracht antwoorden te vinden op fundamentele vragen inzake het gehoororgaan. Een belangrijk onderdeel hiervan is het trommelvlies. Bij rechtstreeks contact van lucht met de vloeistof in het slakkenhuis zou het overgrote deel van de akoestische energie gereflecteerd worden. In het zo efficiënt mogelijk overbrengen van de geluidsenergie speelt het trommelvlies een cruciale rol. Deze zet het geluid om in de mechanische beweging van de gehoorbeentjes, hetgeen verrassend goed verloopt. Ondanks dit belang bestaat er echter nog geen volledig beeld over de relatie tussen de anatomische karakteristieken en de transmissie eigenschappen van het trommelvlies. Hoe deze akoestische energie nu precies over het trommelvlies vloeit, zou hierover mogelijk extra informatie kunnen leveren.

Een veelgebruikte techniek die zich hier uitermate toe zou lenen, is de zogenaamde power flow techniek. Deze wordt door ingenieurs toegepast om schade te lokaliseren en stromingsmappen van vibrationele energie te bepalen. Wanneer dit kan vertaald worden naar het onderzoek op een trommelvlies, zou dit resulteren in unieke informatie over de stroming van de energie. Deze informatie is zeer waardevol in het gebied van de middenoor chirurgie. Bij sommige patiënten moet een prothese de volledige functie van de gehoorbeentjes overnemen. De prothese wordt in dit geval rechtstreeks aan het trommelvlies bevestigd. Door deze informatie kan mogelijk de ontwikkeling van de vorm en nadien de bevestiging efficiënter gebeuren. Ook chirurgische reconstructie en bio-printing kunnen hier baat bij hebben.

Doel en methode

De opzet van de thesis is om fundamenteel na te gaan of het inderdaad wel mogelijk is deze informatie te bekomen. Hiervoor is gekozen voor een object met eenvoudige vorm en materiaaleigenschappen. Er is gebruik gemaakt van stroboscopische digitale holografie, een vrij recente maar goed gekende optische techniek. Digitale holografie (i.e. interferometrie) laat toe om vervormingen van een object te meten tot fracties van een micrometer. De stroboscopische opstelling geeft als voordeel dat dit ook kan toegepast worden op niet statische vervormingen, waardoor ook een trillend object kan onderzocht worden. Hiervoor bestaan nog andere technieken, maar deze geven niet hetzelfde contrast bij hogere orde franjes. Waardoor ze dus minder geschikt zijn.

Resultaten

Een algoritme is opgesteld om power flow metingen uit te voeren en is getest aan de hand van data afkomstig van eindige elementen modellen. De resultaten toonde aan dat het algoritme in staat is uit deze data de power flow te bepalen, alsook de aanwezige bron(nen) en sink(s) te identificeren. Vervolgens werd aan de data ruis toegevoegd in een eerste poging om een afschatting te bepalen van de benodigde signaal-ruis verhouding. Een opstelling is gebouwd die toeliet de power flow metingen ook daadwerkelijk op een object uit te voeren. Uit de resultaten kan besloten worden dat voor het beschouwde object het inderdaad mogelijk was de power flow en locatie van een bron/sink te bepalen. Het beoogde doel is hiermee bereikt. De resultaten toonde ook aan dat het algoritme in de toekomst zeker nog verder kan verbeterd worden, waardoor het mogelijk robuuster wordt tegen aanwezige ruis. Als laatste werd aan de opstelling ook een meting gedaan waarbij gekeken werd tot welke orde van uitwijking power flow metingen mogelijk zijn. Op deze manier kon de informatie tezamen met die afkomstig van de eindige elementen modellen een meer realistische schatting opleveren van de benodigde signaal-ruis verhouding.

Summary

Objective and method

The eardrum and the hearing ossicles located at the middle ear play a crucial role in the hearing chain. Sound as a periodic variation of pressure in air is converted into the variation of pressure in a fluid located at the cochlea. In this way high acoustic reflections are avoided. This conversion happens surprisingly well, with a relative flat respons in the acoustic frequency domain. Despite all of this, there isn't a clear view on the relation between the anatomical characteristics and the transmission properties of the human eardrum. The exact behavior of this acoustical energy on the surface of the eardrum may lead to some valuable information.

A commonly used technique by engineers for identifying energy sinks and sources and mapping the energy flow between them in a vibrating structure, is the so called power flow technique. By translating this technique into the context of biomedical physics this could lead to unique information in the research of the eadrum. In the long run this would also contribute to a more comprehensive theory of the functional form as well as the mechanics.

This information is valuable in the area of middle ear surgery. Some patients need a total ossicular reconstruction prosthesis, where the prosthesis is direclty connected to the eardrum. New information can lead to a more efficient design and also a better fixation at the eardrum. Research areas such as surgical reconstruction and bio-printing would also benifit of this. Last but not least, at a more fundamental level this could lead to a better insight in the differences in structure of the eardrum between different species.

In this dissertation the feasibility of the technique has been tested within a biomedical orientation, using principles that are quite new, but are already well known: stroboscopic digital holography. By using an object with simple shape and material properties, this has led to a basic understanding of the potential of this technique. In this way, the first step in the application of it in the research of the eardrum has been made.

Results

To test the algorithm, a finite element model of a circular membrane is constructed with different configurations of sources and sinks. Besides some unwrapping problems caused by the finite element program itself, energy sources and sinks are clearly visible as well as the flow stream. In a next step noise is added in a first attempt to get a coarse outline of the limit in wich it is possible to deduce clear and comprehensible information. Finally in chapter eight the results of the measurements on the real object are presented. It was possible to map the energy flow and determine the location of a source/sink on a vibrating membrane. Also at the experimental setup an approximation is determined of the lower limit of the required signal to noise ratio. This is a factor ten larger than that found at the finite element model. It gives a more realistic result because at the model only an approximation of the noise present during the measurements could be used. It is also found that in the situation when no filter is applied, the signal to noise ratio had to be two orders bigger to get the same amount of information. This isn't that surprising because of the higher order spatial derivatives present in the definition of power flow.

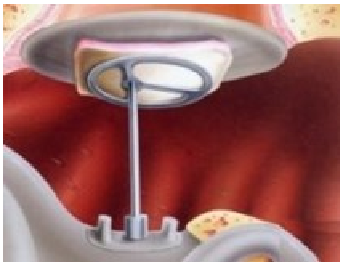
Conclusion

Overall it can be concluded that the main goal of this dissertation is achieved: building a setup and creating an algorithm such that power flow measurements can be conducted on a simple object by means of stroboscopic digital holography. In the future this algorithm could certainly be improved, and in this way made less susceptible to the noise present in the measurements.

Inhoudsopgave

1. Inleiding

Het middenoor, bestaande uit het trommelvlies en de gehoorbeentjes, heeft een belangrijke functie als impedantietransformator. Hier wordt geluid als een periodieke variatie van luchtdruk omgezet in een periodieke variatie van druk in een vloeistof dat zich bevindt in de cochlea. Bij rechtstreeks contact van lucht met deze vloeistof zou het overgrote deel van de akoestische energie gereflecteerd worden. In het zo efficiënt mogelijk overbrengen van de energie speelt het trommelvlies een cruciale rol. Deze zet het geluid om in de mechanische beweging van de gehoorbeentjes. Deze omzetting verloopt verrassend goed, met een relatief vlakke respons in het akoestisch frequentiegebied. Ondanks dit belang bestaat er echter nog geen volledig beeld over het verband tussen de anatomische karakteristieken en de transmissie eigenschappen van het trommelvlies, kort gezegd: de functionele vorm. Hoe deze akoestische energie nu precies over het trommelvlies vloeit, zou hierover mogelijk extra informatie kunnen leveren. Een veelgebruikte techniek, die zich hier uitermate toe zou lenen, is de zogenaamde power flow techniek. Deze wordt door ingenieurs toegepast om schade te lokaliseren en stromingsmappen van vibrationele energie te bepalen. Wanneer dit kan vertaald worden naar het onderzoek op een trommelvlies, zou dit resulteren in unieke informatie over de stroming van de energie. Hierdoor kan zo de functionele vorm alsook de mechanica van het trommelvlies beter begrepen worden.



Figuur 1: Foto links: 1 buiten-, 2 midden-, 3 binnenoor; 4 gehoorzenuw (bron: www.tonelly.nl). Foto rechts: voorbeeld van een totale oscillair vervangingsprothese met bovenaan het trommelvlies en onderaan het ovale venster. (bron: www.knocare.nl).

Deze informatie is zeer waardevol in het gebied van de middenoor chirurgie. Bij sommige patiënten moet een prothese de volledige functie van de gehoorbeentjes overnemen. De prothese wordt in dit geval rechtstreeks aan het trommelvlies bevestigd. Door deze informatie kan mogelijk de ontwikkeling van de vorm en nadien de bevestiging efficiënter gebeuren. Ook chirurgische reconstructie en bio-printing kunnen hier baat bij hebben. Als laatste zou dit mogelijk ook meer inzicht kunnen leveren over het verschil in vorm van het trommelvlies bij diverse soorten.

De opzet van de thesis is om fundamenteel na te gaan of het inderdaad wel mogelijk is deze informatie te bekomen en hierbij gebruik te maken van de technieken die in het onderzoek van het trommelvlies al voor handen zijn. Holografie en in uitbreiding stroboscopische holografie leunen zich hier perfect toe aan. Aan de hand van een object met eenvoudige vorm en materiaaleigenschappen is de haalbaarheid getest. Hierdoor is getracht de eerste stap te zetten om de techniek toe te passen in een nieuw kader.

De thesis is opgebouwd uit twee delen: deel één vormt met hoofdstukken 2, 3, 4 en 5 de theoretische achtergrond. De basisconcepten van de interactie van licht worden kort opgefrist in hoofdstuk twee, waarna in hoofdstuk drie de digitale holografie wordt besproken alsook de interferometrische technieken die hierop gebaseerd zijn. Hoofdstuk vier, en met name de Kirchhoff-Love plate theory vormt de verbinding tussen drie en vijf. Hier worden de door de stroboscopische holografie gemeten grootheden in verband gebracht met de power flow. Als laatste wordt in hoofdstuk vijf de theoretische achtergrond van power flow uiteengezet.

Het tweede deel handelt over de bijdrage van deze thesis: de concrete praktische implementatie.

In hoofdstuk zes wordt de opstelling weergegeven en de componenten waaruit deze is opgebouwd. Vervolgens is in hoofdstuk zeven het opgestelde algoritme en het eindige elementen model om dit algoritme te testen, besproken. Hoofdstuk acht geeft de resultaten weer afkomstig van de metingen aan de opstelling en in hoofdstuk negen worden een conclusie en enkele opmerkingen geformuleerd. Als laatste zijn in hoofdstuk tien verscheidene overwegingen meegegeven waar mogelijk toekomstig onderzoek op complexere objecten (zoals het trommelvlies) rekening mee kan houden.

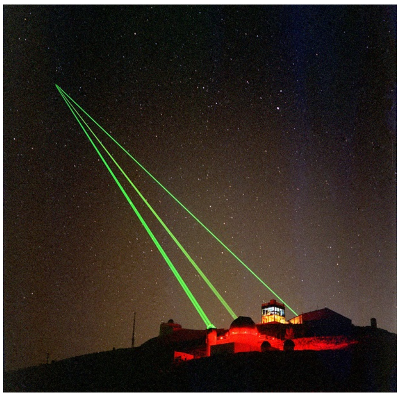
DEEL I

THEORETISCHE ACHTERGROND

2. Licht

2.1 Gewoon licht versus laserlicht

Licht is een transversale elektromagnetische golf die gekarakteriseerd wordt door een tijdsafhankelijk elektrisch en magnetisch veld die loodrecht op elkaar staan en op de voortplantingsrichting. In vacuüm plant licht zich voort met een snelheid van ongeveer 3.10^8 ms^{-1}. Licht heeft ook een polarisatie- of trillingsrichting loodrecht op deze voortplantingsrichting. Deze kan horizontaal, verticaal of een combinatie van beide zijn. Wanneer deze trilling plaats vindt in één vlak spreekt men ook wel van planair gepolariseerd licht. Een lichtgolf heeft hiernaast ook nog een frequentie, fase en ampltitude. Deze laatste bepaalt de lichtststerkte. De meeste bronnen in het alledaagse leven zenden geen licht uit met één frequentie, maar met verschillende frequenties binnen een bepaald spectrum, bv. de zon. Bronnen die wel licht met één enkele frequentie uitzenden, worden monochromatisch genoemd en een voorbeeld van zo een bron is een laser. Een laser is een lichtbron die een coherente bundel (zie sectie 2.3) voortbrengt waardoor bepaalde optische verschijnselen zoals interferentie (zie sectie 2.2) kunnen optreden, dewelke met alledaagse bronnen niet mogelijk zijn.

Figuur 2: Foto links: Spoorwegstation Chicago Union Station, 1943. De lichtbron is hier de zon, zodanig dat de lichtgolven niet coherent en divergent zijn. Foto rechts: drie laserstralen richten op hetzelfde punt, Starfire Optical Range, Kirtland Air Force Base, New Mexico. Deze lasers zijn duidelijk zeer goede coherente bronnen. (bronnen: wikipedia)

2.2 Interferentie van licht

Een eerste belangrijke basisingrediënt voor holografie is het interferentie effect. Dit effect vindt plaats wanneer twee coherente lichtgolven gesuperponeerd worden. Onderstaand worden zeer kort twee situaties beschouwd ter opfrissing, voor meer informatie over de uitwerking wordt de lezer verwezen naar [1]. Er is aangenomen dat de lichtgolven afkomstig zijn van dezelfde bron en een verschillende voortplantingsrichting en fase hebben.

2.2.1 Twee lichtgolven met dezelfde frequentie

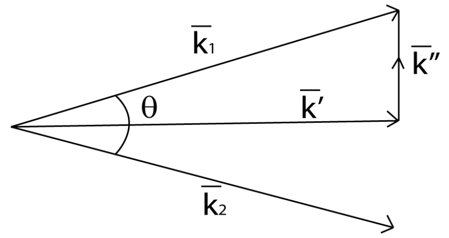
Men kan een laserstraal opdelen door gebruik te maken van een beamsplitter. Wanneer deze bundels hierna terug samen komen, zullen deze met elkaar interfereren. Het licht van een laser is per definitie monochromatisch. Deze interferentie kan dus theoretisch beschreven worden als de superpositie van twee lichtgolven met gelijke frequentie. Men beschouwt twee golven met gelijke amplitude E_0 en frequentie ω, maar verschillende golfvectoren ($\vec{k_1}$,$\vec{k_2}$) en fase (ϕ_1,ϕ_2). Men heeft:

$$E_1(\vec{r},t) = E_0 \exp\left[i(\vec{k_1}.\vec{r} - \omega t + \phi_1)\right]$$
$$E_2(\vec{r},t) = E_0 \exp\left[i(\vec{k_2}.\vec{r} - \omega t + \phi_2)\right]$$

De superpositie is van de vorm:

$$(E_1 + E_2) = E_0 \left[\exp\left[i(\vec{k_1}.\vec{r} - \omega t + \phi_1)\right] + \exp\left[i(\vec{k_2}.\vec{r} - \omega t + \phi_2)\right]\right] \tag{1}$$

De verdere uitwerking baseert zich op de definitie van een gemiddelde golfvector $\vec{k'}$, halve verschilvector $\vec{k''}$ en op analoge wijze ϕ en $\Delta\phi$.



Figuur 3: De interfererende lichtbundels hebben verschillende golfvectoren $\vec{k_1}$ en $\vec{k_2}$. $\vec{k''}$ is gedefinieerd als de gemiddelde golfvector en $\vec{k'}$ als de halve verschilvector.

Hierdoor bekomt men na toepassing van de formule van Euler:

$$(E_1 + E_2)(\vec{r}, t) = E_0 \exp\left[i(\vec{k'}.\vec{r} - \omega t + \phi)\right] 2\cos\left(\vec{k''}.\vec{r} + \Delta\phi\right)$$

Wanneer deze twee lichtgolven interfereren geven deze aanleiding tot een interferentiepatroon waarvan de intensiteit gegeven wordt door:

$$I(r,t) = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^*$$
$$I(r) = 4E_0^2 \cos^2\left(\vec{k''}.\vec{r} + \Delta\phi\right)$$

Waar in de laatste regel de tijd niet meer voorkomt en de intensiteit dus tijdsonafhankelijk is. De positie r komt nog wel voor in de uitdrukking, namelijk als argument van de periodieke cosinus. Afwisselend zullen er plaatsen van maximale en minimale intensiteit voorkomen. Immers, de cosinus is nul als het argument een oneven veelvoud van $\frac{\pi}{2}$ is en één wanneer het een even veelvoud van $\frac{\pi}{2}$ is. In het eerste geval spreekt men van destructieve interferentie (donkere franjes) en in het tweede van constructieve interferentie (lichte franjes).

In de volgende sectie wordt de interferentie van twee lichtgolven met een verschillende frequentie beschouwt.

2.2.2 Twee lichtgolven met verschillende frequenties

Naast een verschil in fase en voortplantingsrichting, is nu ook $\omega_1 \neq \omega_2$.

$$E_1(\vec{r}, t) = E_0 \exp\left[i(\vec{k_1}.\vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)\right]$$
$$E_2(\vec{r}, t) = E_0 \exp\left[i(\vec{k_2}.\vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)\right]$$

Door een uitwerking zeer analoog aan voorgaande sectie bekomt men:

$$(E_1 + E_2) = 2E_0 \exp\left[i(\vec{k'}.\vec{r} - \omega t + \phi)\right] cos(\vec{k''}.\vec{r} - \Delta\omega t + \Delta\phi)$$

Bij interferentie geeft dit een patroon met intensiteit:

$$I(r,t) = 4E_0^2 \cos^2 (\vec{k''}.\vec{r} - \Delta\omega t + \Delta\phi)$$

Hier vertoont de intensiteit wel een tijdsafhankelijkheid, bepaald door de grootte van het verschil tussen de twee frequenties. Deze intensiteit oscilleert nu met een frequentie gelijk aan $2\Delta\nu = \frac{2\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\pi}$, genaamd beat frequentie. Deze is vaak veel lager dan de frequentie van het beschouwde licht zelf. Hierdoor kan dit wel elektronisch geregistreerd worden, waarvan bijvoorbeeld bij laser Doppler vibrometrie handig gebruik gemaakt wordt.

Als laatste nog een opmerking. Er kan namelijk aangetoond worden dat het contrast van het interferentiepatroon optimaal is wanneer de amplitude van de twee interfererende golven gelijk zijn. Wanneer men één laserstraal opdeelt in twee bundels en nadien laat interfereren, is het altijd goed om dit in het achterhoofd te houden. Voor meer informatie wordt de lezer verwezen naar [1].

Zoals in het begin van sectie (2.2) vermeld staat, is interferentie een effect dat optreedt tussen twee coherente lichtgolven. Tot nu toe is enkel het effect zelf besproken, laten we daarom even kort ingaan op dit begrip.

2.3 Temporale en spatiale coherentie

Coherentie van licht is een zeer belangrijk begrip wanneer men spreekt over interferentie en men onderscheidt spatiale en temporale coherentie. Hier wordt eerder een intuïtieve uitleg gegeven, voor een volledig wiskundige analyse wordt verwezen naar [1]. Allereerst spatiale coherentie, wat slaat op de correlatie tussen verschillende delen van een golffront. Oorzaken van verminderde coherentie zijn bijvoorbeeld deeltjes in de lucht waarop delen van de laserbundel botsen en zo een andere weglente afleggen: het golffront vervormd. Men kan eenvoudig inzien dat het interferentiepatroon hierdoor minder duidelijk zal zijn, of iets exacter: een verminderd contrast zal hebben. Een mogelijke oplossing is het toevoegen van een spatiaalfilter aan de opstelling. Hierdoor gaat een deel van de energie verloren aangezien een deel van de laserbundel wordt tegengehouden. De orde van deze effecten is klein ten op zichten van de effecten in het temporale geval en de afstelling van zo'n spatiaalfilter kan nogal tijdrovend zijn, waardoor niet altijd geopteerd wordt om hier aandacht aan te besteden. Met temporale coherentie doelt men op de correlatie van een golf met zichzelf op verschillende tijdstippen [1]. In het ideale geval is de gebruikte laser perfect monochromatisch, die op elk moment in de tijd licht uitzendt met dezelfde golflengte. Wanneer men een laserstraal opdeelt in twee bundels en daarna deze laat interfereren zouden in het ideale geval ook beide bundels precies dezelfde weglengte hebben afgelegd. In werkelijkheid is dit vrijwel nooit haalbaar. Een golffront interfereert met een golffront dat op een ander tijdstip is uitgezonden. Doordat de laser niet perfect monochromatisch is, heeft dit golffront een frequentie dat iets verschillend is van het andere. Hierdoor is de aanname in de afleiding van het interferentiepatroon niet meer geheel geldig, immers er werd uitgegaan van interferentie van licht met dezelfde frequentie. Effecten van verminderde coherentie zijn daling van het contrast van het interferentiepatroon en bij grotere verschillen zal het interferentiepatroon een tijdsafhankelijkheid beginnen te vertonen. Om dit te voorkomen moet ten allen tijde gestreefd worden naar een quasi gelijke weglengte voor beide bundels.

2.4 Diffractie van licht

In de vorige secties is duidelijk geworden dat een coherente bron noodzakelijk is om een interferentiepatroon te bekomen, en dat we twee typen van coherentie onderscheiden. Ook is het zo dat twee lichtgolven met verschillende frequenties of amplituden ook aanleiding geven tot een interferentiepatroon, maar daar vaak moeilijker informatie uit te deduceren is. In deze sectie wordt het tweede ingrediënt noodzakelijk voor holografie besproken, namelijk diffractie of buiging van licht.

2.4.1 Scalaire diffractie theorie

De algemene vorm voor de golfvergelijking van licht dat zich in vacuüm voortplant, wordt gegeven door:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

Hier is $\vec{E}$ de elektrische veldsterkte, c de lichtsnelheid in vacuüm en ∇^2 de Laplace operator. Deze vectoriële beschrijving van de elektromagnetische velden is echter niet nodig wanneer aangenomen wordt dat het licht planair gepolariseerd is, wat bij een laser het geval is. Voor een planair gepolariseerde golf die zich voortplant in de z-richting definieert men de scalaire golfvergelijking als:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Met de (complexe) harmonische golf als de meeste bekende oplossing:

$$E(z,t) = \frac{E_0}{2}\exp\left(i(kz - \omega t + \phi\right) \tag{3}$$

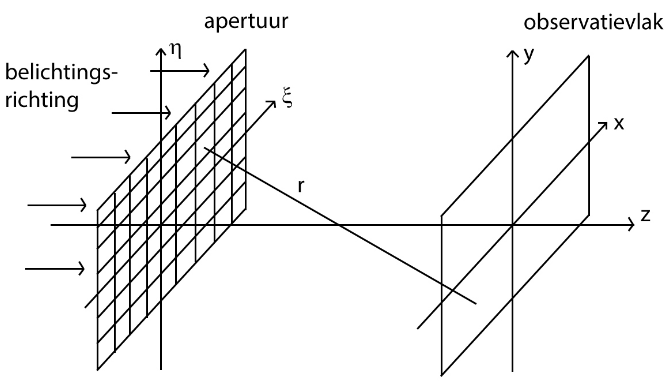
Zo'n lichtveld wordt in holografie gecodeerd opgeslagen en wordt nadien gereconstrueerd door diffractie. In volgende sectie is deze diffractie mathematisch beschreven, waarna een benadering die bekend staat als de Fresnel benadering wordt doorgevoerd.

2.4.2 Fresnel-Kirchhoff diffractie

Beschouw een eindig (gelijk aan nul buiten bepaald gebied) diffractiepatroon in het vlak (ξ,η,0). De interesse gaat nu uit naar het gediffracteerde lichtveld in het (ξ,η,z)-vlak parallel met het diffractiepatroon. De belichting gebeurt in de positieve z-richting. De Fresnel-Kirchhoff difractie formule wordt gegeven door:

$$E(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,\eta)\frac{\exp(ikr)}{r}\cos(\theta)d\xi d\eta \tag{4}$$

Hier is $U(\xi,\eta)$ de complexe veldamplitude in het (ξ,η)-vlak en $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}$. Deze complexe veldamplitude hangt zowel af van van de invallende golf als het diffractiepatroon.



Figuur 4: Opstelling bij de Fresnel-Kirchoff diffractie. De belichting gebeurt in de positieve z-richting. De gediffracteerde bundel propageert verder naar het observatievlak.

2.4.3 Fresnel benadering

We starten van uitdrukking (4), waar nu $cos(\theta)$ vervangen is door $\frac{z}{r}$:

$$E(x,y,z) = \frac{z}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,\eta)\frac{\exp(ikr)}{r^2}d\xi d\eta \tag{5}$$

Wanneer de afstand z tussen het apertuur en het (ξ, η, z)-vlak groot is ten opzichte van de dimensies van het apertuur, kan een paraxiale benadering doorgevoerd worden. Hiervoor dient men r eerst om te schrijven:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \\ &= z\sqrt{(\frac{\xi - x}{z})^2 + (\frac{\eta - y}{z})^2 + 1} \\ &\approx z[\frac{1}{2}(\frac{\xi - x}{z})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\eta - y}{z})^2 + 1] \end{aligned} \tag{6}$$

Waar in de laatste stap gebruik gemaakt is van de expansie van de vierkantswortel in zijn Taylor reeks. De noemer in (5) kan nu vervangen worden door z. Dit is niet het geval voor de r in de exponent omdat dit tot een te grote fout zou leiden. Deze moet benaderd worden door geheel uitdrukking (6).

$$E(x,y,z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,\eta)\exp\left[\frac{ik}{2z}[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]\right] d\xi d\eta$$

$$= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,\eta)\exp\left[\frac{ik}{2z}[(\xi^2 + \eta^2) + (x^2 + y^2) - 2(x\xi + y\eta)]\right] d\xi d\eta$$

$$= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right]\int\int U(\xi,\eta)\exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right]\exp\left[\frac{-ik}{z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta$$

Vervolgens wordt de substitutie $\nu : \frac{x}{z\lambda}$ en $\mu : \frac{y}{z\lambda}$ doorgevoerd:

$$E(\nu,\mu,z) =$$

$$\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp\left[i\pi z\lambda(\nu^2 + \mu^2)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,\eta)\exp\left[\frac{i\pi}{z\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\right]\exp\left[-2i\pi(\nu\xi + \mu\eta)\right] d\xi d\eta$$

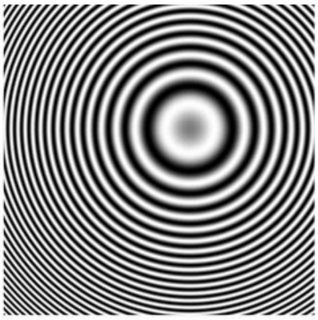
$$\sim \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,\eta)\exp\left[\frac{i\pi}{z\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\right]\exp\left[-2i\pi(\nu\xi + \mu\eta)\right] d\xi d\eta$$

$$\sim \mathcal{F}\left\{U(\xi,\eta)\exp(\frac{i\pi}{z\lambda}(\xi^2 + \eta^2))\right\}$$

De twee termen voor de integraal zijn respectievelijk een constante fase- en intensiteitsfactor. Wanneer men deze constante factoren buiten beschouwing laat, is E(x,y,z) gelijk aan de tweedimensionale Fouriertransformatie van het product van het complexe amplitudeveld U en de functie $\exp[\frac{i\pi}{z\lambda}(\xi^2 + \eta^2)]$. Deze functie staat bekend als de tweedimensionale chirp function (fig.5). Het product van deze twee functies vindt plaats in het tijdsdomein, waardoor het kan geïnterpreteerd worden als een modulatie van de chirp functie door de complexe amplitude U. De modulatie eigenschap van de Fouriertransformatie zegt dat:

$$\mathcal{F}\left\{U(\xi,\eta)\exp(\frac{i\pi}{z\lambda}(\xi^2+\eta^2))\right\} = \mathcal{F}\left\{U(\xi,\eta)\right\} \otimes \mathcal{F}\left\{\exp(\frac{i\pi}{z\lambda}(\xi^2+\eta^2))\right\}$$

Deze chirp functie is eigenlijk niet anders dan de impulsresponsfunctie IRF: de respons wanneer een impuls wordt ingestuurd. Aangezien in optica deze impuls overeenkomt met een punt, wordt dit ook wel de puntspreidingsfunctie PSF genoemd. De respons van een willekeurig signaal wordt dus gegeven door modulatie van de IRF met de complexe amplitude. De fouriergetransformeerde van de IRF wordt ook wel de transferfunctie genoemd.



Figuur 5: Sinusvorming patroon van een Chirp functie.

Een hologram van zo één beeldpunt vastleggen, heeft de zogenaamde Fresnel zone plaat FZP als resultaat wanneer gebruik gemaakt wordt van Fresnel diffractie. Voor Fraunhoffer diffractie zou dit opgenomen hologram een zogenaamde Airy disk zijn. Deze Airy disk lijkt sterk op de Fresnel zone plaat, alleen is deze minder scherp afgelijnd bij overgangen. Dit komt omdat bij Fraunhoffer diffractie het eindige registratiemedium in het vlak (x,y,z) verder wegligt dan bij Fresnel diffractie. Hierdoor valt een groter deel van de hoge frequenties (hogere ordes bij de diffractie) niet op het medium en kunnen scherpe overgangen dus minder goed weergegeven worden.

Met beide ingrediënten op zak kan de stap naar holografie gezet worden.

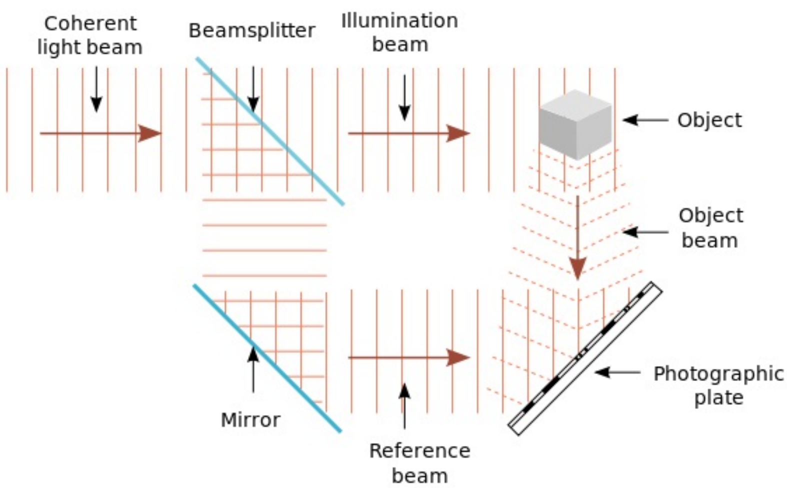
3. Holografie

Dennis Gabor vond met holografie een manier uit waarop de amplitude en fase van een lichtgolf vastgelegd en nadien ook gereconstrueerd konden worden. Een hologram is niets anders dan het opgenomen interferentiepatroon die ontstaat tussen de coherente object- en referentiebundel. Dit hologram bevat alle informatie over de driedimensionale lichtgolf. De reconstructie vindt plaats door het hologram opnieuw te belichten met de referentiebundel. Later werd door Leith en Upatnieks een off-axis reconstructie uitgewerkt. Hierdoor is er een spatiale scheiding tussen het reële en virtuele beeld, en de nulde orde diffractiebundel. Wanneer het interferentiepatroon digitaal opgenomen is en de reconstructie via de computer gebeurd, spreekt men van digitale holografie. Hier is het niet altijd nodig een off-axis opstelling te gebruiken aangezien de nulde orde bundel digitaal onderdrukt kan worden. Ook zijn er in de loop der jaren verscheidene toepassingen van holografie tot stand gekomen, waarvan in deze thesis de holografische interferometrie een belangrijke rol zal spelen. Deze techniek laat immers toe om vervormingen tot fracties van een micrometer waar te nemen.

3.1 Digitale holografie

3.1.1 Digitale registratie

Bij digitale registratie wordt gebruik gemaakt van een charge-coupled device of CCD i.d.p.v. een fotografische plaat. Onderstaande figuur toont het registratieproces. Een coherente lichtbundel afkomstig van een laser wordt door een beamsplitter opgesplitst in de referentie- en belichtingsbundel. Deze laatste valt in op het object, waarna de verstrooide objectbundel interfereert met de referentiebundel. Het resulterende interferentiepatroon wordt vastgelegd door de CCD. Zodoende is het hologram geregistreerd.



Figuur 6: Registratieproces van een hologram. Na verstrooiing van de objectbundel aan het object interfereert deze met de coherente referentiebundel en wordt dit vastgelegd door de fotografische plaat/CCD. (foto: wikipedia)

Mathematisch wordt dit proces als volgt beschreven:

$$\begin{aligned} O(x,y) &= o(x,y)\exp(i\phi_O(x,y)) \\ R(x,y) &= r(x,y)\exp(i\phi_R(x,y)) \end{aligned} \tag{7}$$

O en R zijn hier respectievelijk de complexe amplitude van de object- en referentiegolf, o en r de reële amplitude en ϕ_O, ϕ_R de fase. Interferentie van beide lichtgolven resulteert in een intensiteitsprofiel gegeven door:

$$
\begin{aligned}
I(x,y) &= |O(x,y)+R(x,y)|^2 \\
&= (O(x,y)+R(x,y))(O(x,y)+R(x,y))^* \\
&= R(x,y)R^*(x,y)+O(x,y)O^*(x,y)+O(x,y)R^*(x,y)+R(x,y)O^*(x,y)
\end{aligned} \tag{8}
$$

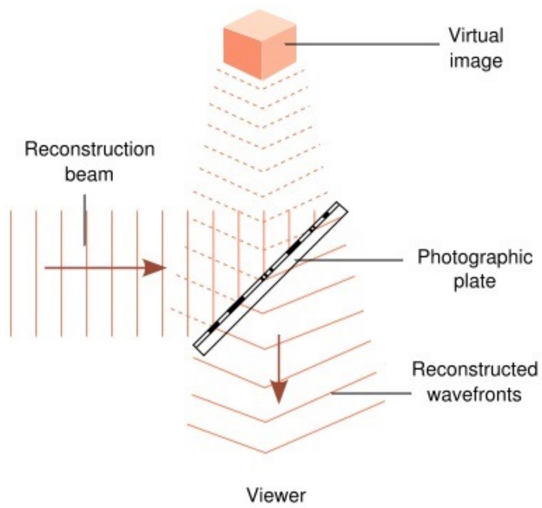
Voor digitale holografie is de opgenomen intensiteit evenredig met deze I(x,y) en wordt de transmissie amplitude h(x,y) genoemd:

$$h(x,y) = \beta\tau I(x,y) \tag{9}$$

Waar β een constante is die onder meer de gevoeligheid van de sensor uitdrukt en τ de duur van opname.

3.1.2 Reconstructie

Voor de reconstructie belicht men het opgenomen interferentiepatroon met de referentiebundel. Onderstaande tekening toont het proces.



Figuur 7: Optisch reconstructieproces van het hologram. Het hologram wordt nu enkel door de refentiebundel belicht. Wanneer nu gekeken wordt langs de andere kant van de fotografische plaat, zijn de gereconstrueerde golffronten (en dus het object) te zien. (foto: wikipedia)

Bij numerieke reconstructie wordt deze belichting gesimuleerd in de computer. Mathematisch ziet dit er als volgt uit: de amplitude transmissie functie wordt vermenigvuldigd met de complexe referentie amplitude:

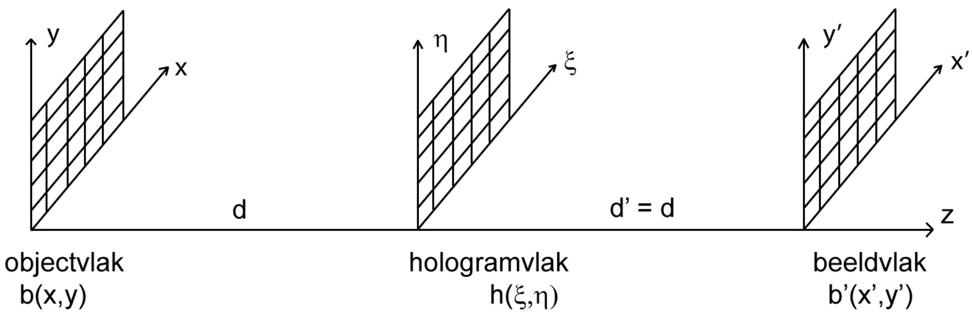
$$R(x,y)h(x,y) = \beta\tau(r^2+o^2)R(x,y) + \beta\tau r^2 O(x,y) + \beta\tau R^2(x,y)O(x,y) \tag{10}$$

De eerst term aan de rechterkant is de referentiegolf vermenigvuldigd met een constante factor, de zogenaamde nulde orde bundel. De tweede term is de gereconstrueerde objectgolf vermenigvuldigd met een factor die enkel de helderheid beïnvloed. De derde term levert een vervormd reël beeld van het object.

3.1.3 Numerieke reconstructie

Wanneer een object belicht wordt door de objectbundel $E(x, y, z) = |E(x, y, z)| \exp(i\alpha(x, y, z))$, kan de verstrooide bundel beschreven worden als een complexe amplitude $b(x, y, z) = |b(x, y, z)| \exp(i\beta(x, y, z))$. α en β zijn hier de fasen van de respectievelijke golven en $|E|$, $|b|$ de amplituden. Aangezien uitgegaan wordt van een diffuus object is deze β random. Dit object wordt nu theoretisch vervangen door een diffractierooster gelegen in het (x,y)-vlak. Op een afstand d hiervan staat de CCD-camera in het (ξ, η)-vlak. De interesse gaat uit naar het opgenomen intensiteitsprofiel door de CCD, dit is namelijk het hologram. Dit komt tot stand door interferentie van de referentiebundel met de gediffracteerde bundel, waardoor de complexe amplitude in het (ξ, η)-vlak moet gekend zijn. De Fresnel diffractie integraal besproken in hoofdstuk twee levert:

$$B(\nu, \mu) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \exp\left[i\pi d\lambda(\nu^2 + \mu^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b(x, y) \exp\left[\frac{i\pi}{d\lambda}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-2i\pi(\nu x + \mu y)\right] dxdy \tag{11}$$



Figuur 8: De objectbundel propageert vanuit b(x,y) in de positieve z-richting naar het hologramvlak h, waar het interfereert met de referentiebundel (RB). Nadien vindt de reconstructie plaats door diffractie van de RB aan het hologramvlak. Een scherp beeld wordt verkregen in het beeldvlak b(x',y').

Met de spatiale frequenties $\nu = \frac{\xi}{d\lambda}$ en $\mu = \frac{\eta}{d\lambda}$. Interferentie met de referentiegolf r kan uitgedrukt worden als:

$$h = |(B + r)|^2 \tag{12}$$

Dit is het hologram wat digitaal opgeslagen wordt in de computer. De numerieke reconstructie bestaat er nu in een model van de referentiegolf hierop in te sturen, wat neerkomt op een vermenigvuldiging van deze golf met het digitaal hologram h. Wanneer men het reële beeld in het vlak (x', y') op een afstand d' = d wil bekomen, moet gebruik gemaakt worden van $r^*(\xi, \eta)$. De referentiegolf ondergaat diffractie aan dit hologram, wat nu dienst doet als een diffractierooster. Dit proces wordt weerom beschreven door de Fresnel diffractie:

$b'(\delta,\epsilon) =$

$$\frac{\exp(ikd)}{i\lambda d}\exp\left[i\pi d\lambda(\delta^2+\epsilon^2)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi,\eta)r^*(\xi,\eta)\exp\left[\frac{i\pi}{d\lambda}(\xi^2+\eta^2)\right]\exp\left[-2i\pi(\xi\delta+\eta\epsilon)\right]d\xi d\eta$$

$$\sim \mathcal{F}\left\{h(\xi,\eta)r^*(\xi,\eta)\exp\left[\frac{i\pi}{d\lambda}(\xi^2+\eta^2)\right]\right\} \tag{13}$$

Met $\delta = \frac{x'}{d\lambda}$ en $\epsilon = \frac{y'}{d\lambda}$. Bij digitale holografie wordt h vastgelegd door middel van een CCD. Deze is opgebouwd uit pixels die horizontaal op een afstand $\Delta\xi$ en verticaal op een afstand $\Delta\eta$ van elkaar gepositioneerd zijn. Deze vormen tezamen een N bij M matrix. In het (x,y)-vlak heeft men:

$$\Delta x = \frac{1}{N\Delta\nu}, \Delta y = \frac{1}{M\Delta\mu}$$

(of na substitutie)

$$\Delta x = \frac{d\lambda}{N\Delta\xi}, \Delta y = \frac{d\lambda}{M\Delta\eta}$$

Aangezien $\Delta x = \Delta x'$, $\Delta y = \Delta y'$ en $\Delta\delta = \frac{\Delta x'}{d\lambda}$, $\Delta\epsilon = \frac{\Delta y'}{d\lambda}$, bekomen we uiteindelijk de discrete Fresnel transformatie (met $n = 1,\ldots,N$ en $m = 1,\ldots,M$):

$$b'(n\Delta x', m\Delta y') = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d}\exp\left[i\pi d\lambda(\frac{n^2}{N^2\Delta\xi^2}+\frac{m^2}{M^2\Delta\eta^2})\right]$$
$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} h(k\Delta\xi, l\Delta\eta)r^*(k\Delta\xi, l\Delta\eta)\exp\left[\frac{i\pi}{d\lambda}(k^2\Delta\xi^2+l^2\Delta\eta^2)\right]\exp\left[-2i\pi(\frac{kn}{N}+\frac{lm}{M})\right]d\xi d\eta \tag{14}$$

Wanneer nu h, r^* en $\exp\left[\frac{i\pi}{d\lambda}(k^2\Delta\xi^2+l^2\Delta\eta^2)\right]$ gekend zijn, kan b' bepaald worden.

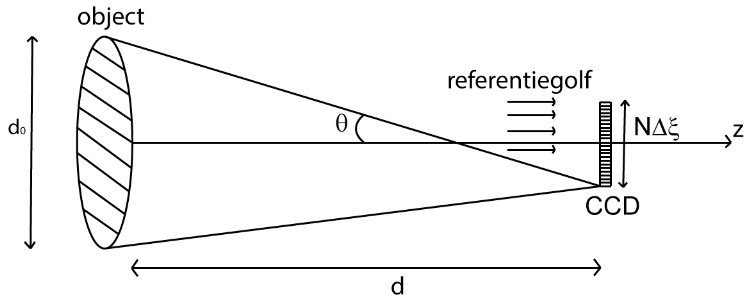
Vergelijking (14) wordt de centrale reconstructie formule van de digitale holografie genoemd. Uit b' kan dan de intensiteit en de fase bepaald worden door:

$$I(n\Delta x', m\Delta y') = |b'(n\Delta x', m\Delta y')|^2 \tag{15}$$

$$\phi(n\Delta x', m\Delta y') = \frac{\Im[b'(n\Delta x', m\Delta y')]}{\Re[b'(n\Delta x', m\Delta y')]} \tag{16}$$

Dit is het grote voordeel van digitale holografie ten opzichte van klassieke. Hier kan namelijk ook de fase bepaald worden uit de complexe amplitude. Aangezien het object op microscopisch niveau ruw is, is deze fase stochastisch verdeeld en lijkt dit op het eerste zicht niet veel nieuws op te leveren. Echter in het kader van holografische interferometrie zal snel duidelijk worden dat dit wel degelijk een grote meerwaarde is.

3.1.4 Minimale afstand van opname



Figuur 9: Gedetailleerde voorstelling van een digitale opname.

Interferentie van de verstrooide objectbundel met de referentiebundel geeft aanleiding tot interferentiefranjes waaruit het hologram is opgebouwd. In sectie 2.2.1 werd de interferentie van twee vlakke golven met dezelfde frequentie en een verschillende golfvector besproken. Er kan aangetoond worden dat de afstand tussen opeenvolgende interferentiefranjes in dit geval gegeven wordt door:

$$a = \frac{\lambda}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$$

Met θ de hoek tussen de twee golfvectoren van de RB en OB. De hoogste spatiale frequentie aanwezig, is deze voor maximale θ die mogelijk is voor het beschouwde object. Volgens het Nyquist theorema moet de sampling frequentie f_s minimaal het dubbele bedragen van de hoogst aanwezige frequentie opdat geen ongewenste effecten zoals aliasing zouden optreden. De CCD is opgebouwd uit een matrix van M x N pixels, waar de afstand tussen het midden van de pixels respectievelijk gegeven wordt door $\Delta\xi$ en $\Delta\eta$. De afleiding wordt hier voor één dimensie gedaan, maar kan op analoge wijze gebeuren voor de tweede dimensie.

$$f_s = \frac{1}{\Delta\xi} > 2f_{max}$$

$$\frac{1}{2\Delta\xi} > f_{max} = \frac{2\sin(\frac{\theta}{2})}{\lambda}$$

Voor kleine hoeken kan $\sin(\frac{\theta}{2})$ benaderd worden door $\frac{\theta}{2}$.

$$\frac{1}{2\Delta\xi} > \frac{\theta}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda}{2\Delta\xi} > \theta \tag{17}$$

Aan de andere kant is de $\tan(\theta)$ gelijk aan (zie figuur):

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{d_0}{2} + \frac{N\Delta\xi}{2}}{d}$$

Voor kleine hoeken kan $\tan(\theta)$ benaderd worden door θ. En gebruikmakend van (17):

$$\theta = \frac{\frac{d_0}{2} + \frac{N\Delta\xi}{2}}{d} < \frac{\lambda}{2\Delta\xi}$$

Omschrijven geeft de uiteindelijke eis op de minimale afstand d dat een object met grootte d_0 moet staan van de CCD:

$$\frac{(d_0 + N\Delta\xi)\Delta\xi}{\lambda} < d \tag{18}$$

3.2 Holografische interferometrie

Wanneer twee coherente golffronten afkomstig van een verschillende toestand van hetzelfde object samenkomen, is het resultaat een interferentiepatroon. Met 'een verschillende toestand van hetzelfde object' duiden we op een mogelijke vervorming van het object of enig andere oorzaak dat als gevolg een optisch weglengteverschil heeft. De eerste belichting gebeurt wanneer het object in zijn initiële rusttoestand is, de tweede van de vervormde toestand. Het hologram wordt gereconstrueerd door belichting met de referentiebundel. Als resultaat zijn interferentiefranjes waar te nemen die resulteren van de superpositie van de twee golffronten. Op deze wijze kunnen vervormingen tot op tienden van een micrometer gemeten worden. Deze optische techniek staat bekend als holografische interferometrie.

3.2.1 Double exposure interferometrie

De complexe amplitude van de objectgolf afkomstig van het object in de initiële toestand kan mathematisch als volgt weergegeven worden:

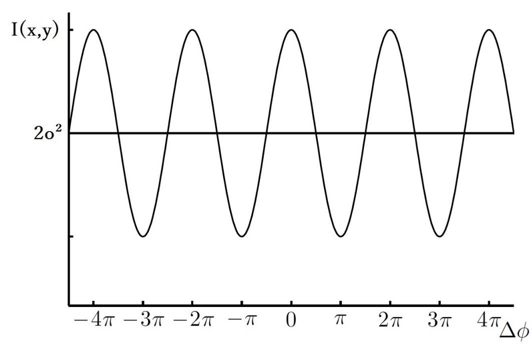
$$O_1(x, y) = o(x, y) \exp(i\phi(x, y)) \tag{19}$$

waar o(x,y) de reële amplitude en $\phi(x, y)$ de fase van de objectgolf voorstellen. Vervormingen van het object leiden tot optische weglengteverschillen die beschreven kunnen worden door een faseverschil $\Delta\phi$. Deze interferentiefase is het verschil tussen de eigenlijke fase en fase van de initiële toestand. De complexe amplitude van de objectgolf afkomstig van het object na de vervorming wordt dan ook geschreven als:

$$O_2(x, y) = o(x, y) \exp(i\phi(x, y) + i\Delta\phi(x, y)) \tag{20}$$

Het resulterende interferentiepatroon wordt gegeven door:

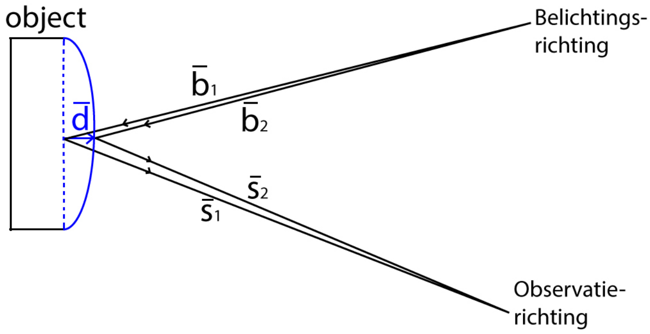
$$\begin{aligned} I(x, y) &= |O_1 + O_2|^2 \\ &= 2o^2(1 + cos(\Delta\phi)) \end{aligned} \tag{21}$$



Figuur 10: Intensiteit van het interferentiepatroon van een double exposure interferometrie. Deze is een functie van de interferentiefase $\Delta\phi$.

Bovenstaande vergelijking beschrijft de relatie tussen de intensiteit van het interferentiepatroon en de interferentiefase. Wanneer het interferentiepatroon nu gekend is, kan de interferentiefase bepaald worden en zodanig ook de vector $\vec{d}$ die de vervorming op elk punt van het object weergeeft. De relatie tussen de interferentiefase en $\vec{d}$ wordt gegeven door:

$$\Delta\phi(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{d}(x,y,z)(\vec{b}-\vec{s}) = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{d}(x,y,z)\vec{S} \tag{22}$$



Figuur 11: Eenheidsvectoren $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$, $\vec{b_1}$ en $\vec{b_2}$ bij de microscopische veranderingen die plaatshebben bij vervorming van een object. $\vec{d}$ duidt de verplaatsing aan die een punt van het object ondergaat bij deze vervorming.

Waar de vector $\vec{S}$ bekend staat als de gevoeligheidsvector en gedefinieerd wordt door de geometrie van de holografische opstelling. $\vec{S}$ is namelijk verbonden met de eenheidsvectoren in belichtings- en observatierichting, zie figuur (11) ter verduidelijking. Omdat het om een microscopische vervorming gaat, wordt bij de definitie van $\vec{S}$ geen onderscheid gemaakt tussen $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ en $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$. Deze zijn hier dus zowel voor als na vervorming gelijk aan elkaar: $\vec{b_1} = \vec{b_2} = \vec{b}$, $\vec{s_1} = \vec{s_2} = \vec{s}$. In het geval van een algemene 3D vervorming dient volgend stelsel opgelost te worden voor elk punt:

$$\begin{bmatrix}\Delta\phi_1\\ \Delta\phi_2\\ \Delta\phi_3\end{bmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda}\begin{bmatrix}S_{1,x} & S_{1,y} & S_{1,z}\\ S_{2,x} & S_{2,y} & S_{2,z}\\ S_{3,x} & S_{3,y} & S_{3,z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_x\\ d_y\\ d_z\end{bmatrix} \tag{23}$$

Een voordeel van digitale holografie is dat deze hologrammen niet gesuperponeerd hoeven te worden. Elk hologram corresponderend met een bepaalde toestand van het object wordt apart gereconstrueerd, welk in beide gevallen de complexe amplitude b' geeft. Zoals eerder vermeld in vgl. (16), kan hieruit rechtstreeks de fase bepaald worden:

$$\phi(n\Delta x', m\Delta y') = \frac{Im[b'(n\Delta x', m\Delta y')]}{Re[b'(n\Delta x', m\Delta y')]}$$

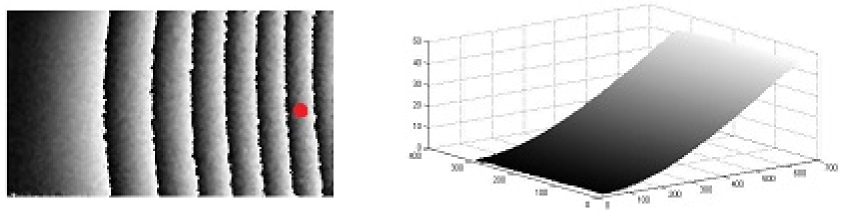
Wanneer deze fase $\phi \in [-\pi, \pi]$ van beide toestanden gekend is, kan de interferentiefase $\Delta\phi$ bepaald worden als:

$$\Delta\phi = \begin{cases}\phi_{1-2} + 2\pi & \text{als} \quad \phi_{1-2} < -\pi\\ \phi_{1-2} - 2\pi & \text{als} \quad \phi_{1-2} > +\pi\\ \phi_{1-2} & \text{anders}\end{cases} \tag{24}$$

Op deze wijze bekomt men $\Delta\phi$ in zijn modulo-2π 'gewrapte vorm'. Bij de vervorming van een object verwacht men echter meestal een continu verband en geen discontinue zaagtandfunctie.

Om dit op te lossen wordt er gebruik gemaakt van een algoritme om de interferentiefase te 'unwrappen'/'demoduleren'. Dit algoritme herkent de 2π-fasesprongen en corrigeert deze zodat een continue map bekomen wordt.

Onderstaande figuur (a) toont een bekomen interferentiefasemap van een plaatje bij vervorming. Hierbij werd door indentatie een kleine vervorming opgelegd aan het plaatje dat aan één zijde vasthangt. De plek van indentatie is aangegeven door de rode stip.



(a) (b)

Figuur 12: De gemoduleerde (a) en gedemolueerde (b) interferentiefasemap.

De grijswaarde in figuur (a) geeft de waarde van $\Delta\phi$ weer, gaande van zwart ($\Delta\phi = -\pi$) naar wit ($\Delta\phi = \pi$). Figuur (b) toont de gedemoduleerde interferentiefase. Het is eenduidig hoe uit (b) de werkelijke vervorming kan gevonden worden door gebruik te maken van formule (22).

3.2.2 Real-time time averaged interferometrie

Bovenstaande titel lijkt op het eerste zicht tegenstrijdig, maar dat is het zeker niet. Hiermee bedoelt men de time average methode waarbij eerst een opname van het object in de rusttoestand wordt vastgelegd. Hierna wordt het hologram terug in de opstelling geplaatst en gereconstrueerd. Wanneer men nu een harmonische vibratie oplegt aan het object zal de interferentiefase tussen de nieuwe en gereconstrueerde objectgolf veranderen in de tijd volgens:

$$\Delta\phi(x, y)\sin(\omega t) \tag{25}$$

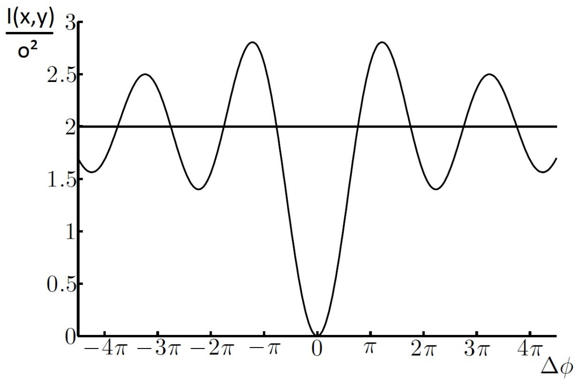
De intensiteit gemeten op elke positie (x,y) en tijdstip t wordt gegeven door:

$$I(x, y, t) = 2o(x, y)^2(1 - \cos[\Delta\phi \sin(\omega t)]) \tag{26}$$

Indien de vibratiefrequentie nu veel groter is dan de temporale resolutie van de detector, zal dit een tijdsgemiddelde intensiteit tot gevolg hebben, gegeven door:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= 2o(x, y)^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (1 - \cos[\Delta\phi \sin(\omega t)])dt \\ &= 2o(x, y)^2[1 - J_0(\Delta\phi(x, y))] \end{aligned} \tag{27}$$

Hierdoor zullen de franjes gevormd worden door de nulde-orde Bessel functie van de eerste soort. Een gevolg hiervan is dat het contrast van de hogere orden franjes drastisch minder is ten opzichte van de lagere orden.

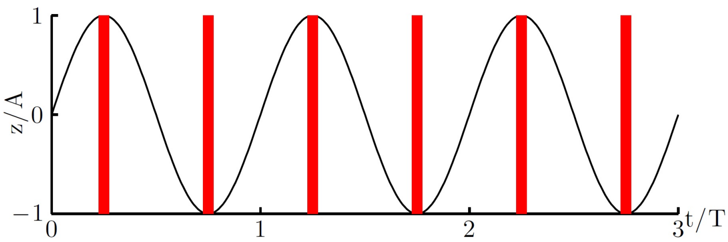


Figuur 13: Relatie tussen de intensiteit en de interferentiefase bij real-time time averaged interferometrie. Het contrast van de hogere orde franjes is duidelijk slechter dan deze van de lagere orde franjes.

3.2.3 Stroboscopische interferometrie

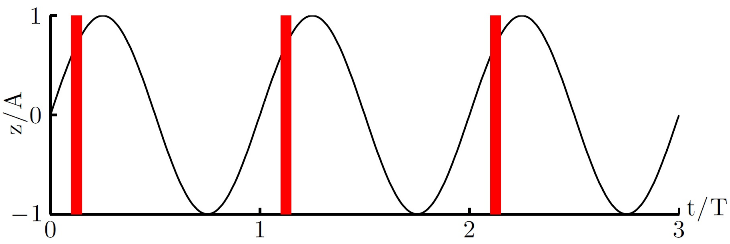
Indien we nu een methode vereisen die ook bij hogere orde franjes een goed contrast geeft, kunnen we gebruik maken van de zogenaamde stroboscopische interferometrie.

Als inleiding tot deze techniek kunnen we de stroboscopische double exposure opnamen bekijken. Voorgaand hebben we de double exposure techniek gezien als één waarbij de vervorming tussen twee statische toestanden kon bepaald worden, voor en na vervorming van een object. Indien men nu te maken heeft met een vibrerend object lijkt op het eerste zich deze techniek niet meer bruikbaar. Echter wel indien de belichting gebeurd door een sequentie van korte pulsen die gesynchroniseerd zijn met de vibratie van het object. Of anders gezegd: het object enkel belichten wanneer het zich in de maximale positieve en negatieve uitwijking bevindt. Al deze object- en referentielichtpulsen interfereren telkens met elkaar en na voldoende pulsen is een duidelijk interferentiepatroon waar te nemen. Op deze manier is het mogelijk om twee statische toestanden van een vibrerend object met elkaar te vergelijken, op voorwaarde dat de pulsen kort genoeg zijn. Of anders gezegd: in de tijd van belichting blijft de vorm van het object quasi dezelfde. De bekomen franjes zijn een cosinusfunctie van de interferentiefase, waardoor het contrast bij de hogere orde franjes bijgevolg beter is dan bij de time average opname.



Figuur 14: De stroboscopische pulsen zijn hier zo gesynchroniseerd met de trilling dat het object enkel belicht wordt op de extrema. Met op de y-as de genormaliseerd amplitude $\frac{z}{A}$ en op de x-as het aantal doorlopen periode.

Maar niets verplicht ons om de sequentie van lichtpulsen te nemen bij maximale uitwijkingen. Men zou bijvoorbeeld ook kunnen starten met een holografische opname van het object in rusttoestand en vervolgens een vibratie opleggen aan het object. Wanneer men nu met de stroboscopische lichtpulsen het object verlicht op hetzelfde tijdstip in elke vibratieperiode, wordt een verplaatsingsmap van elk punt bekomen op dat tijdstip in de vibratiecyclus (na demodulatie). Dit kan worden herhaald voor verschillende fasen in de periode, waarna al deze opnamen vergeleken kunnen worden met de referentieopname. Op deze manier bekomt men de vibratie informatie van het object in functie van de tijd. Hierdoor kan in elk punt naast de uitwijking, ook de snelheid bepaald worden.



Figuur 15: De stroboscopische belichting is hier zo gesynchroniseerd opdat telkens op hetzelfde moment in een periode gemeten wordt. Dit tezamen met een opname in referentietoestand levert een amplitudemap van de trilling op dat moment in de periode. Met op de y-as de genormaliseerde amplitude $\frac{z}{A}$ en op de x-as het aantal doorlopen periode.

De formule gebruikt om deze snelheid te bepalen is de centered difference approximation met fout van O(Δt^4):

$$V(x,y,t) = \frac{-X(t+2\Delta t) + 8X(t+\Delta t) - 8X(t-\Delta t) + X(t-2\Delta t)}{12\Delta t}$$

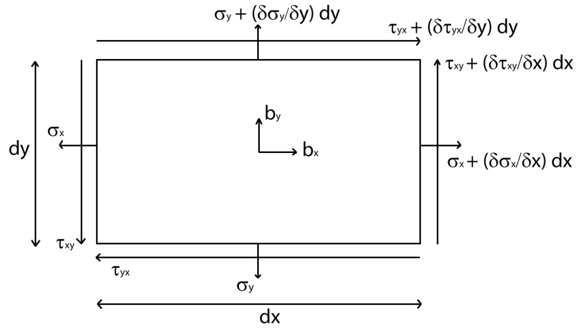
Waar V(x,y,t) en X(y,z,t) respectievelijk de amplitudemappen van de snelheid en de verplaatsing zijn. Uit deze amplitudemappen op verschillende tijdstippen kan ook een benadering gevonden worden voor de magnitudemap en de fasemap. Wanneer deze gekend zijn kan de volledige trilling gereconstrueerd worden. Hoe meer metingen op verschillende tijdstippen, hoe nauwkeuriger de benadering zal zijn. In wat volgt zal blijken dat uit deze fase- en magnitudemap heel wat informatie kan gededuceerd worden.

4. Mechanica van continue lichamen

In dit hoofdstuk zal besproken worden hoe een continu lichaam zal reageren op een externe invloed. In continue lichamen wordt aangenomen dat het materiaal zich gedraagt als continuüm doorheen het hele lichaam. Dit is duidelijk een aanname aangezien de microscopische beschrijving in termen van atomen niet in acht genomen wordt. Hierdoor kan een fysische parameter in het lichaam uitgedrukt worden als continue functie van de positie. Ook differentieerbaarheid wordt aangenomen, waardoor het mogelijk is om vergelijkingen op infinitesimale volumes te definiëren.

4.1 Statica

Wanneer de interne en externe krachten in een continu lichaam gedefinieerd zijn, kunnen de evenwichtsvergelijkingen opgesteld worden. Deze vergelijkingen moeten geschreven worden voor elk punt van het lichaam. Een intuïtieve manier om dit te doen is door deze te schrijven voor een infinitesimaal element dx dy dz van dit lichaam. Ter vereenvoudiging is dit onderstaand gedaan voor een 2D element dx dy, maar uitbreiding naar 3D is triviaal. In wat volgt zullen zogenaamde geconcentreerde momenten niet beschouwd worden.



Figuur 16: Free body diagram. Krachten die inwerken op een 2D infinitesimaal element.

De krachten die inwerken op het element zijn lichaamskrachten b_i en de normale en schuifspanning τ_{ij} (in wat volgt ook wel normal en shear stress genoemd). Wanneer men het 2D element beschouwt, moeten voorgaande krachten in evenwicht zijn. Sommeren van alle krachten langs de x- en y-richting geeft:

$$
\begin{aligned}
b_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\
b_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Deze evenwichtsvergelijkingen, ook bij uitbreiding in de derde dimensie, kunnen via de Einstein notatie kort geschreven worden als:

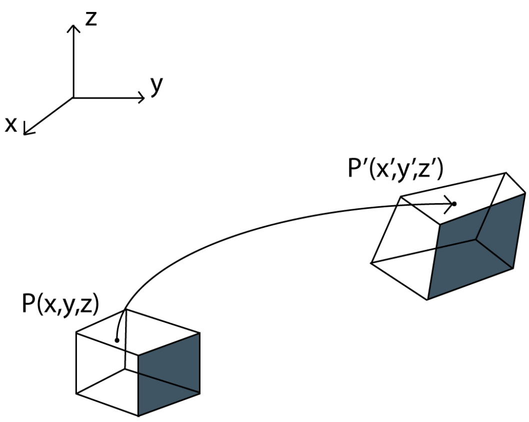
$$
b_i + \partial_j \tau_{ji} = 0 \tag{29}
$$

Vervolgens kan men aantonen dat de stress tensor τ in de afwezigheid van geconcentreerde momenten een symmetrisch tensor is:

$$
\begin{aligned}
\tau_{ji} &= \tau_{ij} \\
b_i + \partial_j \tau_{ij} &= 0
\end{aligned}
\tag{30}
$$

4.2 Kinematica

Hoe een lichaam zal vervormen onder invloed van een bepaalde kracht wordt behandeld in de kinematica van de vervorming. Hier zal de strain als variabele een belangrijke rol in spelen. Wanneer een lichaam vervormd wordt, kan men tussen elk punt in zijn initiële en uiteindelijke toestand een vector $\vec{u}$ tekenen die de verplaatsing van dat punt volledig bepaalt.



Figuur 17: Voor elk punt van het lichaam kan een vector $\vec{u}$ getekend worden die de verplaatsing weergeeft van dat punt onder een vervorming.

Wanneer nu de initiële toestand van het lichaam gebruikt wordt als referentietoestand en de vervormde toestand gedefinieerd is in functie hiervan, spreekt men van de Lagrangian finite strain tensor. Voor kleine vervormingen is het mogelijk om een linearisatie door te voeren van deze tensor. De niet-lineaire of tweede orde termen worden genegeerd en zodanig wordt de lineaire strain tensor gedefinieerd als:

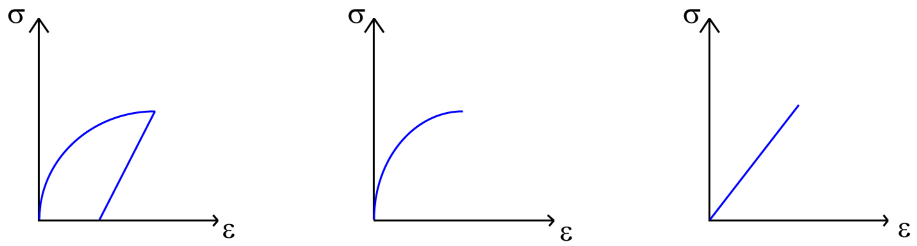
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \tag{31}$$

Of in matrixvorm:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\tau_{xy}}{2} & \frac{\tau_{xz}}{2} \\ \frac{\tau_{xy}}{2} & \epsilon_y & \frac{\tau_{yz}}{2} \\ \frac{\tau_{xz}}{2} & \frac{\tau_{yz}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

4.3 Materiaalwet

Hetgeen de statica nu verbindt met de kinematica is de materiaalwet. Hierbij wordt door de materiaaleigenschappen de stresses en strains met elkaar verbonden, wat leidt tot een zogenaamde stress-strain curve. In deze curve zijn vaak verschillende gebieden te onderscheiden zoals het lineaire gebied, het gebied van perfecte plasticiteit (yielding), enzoverder. In het volgende zal altijd uitgegaan worden van lineair elastische materialen die beschreven worden door de wet van Hooke.



Figuur 18: Links: niet-lineair inelastische vervorming, geen rechte en verschillende laadlijn. Midden: Niet-linear elastisch, geen rechte en zelfde laadlijn. Rechts: Lineair elastisch, rechte en zelfde laadlijn.

Een materiaal wordt elastisch genoemd wanneer de stress eenduidig verbonden is met de strain en omgekeerd (bijectie). De vervorming bij een bepaalde kracht hangt niet af van eerder opgelegde vervormingen en wanneer de kracht op het object verdwijnt, keert het object terug naar zijn oorspronkelijke staat waarbij het dezelfde laadlijn volgt in de andere zin. Wanneer er een lineair stress-strain verband heerst, spreekt men van lineair elastiche materialen:

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

De negen stress componenten en negen strain componenten leiden tot 81 elastische constanten, welke mede door symmetrie resulteren in 21 onafhankelijke constanten. Voor isotropische materialen zijn er echter maar twee onafhankelijke Lamé constanten λ en μ:

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

In matrixvorm geeft dit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \end{bmatrix}$$

De inverse relatie (met de constanten uitgeschreven) geeft de wet van Hooke voor 3D isotropische materialen:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Wanneer een materiaal in één richting wordt samengedrukt, heeft het de neiging in de orthogonale richtingen te gaan uitzetten. De Poisson verhouding ν geeft weer welke rek er loodrecht op de trekrichting ontstaat. De Young's modulus E is een maat voor de stijfheid van het materiaal en is gedefinieerd als de verhouding van opgelegde stress langs een as tot de strain langs die as. De schuifmodulus G geeft het verband tussen een opgelegde shear stress en de resulterende shear strain.

4.4 Plate theory

Een afleiding specifiek voor plate theory kan op analoge wijze als het schema gevolgd in de vorige secties uitgevoerd worden. De eerste stap, het afleiden van de evenwichtsvergelijkingen, zal hier echter niet gegeven worden. Er zijn boeken waar dit uitgebreid in besproken wordt en voor meer informatie wordt de lezer verwezen naar [4] en [5]. Het resultaat wordt weergegeven in 4.4.1. Vervolgens worden in 4.4.2 bepaalde aannamen gedaan over hoe het lichaam nu zal reageren onder invloed van krachten. De theorie hier beschouwd is de Kirchhoff-Love plate theory. Hierna wordt de connectie tussen statica en kinematica gemaakt, met als resultaat uitdrukkingen voor de momenten in functie van de beweging van de plaat.

4.4.1 Statica: equilibrium vergelijkingen

De evenwichtsvergelijking voor translatie worden gegeven door:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x,y) = 0 \tag{33}$$
$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \tag{34}$$
$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \tag{35}$$

Met Q_x en Q_y de transversale schuifkrachten, M_x en M_y de buigmomenten en M_{xy} en M_{yx} de torsiemomenten. Waar in vgl. (35) M_{yx} vervangen is door M_{xy} aangezien de stress tensor symmetrisch is. De evenwichtsvergelijking voor rotatie worden gegeven door:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \tag{36}$$
$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - Q_y = 0 \tag{37}$$

De translatie en rotatie equilibriumvergelijkingen kunnen gecombineerd worden tot:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -p \tag{38}$$

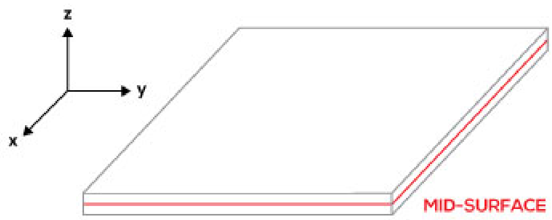
Deze vergelijking relateert de tweede afgeleide van de momenten met de transversale kracht, dewelke een druk p(x,y) is die aangrijpt op het bovenvlak van de plaat.

4.4.2 Kinematica: Kirchhoff-Love plate theory

Dit model levert de theoretische bagage om de stress en vervormingen te bepalen in dunne platen aan de hand van de gekende krachtmomenten. Een ‘dunne’ plaat is hier gedefinieerd als een 3D object waarvan één dimensie veel kleiner is dan de andere twee. Men kan volgende regel toepassen om een onderscheid te maken tussen dunne en dikke platen: bij statische vervormingen spreekt men van dunne platen wanneer de kortste afstand tussen 2 randen minstens 50 maal groter is dan de dikte van een plaat. Bij dynamische vervormingen moet de kortste afstand tussen 2 nodale vibratielijnen groter zijn dan 50 maal de dikte.

Bij dunne platen worden de uitwijkingen van dit 3D object beschreven als deze van een 2D oppervlak, het zogenaamde mid-surface. Hierdoor worden impliciet een aantal aannamen verondersteld:

1) de plaat heeft een uniforme dikte die niet veranderd onder vervorming
2) rechte lijnen loodrecht op het mid-surface blijven hier loodrecht op, ook na vervorming
3) rechte lijnen loodrecht op het mid-surface blijven recht, ook na vervorming



Figuur 19: plaat met het mid-surface aangeduid in het rood.

Deze aannamen vertalen zich wiskundig als volgt:

Voor dunne platen geldt dat de in-plane shearing strains nul zijn

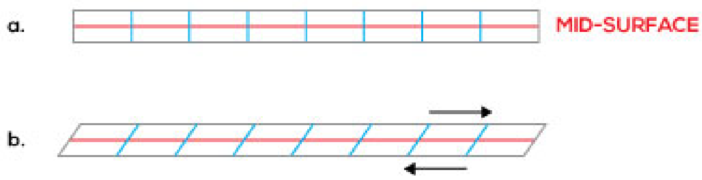
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{39}$$

De stress in de z-richting wordt niet in acht genomen, de mid-surface is een 2D oppervlak:

$$\sigma_z = 0 \tag{40}$$

Ook rekking van het mid-surface wordt niet beschouwd:

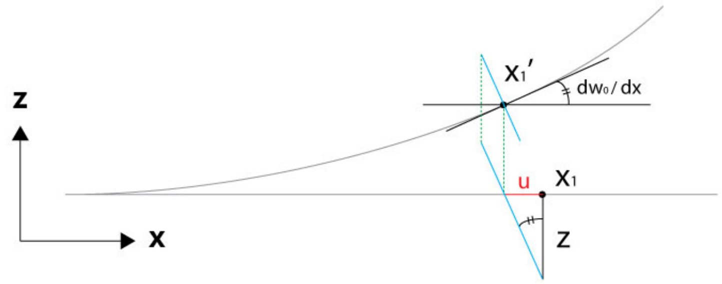
$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0 \tag{41}$$



Figuur 20: a. beginsituatie, b. verboden situatie: aanname 2 geschonden.

Hierdoor gaat elke verandering van de (x,y)-coördinaat van een punt altijd gepaard met een beweging in de z-richting, namelijk:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z\frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \tag{42}$$



Figuur 21: Vervorming van de plaat. De horizontale verplaatsing u van een punt gaat altijd gepaard met een out-of-plane verplaatsing w_0. De verbanden worden weergegeven in vergelijking (43).

De out-of-plane beweging van de plaat wordt gegeven door bv. buiging van het mid-surface, hier worden Poisson effecten verwaarloosd:

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \tag{43}$$

Nu de mathematische voorwaarden gekend zijn, kan op zoek gegaan worden naar bruikbare relaties tussen vervormingen en krachtmomenten.

De algemene 3D strain-verplaatsing wordt gegeven door:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} \tag{44}$$

Vgl. (40) en (41) in vgl.(32) levert:

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{45}$$

Vergelijking (42) en (43) in (44) levert:

$$\epsilon_x = -z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = -z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} \tag{46}$$

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Vgl. (40) heeft als resultaat dat elke laag in de dikte van de plaat zich gedraagt in-plane stress, dit geeft:

$$\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0\\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$$

Of geïnverteerd:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{G(1-\nu^2)}{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \tag{47}$$

Vergelijkingen (46) en (47) leveren een uitdrukking tussen spanning en verplaatsing:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{G(1-\nu^2)}{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}\\ -z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\\ -2z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}$$

Of uitgeschreven:

$$\sigma_x = -\frac{zE}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right]$$

$$\sigma_y = -\frac{zE}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right] \tag{48}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x\partial y}$$

De krachtresultanten zijn gedefinieerd als:

$$\begin{bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{bmatrix} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}z\sigma_x\\ z\sigma_y\\ z\tau_{xy}\end{bmatrix}dz \tag{49}$$

Vergelijking (48) en (49) leveren met bending stifness $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$:

$$M_x = D\left[\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right]$$

$$M_y = D\left[\nu\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right] \tag{50}$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x\partial y}$$

De uitdrukkingen voor de krachtmomenten Q_x en Q_y kunnen uit de translatie equilibrium vergelijkingen worden gehaald (zie sectie 4.4.1):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x,y) = 0 \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \\
\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0
\end{gathered} \tag{51}
$$

Hieruit volgt:

$$
\begin{aligned}
Q_x &= -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\
Q_y &= -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y}
\end{aligned} \tag{52}
$$

Men bekomt:

$$
\begin{aligned}
Q_x &= -D\left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2}\right] \\
Q_y &= -D\left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y}\right]
\end{aligned} \tag{53}
$$

Belangrijk om hier op te merken is dat alle momenten M_x, M_y, M_{xy}, Q_x en Q_y nu een functie zijn van de out-of-plane verplaatsing en van niets anders. Wanneer deze out-of-plane verplaatsing gekend is, kunnen de corresponderende momenten bepaald worden.

5. Power flow

Net zoals geluidsintensiteit heeft power flow of structurele intensiteit een magnitude en richting. Het is dus een vectorveld en geen scalair veld. Onderstaand wordt in sectie 5.1 de uitdrukking gegeven voor de instantane power flow. Aangezien in één periode energie van een positie kan wegvloeien en daarna terugvloeien, is het interessanter om het gemiddelde hiervan over de tijd te bekijken. Daarom is in sectie 5.2 uitgegaan van tijdsgemiddelde power flow over één periode en wordt een handige uitdrukking gezocht.

5.1 Instantane power flow

Deze power flow kunnen we schrijven als functie van de shear forces, bending moments en twisting moments. Iets exacter: de som van het product deze krachten met hun respectievelijke snelheden.

$$P(t) = F(t)v(t)$$

$$P_x(t) = -Q_x(t)\frac{\partial w(t)}{\partial t} - M_{xy}(t)\frac{\partial^2 w(t)}{\partial y \partial t} - M_x(t)\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial t} \tag{54}$$

$$P_y(t) = -Q_y(t)\frac{\partial w(t)}{\partial t} - M_{xy}(t)\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial t} - M_y(t)\frac{\partial^2 w(t)}{\partial y \partial t}$$

5.2 Tijdsgemiddelde power flow

In een vibrerende structuur blijkt de tijdsgemiddelde netto power flow echter vaak interessanter dan de instantane power flow. Zo kan nagegaan worden of er in één cyclus op een bepaalde positie vermogen is toegevoegd, gedissipeerd of geen van beide. Met andere woorden: het is mogelijk om een source of een drain te identificeren. Een andere veelgebruikte term is de zogenaamde 'structurele intensiteit', dewelke gedefinieerd is als tijdsgemiddelde power flow per oppervlakte eenheid.

Componentsgewijs:

$$\begin{aligned}
\langle P_x(t)\rangle_T &= \langle -Q_x(t)\frac{\partial w(t)}{\partial t} - M_{xy}(t)\frac{\partial^2 w(t)}{\partial y \partial t} - M_x(t)\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial t}\rangle_T \\
\langle P_y(t)\rangle_T &= \langle -Q_y(t)\frac{\partial w(t)}{\partial t} - M_{xy}(t)\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial t} - M_y(t)\frac{\partial^2 w(t)}{\partial y \partial t}\rangle_T
\end{aligned} \tag{55}$$

Een uitdrukking voor de tijdsgemiddelde power flow kan nu gevonden worden door de vectoren als complexe fasoren te beschouwen. Onderstaand is dit uitgewerkt voor een reële vector A(t) die gelijk is aan het product van twee fasoren B(t) en C(t) met dezelfde frequentie.

$A(t) = B(t).C(t) = \Re\{B_0 \exp(i\phi_1) \exp i\omega t\}\Re\{C_0 \exp(i\phi_2) \exp i\omega t\} = \Re\{\tilde{B}_0 \exp i\omega t\}\Re\{\tilde{C}_0 \exp i\omega t\}$

$A(t) = B_0 C_0 \cos{(wt + \phi_1)} cos(wt + \phi_2)$

$A(t) = B_0 C_0 [\cos{(wt)} \cos(\phi_1) - \sin{(wt)} \sin(\phi_1)][\cos{(wt)} \cos(\phi_2) - \sin{(wt)} \sin(\phi_2)]$

$$
\begin{aligned}
A(t) = B_0 C_0 [\cos^2{(wt)} \cos(\phi_1) \cos(\phi_2)] - [\cos{(wt)} \sin{(wt)} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2)] \\
- [\sin{(wt)} \cos{(wt)} \sin(\phi_1) \cos(\phi_2)] + [\sin^2{(wt)} \sin(\phi_1) \sin(\phi_2)]
\end{aligned}
$$

Het tijdsgemiddelde over één periode van A(t) wordt gegeven door:

$$\langle A(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

Wanneer A(t) wordt ingevuld zullen de termen met het product van cosinus en sinus aanleiding geven tot nul. Immers, de componenten met de fase kunnen voor de integraal worden geplaatst. Het product kan dan herschreven worden als:

$$\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2}$$

En de integraal uitgerekend over een sinus met dubbele frequentie geeft nul. De termen kwadratisch in sinus of cosinus geven beide na integratie $\frac{T}{2}$. Immers:

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1 + cos(2\omega t)}{2}$$

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - cos(2\omega t)}{2}$$

Waarbij de tweede term bij integratie weer aanleiding geeft tot nul. Dit levert:

$$
\begin{aligned}
\langle A \rangle_T &= \frac{1}{T} \frac{T}{2} B_0 C_0 [\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2)] \\
&= \frac{B_0 C_0}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) \\
&= \frac{1}{2} \Re\{B_0 \exp{(i\phi_1)} C_0 \exp{(-i\phi_2)}\} \\
&= \frac{1}{2} \Re\{\tilde{B}_0 \tilde{C}_0^*\}
\end{aligned}
$$

Merk op dat in de uitdrukking hierboven geen tijdsafhankelijkheid meer optreedt. Wanneer de magnitude en de fase gekend is, kan het gemiddelde over één periode bepaald worden. Vergelijkingen (56) kunnen nu op gelijkaardige wijze geschreven worden als:

$$\langle P_x \rangle_T = \frac{1}{2}\Re\left[-\tilde{Q}_x \frac{\partial \tilde{w}^*}{\partial t} - \tilde{M}_{xy}\frac{\partial^2 \tilde{w}^*}{\partial y \partial t} - \tilde{M}_x \frac{\partial^2 \tilde{w}^*}{\partial x \partial t}\right]$$

$$\langle P_y \rangle_T = \frac{1}{2}\Re\left[-\tilde{Q}_y \frac{\partial \tilde{w}^*}{\partial t} - \tilde{M}_{xy}\frac{\partial^2 \tilde{w}^*}{\partial x \partial t} - \tilde{M}_y \frac{\partial^2 \tilde{w}^*}{\partial y \partial t}\right]$$

Definiëren we de tijdsafgeleide van de normale verplaatsing $\frac{\partial w^*}{\partial t}$ nu als ν^*.

$$\begin{aligned}
\langle P_x \rangle_T &= \frac{1}{2}\Re\left[-\tilde{Q}_x \tilde{\nu}^* - \tilde{M}_{xy}\frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial y} - \tilde{M}_x \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x}\right] \\
\langle P_y \rangle_T &= \frac{1}{2}\Re\left[-\tilde{Q}_y \tilde{\nu}^* - \tilde{M}_{xy}\frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x} - \tilde{M}_y \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial y}\right]
\end{aligned} \tag{56}$$

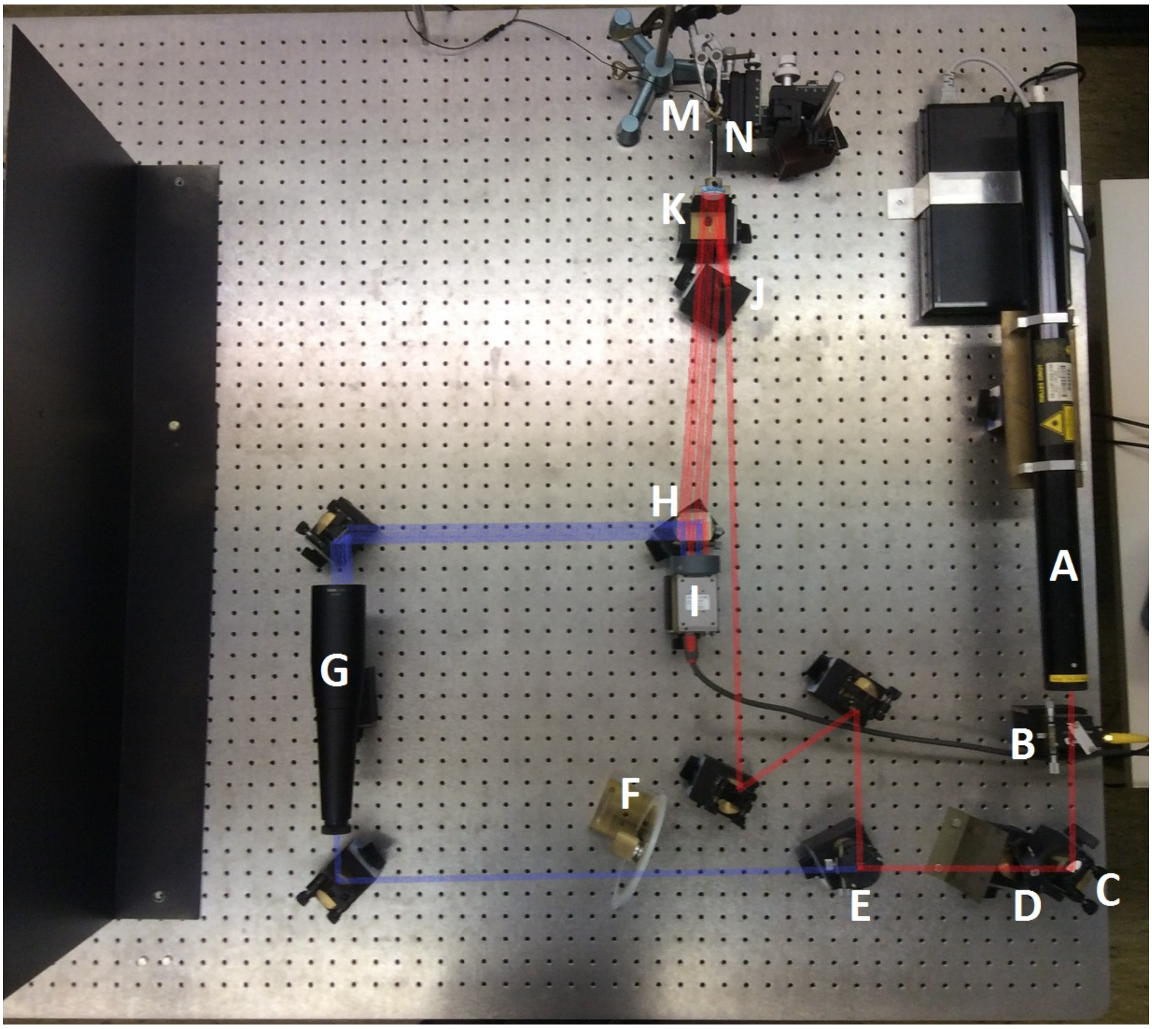
Waarbij de tilde telkens aanduidt dat het gaat om de magnitude en om de fase in de complexe exponent. Wanneer voor alle momenten en snelheden deze magnitude en fasemap gekend zijn, kan de gemiddelde power flow berekend worden.

DEEL II

PRAKTISCHE IMPLEMENTATIE

6. Opstelling

Onderstaande figuur toont de gebruikte opstelling. Om trillingen te vermijden zijn de optische instrumenten uitgerust met een magneetvoet en wordt gebruik gemaakt van een luchttafel. De referentiebundel (RB) en objectbundel (OB) zijn aangeduid met respectievelijk een rode en blauwe kleur. In sectie 6.1 staan alle componenten waaruit de opstelling is opgebouwd en hun functie opgelijst.



Figuur 22: de opstelling. De componenten zijn aangeduid met een cijfer, deze worden in 6.1 besproken. De stralengang wordt door de beamsplitter (E) in de referentiebundel (blauw) en objectbundel (rood) gesplitst.

Na doorgang van de continue laserbundel door de AOM (component B) wordt de gepulste laserbundel door de polariserende beamsplitter (component E) opgesplitst in de RB en OB. De referentiebundel wordt door component G verbreed tot een parallelle bundel. Deze propageert verder tot aan de CCD (component I). De OB wordt door component J conisch verbreedt en valt in op het object. Een deel van het verstrooide licht interfereert met de OB en dit intensiteitsprofiel wordt gemeten door de CCD.
Via Matlab worden de opgenomen beelden van de CCD binnen genomen en wordt ook een generator aangestuurd. Deze generator is het type Tektronix AFG 3022C dual channel. Eén kanaal stuurt met een blokgolf de AOM aan en het andere kanaal stuurt met een sinusgolf de source aan.

6.1 Componenten

A. He-Ne continuous wave gaslaser met een golflengte van 632,8 nm en een typisch vermogen van 19,3 mW.

B. Acousto-optische modulator (AOM) of Bragg cell waar via diffractie de inkomende laserbundel wordt opgesplitst in de verschillende orde. Deze diffractie vindt enkel plaats wanneer een signaal wordt ingestuurd. Intern wordt dan in het medium staande golven gecreëerd waardoor op bepaalde posities verdichtingen van het medium ontstaan. Deze hebben een hogere brekingsindex, waardoor diffractie aan deze posities optreedt. Na de diffractie wordt enkel de 1ste orde bundel (één van de twee) door een opening in een plaatje doorgelaten. De AOM tesamen met het plaatje erachter werken als een soort van shutter. Immers, via een oscilloscoop wordt een blokgolf gestuurd naar de AOM met een bepaalde duty factor en een periode gesynchroniseerd met de trilling van het object. Dit proces kan zo worden afgesteld dat de eerste ordebundel het overgrote deel van het vermogen van invallende laserbundel draagt, opdat in dit proces een minimale hoeveelheid van het vermogen verloren gaat. Zodoende kan de continue laserbundel afkomstig van de laser gepulst gemaakt worden en bekomt men de stroboscopische belichting nodig bij de oscillatie-opnamen.

C. Spiegel waar zowel horizontale als verticale hoek kan fijn geregeld worden door middel van schroeven.

D. $\frac{\lambda}{2}$-plaatje waarmee de polarisatie van de uitgaande laserbundel kan worden aangepast. De bundel afkomstig van de laser is lineair gepolariseerd in een welbepaalde richting. Via dit halflambdaplaatje blijft dit lineair gepolariseerd licht, maar nu in een andere richting. Dit plaatje bestaat meestal uit een anisotroop materiaal met een specifieke dikte voor een bepaalde golflengte van licht. Het effect is dat één polarisatie 180 graden vertraagt ten opzichte van de andere en zo de totale richting verandert.

E. Polariserende beamsplitter die de laserbundel splitst in de referentie- (RB) en objectbundel (OB). De intensiteitenverhouding tussen de twee kan bepaald worden door aan het $\frac{\lambda}{2}$-plaatje te draaien.

F. Een attenuator is een schijf waarvan de transmissiefactor gradueel toeneemt/afneemt met toenemende hoek (afhankelijk van draairichting). Hierdoor kan de RB verzwakt worden.

G. Bundelverbreder die ervoor zorgt dat de gehele CCD belicht wordt. Deze evenwijdige verbreding komt tot stand door een interne convexe en concave lens.

H. Niet-polariserende beamsplitter. Deze laat de OB door en laat de RB een hoek van negentig graden maken, zodat beide invallen op de CCD.

I. CCD-camera: FOculus FO531SB met 1628 x 1236 pixels en pixelgrootte 4.40 x 4.40 μm.

J. Conische bundelverbreder. Deze wordt gebruikt om het object uniform te belichten.

K. Object waar een trilling aan opgelegd werd.

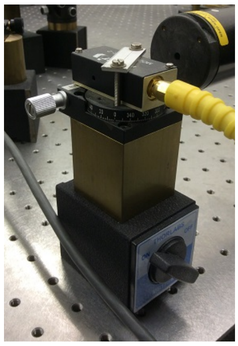
L. Luidspreker van mp3, dewelke dienst doet als een globale source. Het geluid wordt op het hele object ingestuurd.

M. Kleine mp3-luidspreker met buisje. Deze doet dienst als een gelokaliseerde source. Hiermee kan op een zelf gekozen positie op het object geluid worden ingestuurd.

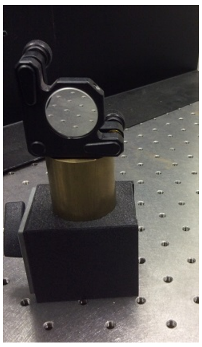
N. Staaf met punt van dempend materiaal bevestigd op een translatietafel. Hierdoor zijn kleine en nauwgezette bewegingen mogelijk, hetgeen nodig is om geen overdemping te bekomen. Deze component heeft de functie van een gelokaliseerde drain.

O. Vrij veld bron, die dienst doet als globale bron wanneer ook de demper gebruikt wordt. Component L is namelijk niet sterk genoeg om op verdere afstand te gebruiken.

(a) Component A: laser.

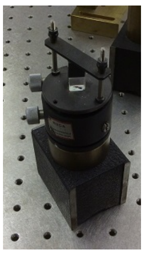


(b) Component B: acousto-optische modulator.

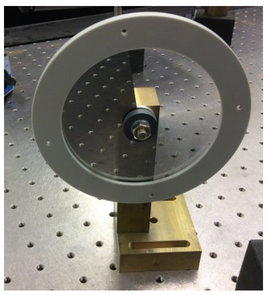


(c) Component C: spiegel.

(d) Component D: halflambdaplaatje.

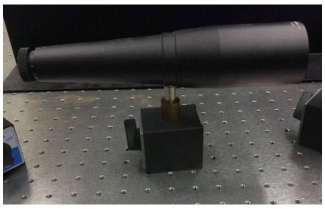


(e) Component E: polariserende beamsplitter.

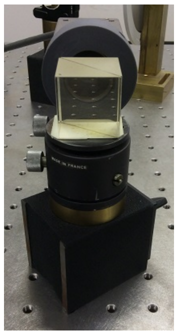


(f) Component F: attenuator.

Figuur 23: De eerste zes componenten waaruit de opstelling is opgebouwd.

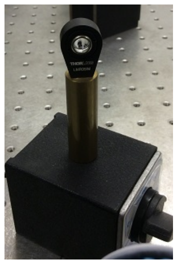


(a) Component G: Paralle bundelverbreder.

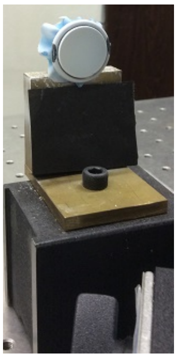


(b) Component H: niet-polariserende beamsplitter.

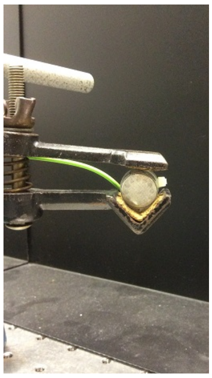
(c) Component I: CCD-camera.



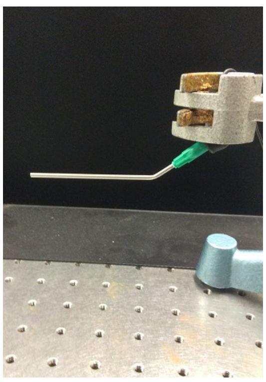
(d) Component J: conische bundelverbreder.



(e) Component K: object waar vibratie wordt aan opgelegd.



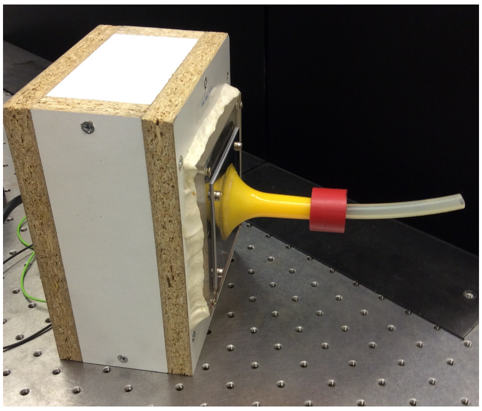
(f) Component L: luidspreker die dienst doet als een globale bron.



(g) Component M: luidspreker die dienst doet als een lokale bron.

(h) Component N: Staaf met dempend materiaal dat dienst doet als lokale drain.

Figuur 24: De volgende acht componenten waaruit de opstelling is opgebouwd.



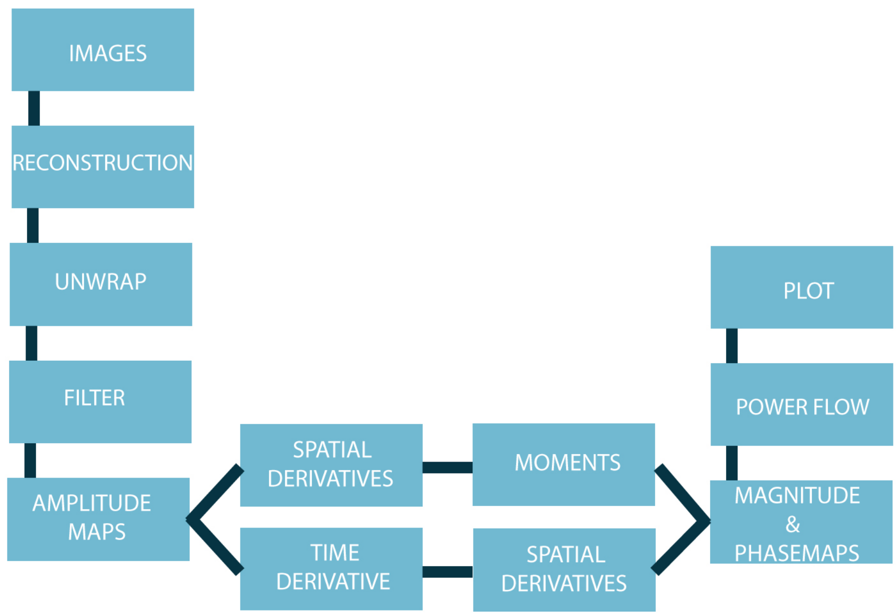
Figuur 25: Component O: vrije veld bron die net als component L dienst doet als een globale bron.

7. Algoritme en eindige elementen model

Onderstaand wordt in sectie 7.1 het algoritme besproken dat ontwikkeld werd voor de power flow metingen. Dit algoritme is getest aan de hand van data afkomstig van verschillende eindige elementen modellen. In sectie 7.2 wordt de opbouw van deze modellen in Comsol besproken.

7.1 Algoritme

Het schema toont in een beknopte structuur het algoritme geïmplementeerd in Matlab. Daarna wordt het proces doorlopen, waarbij telkens verwezen is naar de sectie uit deel I waarop deze delen van het algoritme gebaseerd zijn.



Figuur 26: Schematische weergave van de structuur van het algoritme geïmplementeerd in Matlab. Het schema wordt van linksboven naar rechtsboven doorlopen.

Vanuit Matlab wordt een twee-kanaalsoscilloscoop aangestuurd. Het eerste kanaal is verbonden met een luidspreker die een sinusgolf produceert. Er wordt van uitgegaan dat het object ook met deze frequentie vibreert en dus geen niet-lineaire effecten optreden. Het tweede kanaal stuurt een blokgolf met dezelfde frequentie naar de acousto-optische modulator, gesynchroniseerd met de trilling. Door deze stroboscopische belichting zal de CCD het hologram van de trillingsmappen op de verschillende tijdstippen in de periode vastleggen. Vanuit 'images' wordt deze informatie gestuurd naar 'reconstruction', waar numeriek de reconstructie gebeurd. Dit deel van het algoritme is gebaseerd op sectie 3.1.3 en dus op de Fresnel benadering. Aangezien deze reconstructie digitaal gebeurd kan ook de fase bepaald worden. Uit de interferentiefase gedefinieerd in sectie 3.2.1, met als referentietoestand telkens de rusttoestand, kunnen de modulo-2π gewrapte amplitudemappen bekomen worden. Om dit proces zo efficiënt mogelijk te doorlopen wordt eerst een ROI in het beeld gedefinieerd. Op deze manier zal de interferentiefase enkel berekend worden in het deel van het beeld waar het object zich bevindt. In een volgende stap worden deze gedemoduleerd in 'unwrap'. De uiteindelijk bekomen trillingsmappen vertonen vaak kleine pieken afkomstig van het unwrappingsproces of van de ruis aanwezig tijdens de metingen. Daarom wordt als laatste stap een low pass filter toegepast die de hoge frequenties en dus de scherpe pieken verwijderd. Zodoende zijn de amplitudemappen voor de out-of-plane verplaatsing bekomen.
Het tweede deel van het algoritme heeft als doel uit deze mappen de amplitude voor de snelheden en de momenten te bepalen. Door 'time derivative' en vervolgens 'spatial derivatives' toe

te passen, bekomt de trillingsmappen van de drie snelheidscomponenten. Het eerst genoemde is gebaseerd op de centered difference approximation van de snelheid, gegeven in sectie 3.2.3:

$$V(x, y, t) = \frac{-X(t + 2\Delta t) + 8X(t + \Delta t) - 8X(t - \Delta t) + X(t - 2\Delta t)}{12\Delta t}$$

Waar V(x,y,t) en X(y,z,t) respectievelijk de amplitudemappen van de snelheid en de verplaatsing zijn. Het laatste maakt gebruik van welbekende relatie tussen de afgeleide van een functie en de functie zelf in het Fourierdomein:
Als

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(\nu, \mu)$$

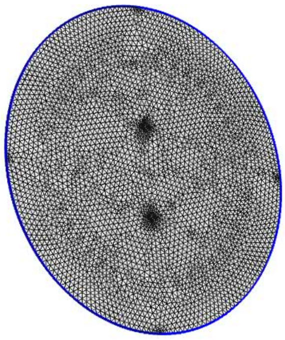
Dan geldt:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right\} = 2\pi i\nu F(\nu, \mu)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right\} = 2\pi i\mu F(\nu, \mu)$$

De trillingsmappen van de momenten worden bekomen door eerst spatiale afgeleiden te nemen en deze vervolgens in 'moments' op een correcte manier samen te voegen. De definities van deze momenten werden gegeven in sectie 4.4.2. Via deze amplituden kan nu de magnitude- en fasemap van de trilling worden bepaald voor de snelheden en de momenten. Dit gebeurd in 'magnitude en phase maps'. In 'power flow' zijn deze mappen vervolgens gecombineerd aan de hand van de formules gegeven in sectie 5.2. Als laatste wordt in 'plot' deze power flow gevisualiseerd met behulp van een vectorstroom.

7.2 Eindige elementen model



Figuur 27: Eindige elementen model van een cirkelvormige plaat. In het blauw is de rand aangeduid waarop de fixed boundry condition heerst.

Het algoritme is getest aan de hand van data gegenereerd in het eindige elementen programma Comsol. Zo kon dit gebeuren zonder de aanwezigheid van ruis. Een model is opgesteld van een 3D cirkelvormige plaat die geklemd is aan de randen. Deze klemming gebeurd door een fixed boundry condition, dewelke inhoudt dat noch rotatie, noch translatie mogelijk is. Er is gebruik gemaakt van de Solid Mechanics module met tetrahedrische elementen. Het gebruik van deze 3D elementen is niet altijd de beste manier. Bij gebruik ervan is de nauwkeurigheid van de oplossing vaak minder goed, waardoor een groot aantal elementen moet gebruikt worden. De reden om deze toch te gebruiken is dat in het programma het niet mogelijk is de power flow in een 2D omgeving weer te geven. Ook was het groter aantal elementen hier geen probleem omdat het model zeer klein en simpel is. Hierdoor duurde het dus ook maar enkele tientallen seconden om een model uit te rekenen, ook al was de mesh size zeer klein. Er is gekozen voor een studie in het frequentiedomein, aangezien het de steady state situatie is waar de interesse naar uitgaat en dit geen transiënt karakter heeft.

Vervolgens wordt een onderscheid gemaakt tussen verschillende configuraties die variëren in het aantal of de grootte van bron/drain:

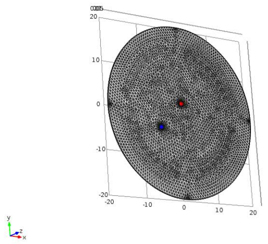
1. 1 lokale bron en 1 lokale drain

2. 1 lokale bron en 2 lokale drains

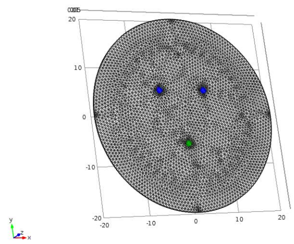
3. 2 lokale bronnen en 1 lokale drain

4. 1 globale bron en 1 lokale drain

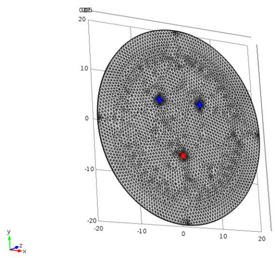
De bron is gemodelleerd als een periodische druk die invalt op een deel van het plaatje (bij een lokale bron) of op het ganse plaatje (bij de globale bron). De drain is een zogenaamde 'spring foundation', en kan ingebeeld worden als een veer bevestigd aan bepaald gebied van de plaat. Opdat hier in één periode energie zou wegvloeien heeft deze veer een loss factor.



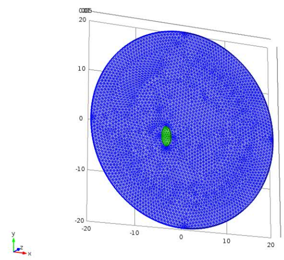
(a) Configuratie met 1 lokale bron (blauw) en 1 lokale drain (rood).



(b) Configuratie met 1 lokale bron (groen) en 2 lokale drains (blauw).



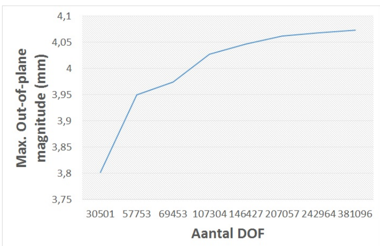
(c) Configuratie met 2 lokale bronnen (blauw) en 1 lokale drain (rood).



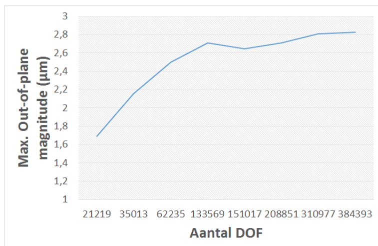
(d) Configuratie met 1 globale bron (blauw) en 1 lokale drain (groen).

Figuur 28: De verschillende configuraties variërend in het aantal of grootte van bron/drain.

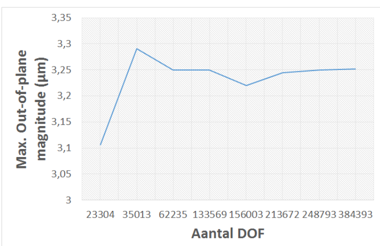
Een handmatige convergentie analyse is uitgevoerd voor elk van deze modellen. De resultaten zijn grafisch weergegeven in figuur (29). Op de verticale as is telkens de maximale out-of-plane magnitude uitgezet ten opzichte van het aantal vrijheidsgraden (DOF) in het model. Zoals te zien convergeren alle vier de configuraties. De bronnen zijn met opzet geen puntbronnen, maar hebben een eindige afmeting net om convergentieproblemen te vermijden (dit geldt ook voor de drains).



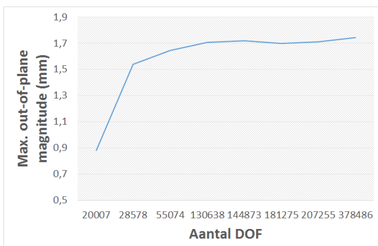
(a) 1 lokale bron, 1 lokale drain.



(b) 1 lokale bron, 2 lokale drains.



(c) 2 lokale bronnen, 1 lokale drain.



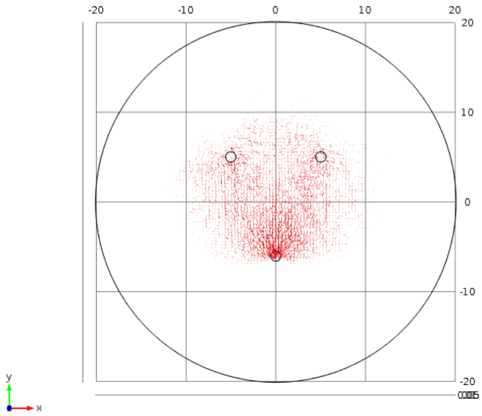
(d) 1 globale bron, 1 lokale drain.

Figuur 29: Convergentie analyse van de verschillende configuraties.

7.2 Resultaten FEM

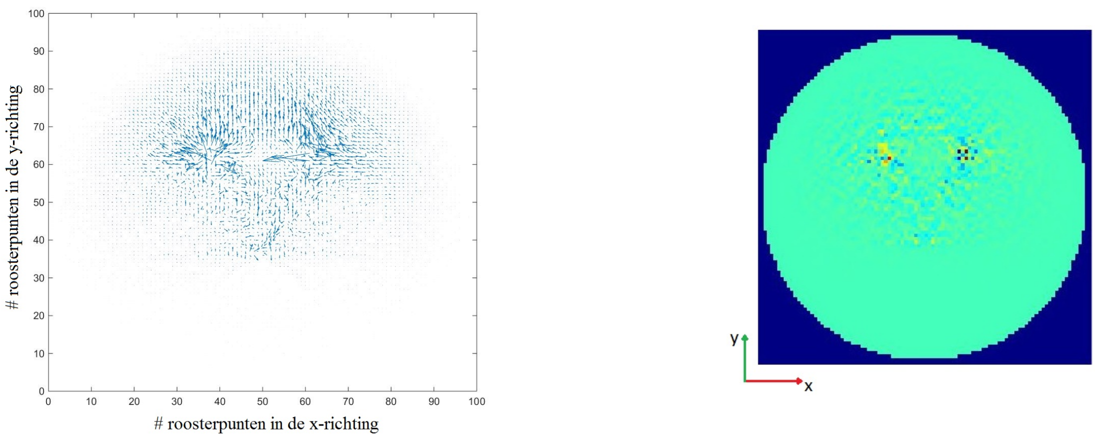
Voor elke configuratie is het algoritme telkens in vier stappen getest. Deze procedure wordt onderstaand één keer helemaal doorlopen voor de configuratie met 2 bronnen en 1 drain. Vervolgens worden kort de resultaten voor de overige configuraties besproken. In wat volgt geldt voor elke stromingsmap telkens dat de grootte van de pijlen evenredig is met de grootte van de power flow. De legende van de kleurenmap is bij de divergentiemappen niet weergegeven. Het doel is hier immers om bronnen/sinks te identificeren, en niet de exacte waarde van de stroming op die posities te bepalen.

7.2.1 2 lokale bronnen en 1 lokale drain



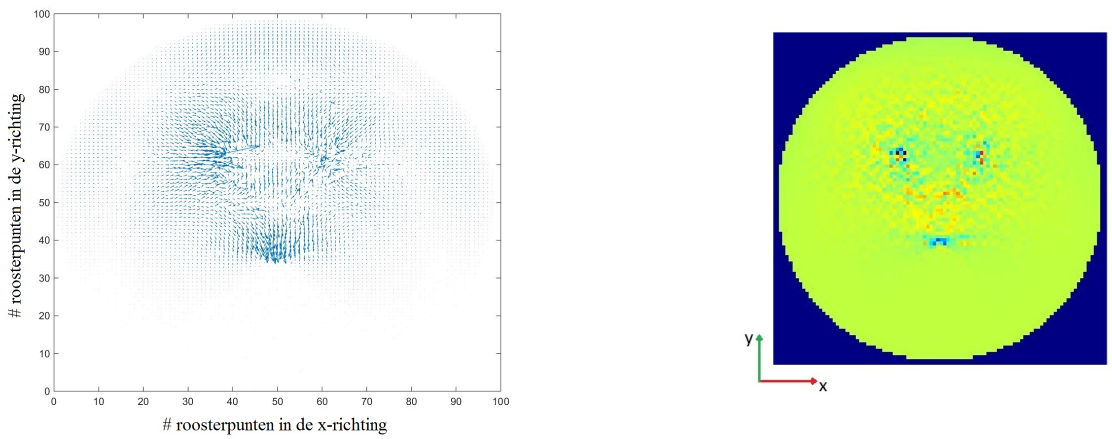
Figuur 30: Visualisatie van de power flow in Comsol voor de configuratie met 2 bronnen en 1 drain. De dimensies van de plaat in x- en y-richting zijn weergegeven in mm.

Allereerst zijn de magnitude- en fasemappen van alle momenten en snelheden uitgerekend in Comsol, doorgestuurd. In stap 1 is het dus enkel de visualisatie die gebeurt in Matlab. Onderstaande visualisatie door middel van een quiver plot is inherent minder duidelijk dan dit rechtstreeks geplot in Comsol, maar voldoet zeker wel om karakteristieken uit af te leiden. De rechtse figuur toont de divergentie, waardoor makkelijker een bron/drain kan gevonden worden. Gaande van blauw, dat aangeeft dat er veel energie wegstroomt, tot rood waar er veel energie toekomt. Hier is dit niet zo duidelijk, de twee bronnen zijn nauwelijks zichtbaar en kunnen uit de divergentiemap alleen niet als bronnen kunnen geïdentificeerd worden.



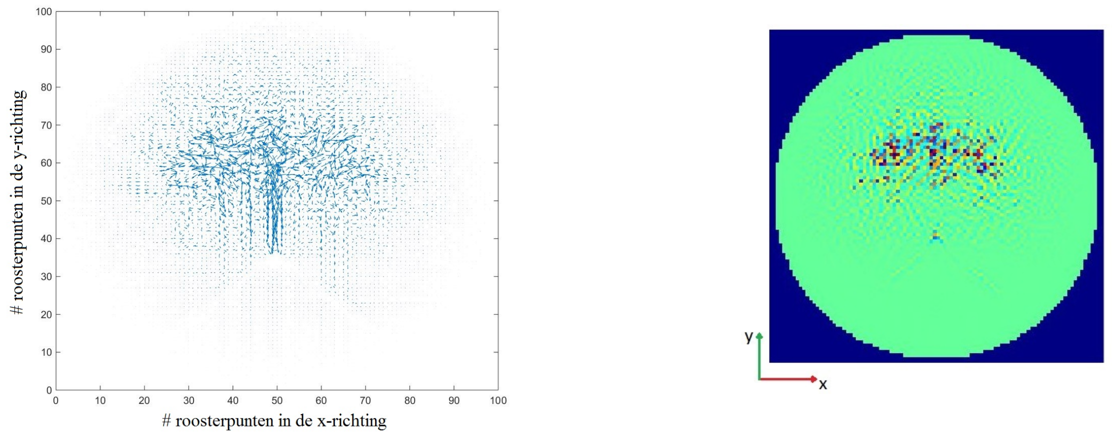
Figuur 31: Figuur links: visualisatie van de power flow in Matlab voor de configuratie met 2 bronnen en 1 drain. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow.

In een tweede stap werden de magnitude- en fasemap voor de snelheid uitgerekend in Matlab door het ontwikkelde algoritme.



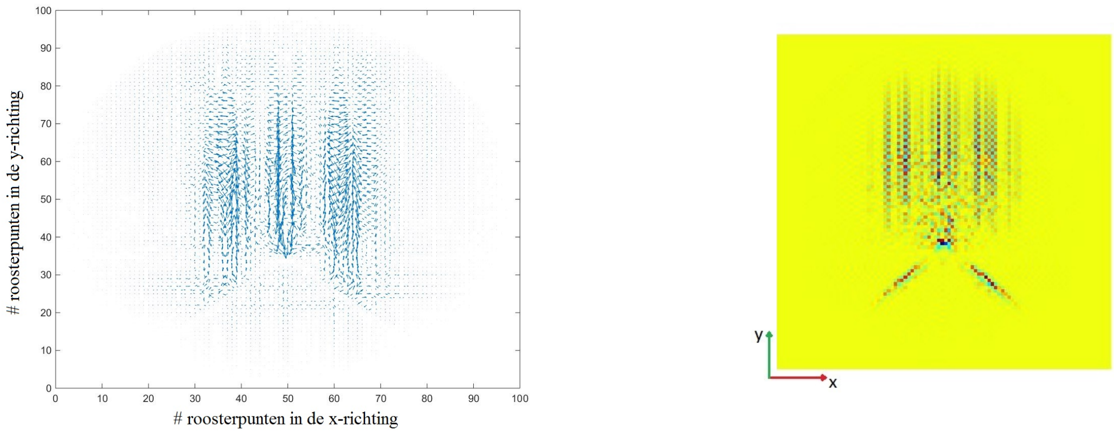
Figuur 32: Idem figuur (31), waarbij de magnitude- en fasemappen voor de snelheid berekend zijn in Matlab.

De stromingsmap op zich is niet voldoende om duidelijke informatie te bekomen, waardoor er weer gekeken is naar de divergentie. Nu is ook de drain zichtbaar. Vervolgens worden in stap drie de magnitude- en fasemappen dan weer enkel berekend voor de momenten en niet voor de snelheid. Dit leverde:



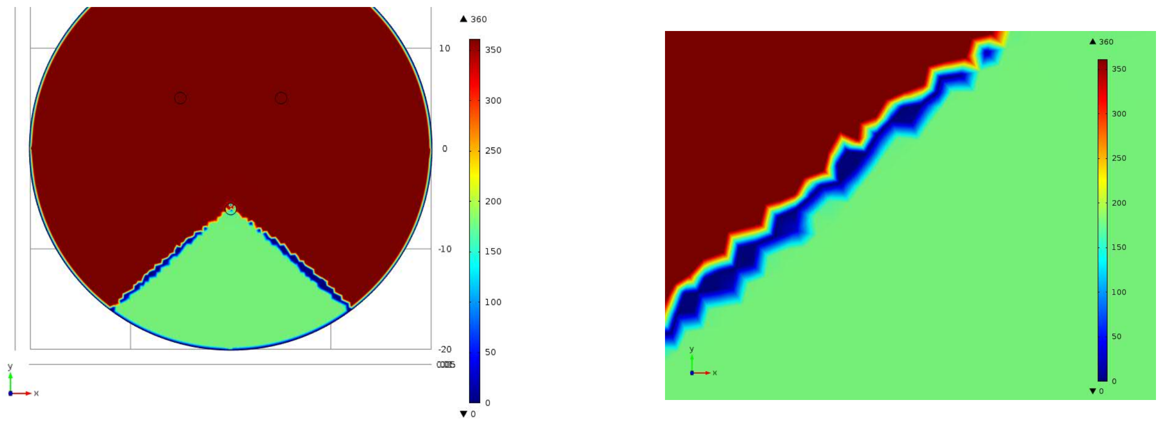
Figuur 33: Idem figuur (31), waarbij de magnitude- en fasemappen voor de momenten berekend zijn in Matlab.

In de stromingsmap is onderaan een fout te zien, afkomstig van de data van het eindige elementen programma. Deze fout propageert als het ware door het de data waardoor deze er zeer slecht uitziet. In figuur (34) is dit nog duidelijker. In de figuur rechts zijn hier weer enkel de 2 bronnen aanwezig en minder duidelijk dan voorheen. Dit komt omdat bij de berekening van de momenten er hogere orde spatiale afgeleiden (tot derde orde) moeten genomen worden. Kleine pieken bij de verplaatsing leiden op deze manier tot dit resultaat. Als laatste, zijn bij de vierde stap alle benodigde mappen uitgerekend in Matlab aan de hand van tijdsmappen uit Comsol.



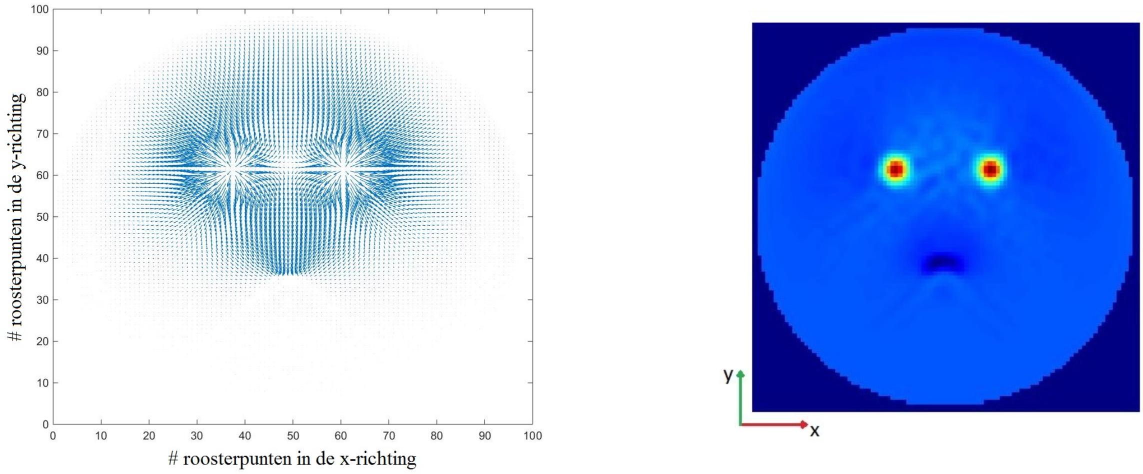
Figuur 34: Idem figuur (31), waarbij zowel de magnitude- en fasemappen voor de snelheid als de voor de momenten berekend zijn in Matlab.

Ook hier is duidelijk iets aan de hand waardoor er onderaan lijnen gevormd worden die in de twee eerste figuren niet zichtbaar zijn. Zoals eerder vermeld, zit dit al in de data afkomstig van Comsol en heeft dus niets te maken met het algoritme in Matlab. Het is namelijk zo dat enkel op de nodes van de elementen waaruit het model is opgebouwd de waarden exact worden uitgerekend. Wanneer vervolgens deze waarden worden opgevraagd in een vlak, wordt dit bekomen door interpolatie. In de fasemap van de verplaatsing worden de 2π-sprongen echter ook geïnterpoleerd, wat tot fouten leidt. Dit wordt weergegeven in onderstaande figuur. Zoals te zien zijn de 2π-sprongen niet meer instantaan.

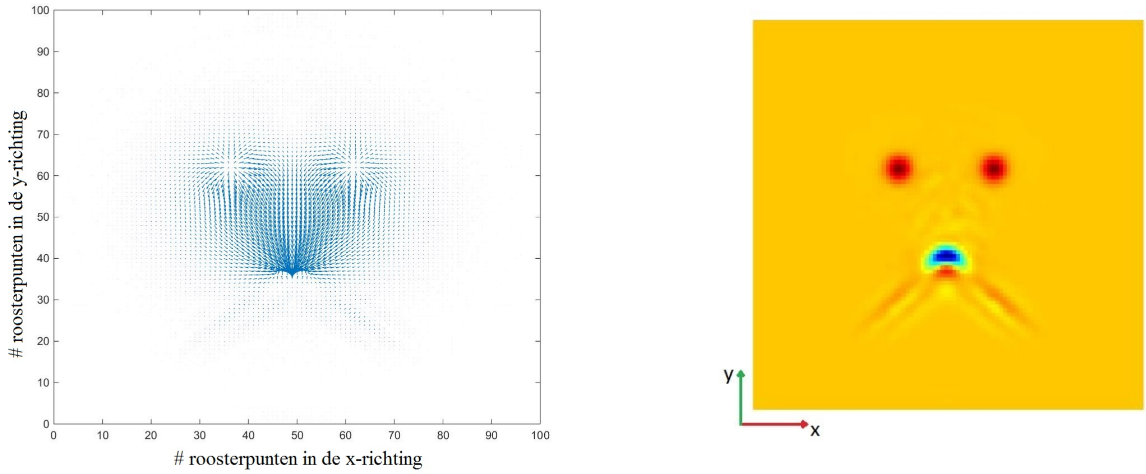


Figuur 35: Links: fasemap van de out-of-plane verplaatsing. Rechts: ingezoomd op het interpolatieprobleem. De 2π-overgang van rood naar blauw moet instantaan zijn, wat niet het geval is.

Even voor de duidelijkheid vermelden dat in het zelf geïmplementeerde algoritme wel degelijk de fasemap zelf wordt berekend. Maar aangezien het model is opgebouwd in het frequentiedomein, konden de trillingsmappen niet rechtstreeks op verschillende tijdstippen worden opgevraagd, maar wel de magnitude- en fasemap. Uit deze mappen werd dan eerst de trillingsmappen gereconstrueerd. Zodoende zit deze fout ook in de tijdsmappen, dewelke het startpunt van het eigen algoritme vormen. Er is getracht dit op te lossen door van deze map eerst de sinus en cosinus te nemen en vervolgens de inverse tangens. Dit bleek niet altijd de oplossing en daarom is gekozen om ook deze ruisloze data te filteren, waarbij de reden hier niet de ruis is maar het bovengenoemde. Gebruik van deze low pass filter zorgt ervoor dat de pieken in de verplaatsingsdata afkomstig van de interpolatie deels verwijderd worden. Dit heeft een grote invloed op de laatste twee besproken:



Figuur 36: Figuur links: power flow waar de mappen enkel uitgerekend worden voor de snelheid, en na toepassing van een low pass filter. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow na toepassing van de filter.

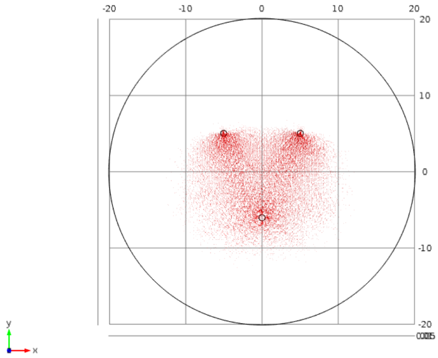


Figuur 37: Figuur links: power flow waar alle mappen uitgerekend zijn in Matlab, en na toepassing van een low pass filter. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow na toepassing van de filter.

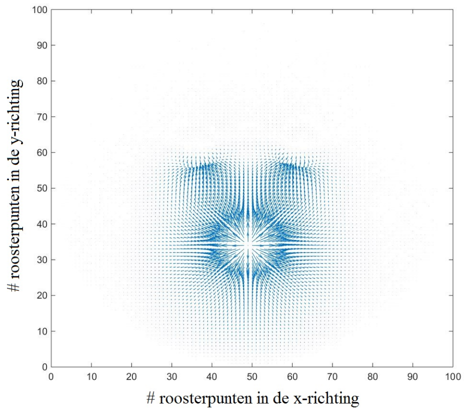
Zowel de stromingsmap als de divergentie map geven deze keer wel een duidelijk beeld van waar de bronnen en drain zich bevinden. De interpolatiefout zorgt nog steeds voor een merkbaar effect, maar staat nu de interpretatie van de data niet meer in de weg. Als laatste is het belangrijk om te vermelden dat de problemen met de interpolatie van de fasemap te wijten zijn aan het FEM model en dus niet zullen voorkomen bij metingen aan een werkelijk object.

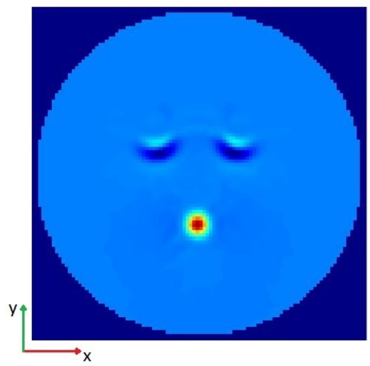
In wat volgt worden kort de resultaten voor de overige configuraties weergegeven en besproken. Hierbij is telkens dezelfde filtering gehanteerd als hierboven.

7.2.2 1 lokale bron en 2 lokale drains

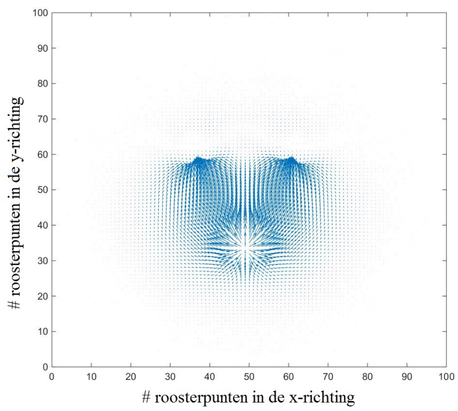


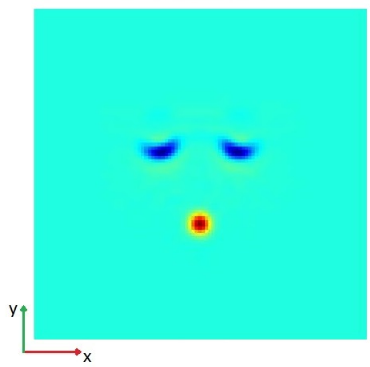
Figuur 38: Visualisatie van de power flow in Comsol voor de configuratie met 1 bron en 2 drains.





Figuur 39: Figuur links: power flow waar de mappen enkel uitgerekend worden voor de snelheid, en na toepassing van een low pass filter. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow na toepassing van de filter.

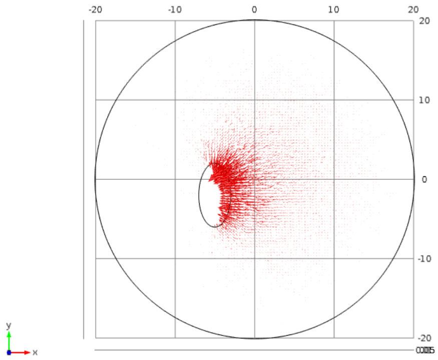




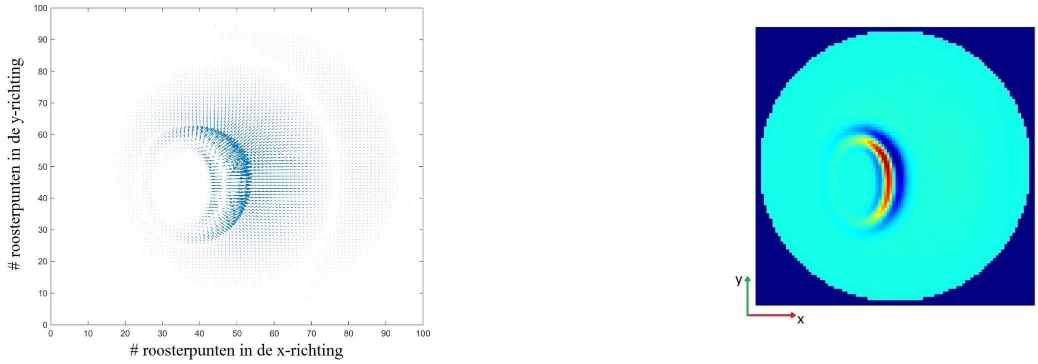
Figuur 40: Figuur links: power flow waar alle mappen uitgerekend zijn in Matlab, en na toepassing van een low pass filter. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow na toepassing van de filter.

Wanneer figuren (37) en (38) vergeleken worden met respectievelijk figuur (39) en (40), kan inderdaad aan de hand van de divergentiemappen opgemerkt worden dat drain en bron omgewisseld zijn.

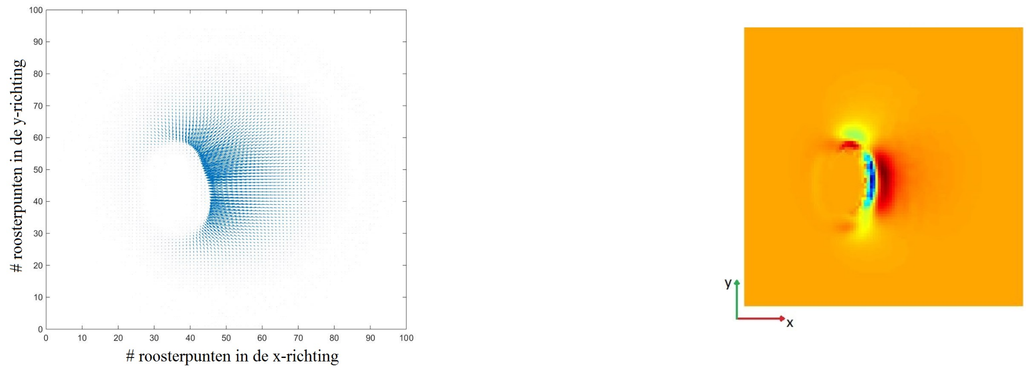
7.2.3 1 globale bron en 1 lokale drain



Figuur 41: Visualisatie van de power flow in Comsol voor de configuratie met 1 globale bron en 1 lokale drain.



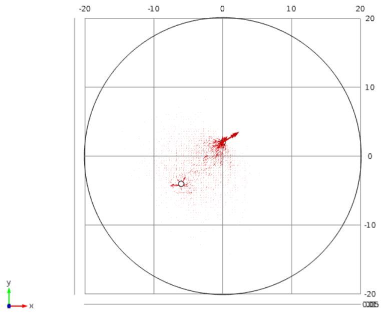
Figuur 42: Figuur links: power flow waar de mappen enkel uitgerekend worden voor de snelheid, en na toepassing van een low pass filter. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow na toepassing van de filter.



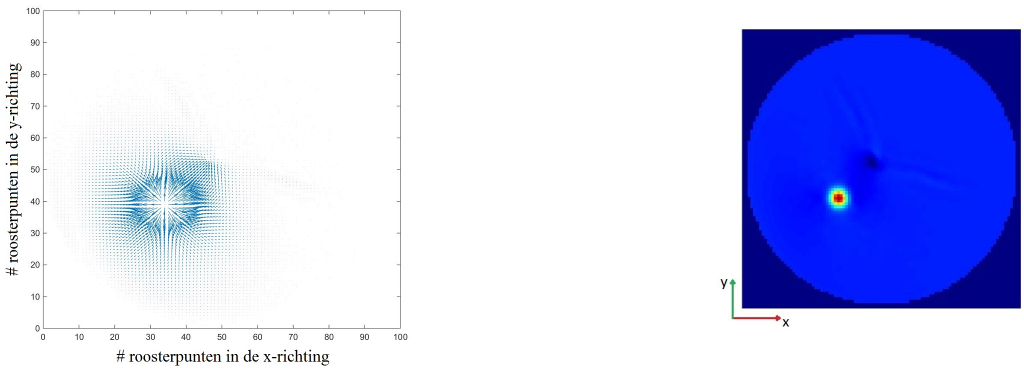
Figuur 43: Figuur links: power flow waar alle mappen uitgerekend zijn in Matlab, en na toepassing van een low pass filter. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow na toepassing van de filter.

Aan de hand van de stromingsmappen is duidelijk de lokale drain op te merken. Door de grotere afmeting is binnenin de drain de energiestroom onbestaand. Het zijn deze situaties bij biomedische objecten die kunnen leiden tot nieuwe informatie over de vraag of dat de vibratie energie wegstroomt langs de randen of over het ganse oppervlak. Dit keer geven de divergentie mappen minder eenduidige informatie. Door verdere studie van configuraties als deze hierboven kan mogelijk betere informatie gededuceerd worden uit de divergentiemap van meer complexe objecten.

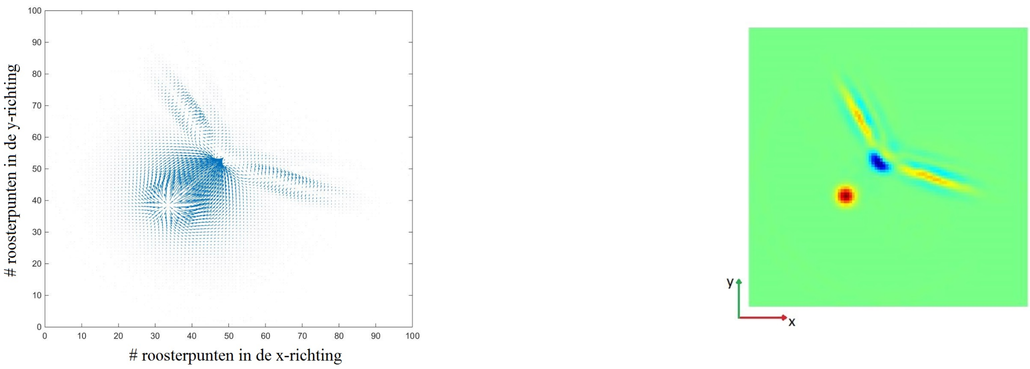
7.2.4 1 lokale bron en 1 lokale drain



Figuur 44: Visualisatie van de power flow in Comsol voor de configuratie met 1 lokale bron en 1 lokale drain.



Figuur 45: Figuur links: power flow waar de mappen enkel uitgerekend worden voor de snelheid, en na toepassing van een low pass filter. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow na toepassing van de filter.



Figuur 46: Figuur links: power flow waar alle mappen zijn uitgerekend in Matlab, na toepassing

van een low pass filter. Figuur rechts: de divergentie van deze power flow na toepassing van de filter.

De problemen in verband met de interpolatie over de fasesprongen lijken hier terug op te duiken. De filtering is bewust zo klein mogelijk gehouden opdat de data niet te veel zou vervormen, waardoor het dus nog steeds mogelijk is dat fouten aanwezig blijven.

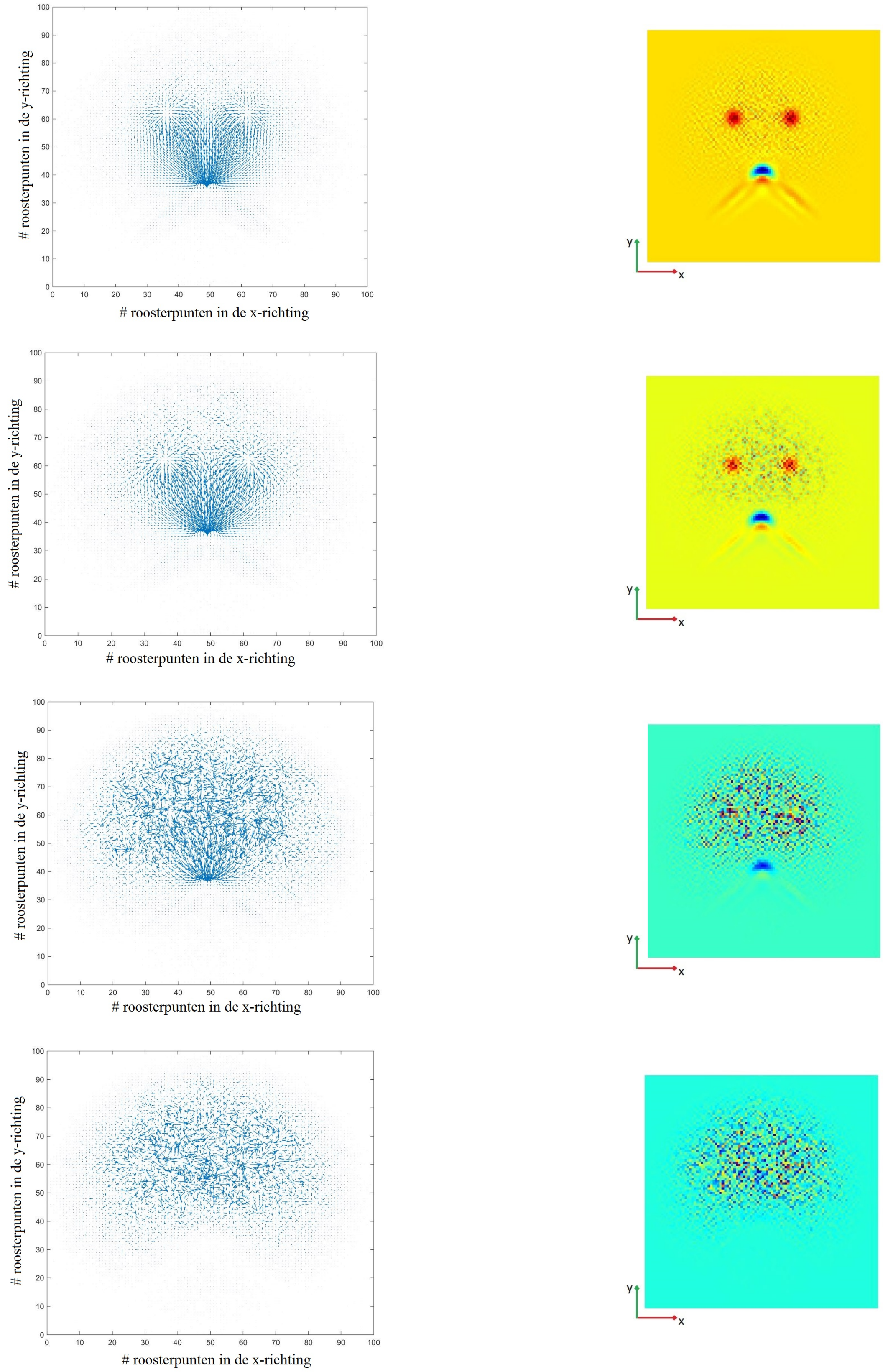
Al samenvattend kan gezegd worden dat het zelf ontwikkelde algoritme in staat is om bronnen en drains te lokaliseren en deze van elkaar te onderscheiden. Ook de stroming van bron naar drain kan duidelijk geïnterpreteerd worden. Er wordt nogmaals benadrukt dat het gebruik van een filter tot dusver niets maken heeft met ruis, maar dat de aanleiding het interpolatieprobleem van de 2π-sprongen is. Deze problemen zullen zich niet voordoen bij metingen aan de opstelling. In wat volgt onderzoeken we de invloed van ruis op de metingen, of anders: tot welke signaal-ruis verhouding (SNR) is het mogelijk om iets zinnigs te zeggen?

7.3 Invloed van ruis

In wat volgt onderzoeken we de limiet tot waar nuttige informatie kan gehaald worden uit de stromings- en divergentiemappen bij toenemende SNR. We beschouwen hiertoe de configuratie met 2 bronnen en 1 drain. De kwaliteit van een interferogram bekomen door holografie wordt door verschillende factoren beïnvloedt. Vele van deze ruiscomponenten spelen echter vaak maar een kleine rol, zoals bv. elektronische ruis. De ruis die hoofdzakelijk aanwezig en dus een prominente rol speelt bij het onderzoek naar de bovenlimiet van ruis dat mag aanwezig zijn, staat bekend als speckle noise. Deze ruis heeft als directe oorzaak het optisch ruw zijn van het oppervlak van het object. Hierdoor treedt bij coherent licht ongewenst constructieve en destructieve interferentie op. Speckle noise zal in het beeld dus te zien zijn als heldere en donkere vlekken. Er is in twee stappen te werk gegaan: in een eerste stap is een uniform verdeelde random ruis gesuperponeerd op de trillingsmappen afkomstig uit Comsol, en dit voor variërende signaal-ruis verhoudingen. In een volgende, meer realistische stap met betrekking tot holografie is dit herhaald voor speckle noise. Op deze manier is getracht een zo goed mogelijke afschatting te bekomen van de signaal-ruisverhoudingen tot waar de power flow techniek bruikbaar is. 'Zo goed mogelijk' omdat dit zeker niet evident is, bijvoorbeeld de speckle grootte is afhankelijk van verschillende factoren. In sommige gevallen is deze dus groter dan één pixel. Ook is het zo dat een uitdrukking voor de signaal-ruis verhouding veel minder eenduidig is, immers het beeld en de speckle noise worden beiden gevormd door coherent licht met dezelfde golflengte. Hierdoor zijn er verdere interferenties tussen beide, waardoor de SNR niet simpelweg kan gedefinieerd worden als de verhouding van de grootte van het signaal tot de standaardafwijking van de speckle noise [8]. Aangezien het niet de bedoeling is dat deze thesis een uiteenzetting wordt over signaalverwerking, is een eerder intuïtieve definitie gebruikt: de relatieve verandering van de grootte van het signaal. Ook overschrijdt in (7.3.2) de speckle grootte niet de dimensie van één pixel.

7.3.1 Additieve random noise

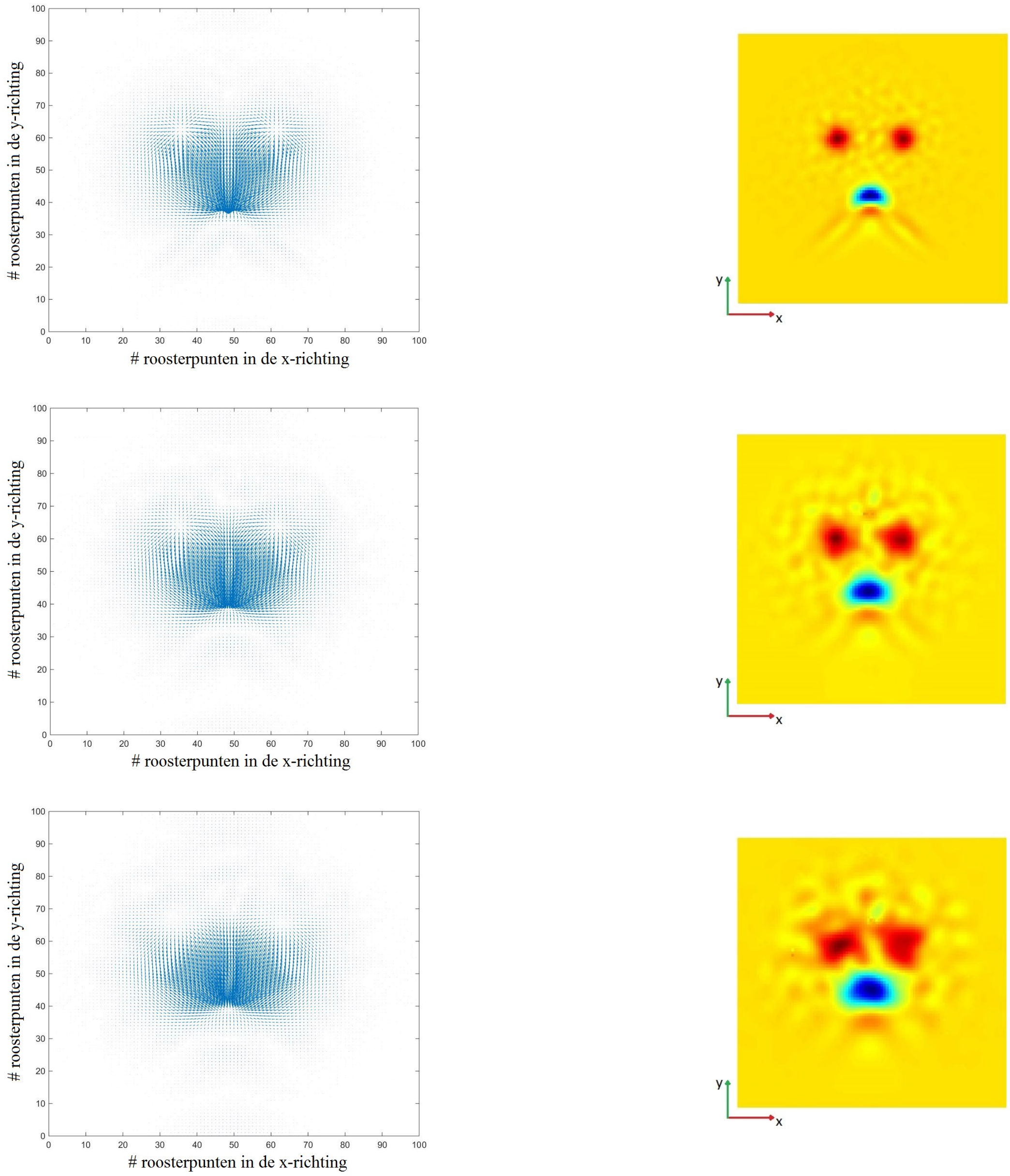
In een eerste stap zal nagegaan worden tot welke signaal-ruisverhouding bruikbare informatie af te leiden is wanneer geen gebruik zou gemaakt worden van een low pass filter.



Figuur 47: Power flow stromings- en divergentiemappen behorend bij verschillende signaal-ruisverhoudingen voor random additieve ruis en zonder gebruik te maken van een low pass filter. Van boven naar onder SNR = 10^5, 5.10^4, 10^4 en 10^3.

Vanaf een signaal-ruisverhouding van 10^4 kan men niet meer met zekerheid de twee bronnen lokaliseren. Bij deze verhouding is het nog wel steeds mogelijk de drain te vinden. Als de ruis verder verhoogt wordt tot een SNR van 1000 wordt dit ook onmogelijk.

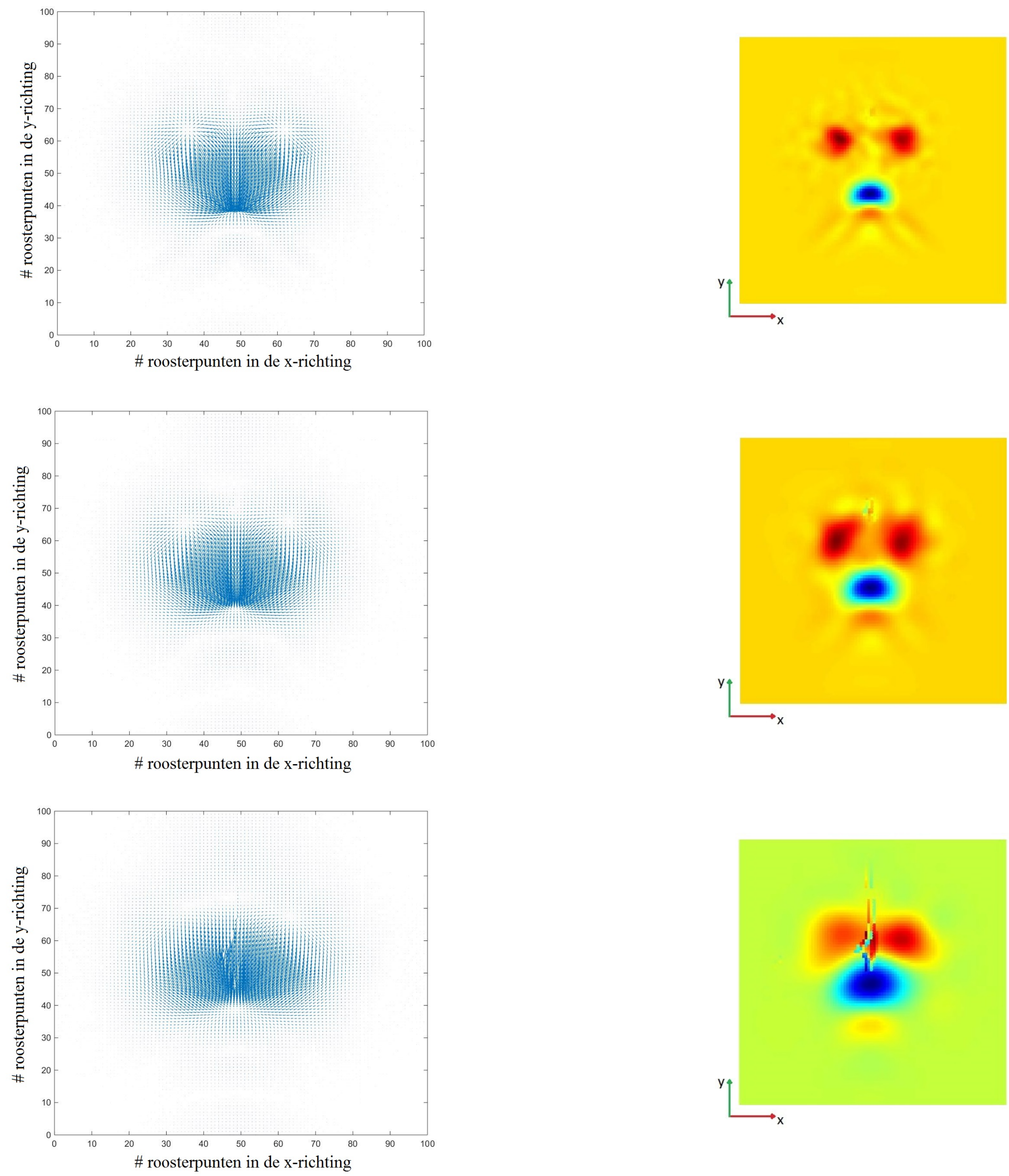
Laten we nu de situatie bekijken wanneer een low pass filter met Gaussisch profiel wordt toegepast, met als doel de hoog frequente componenten afkomstig van de ruis te verwijderen. Er werd gestart van een SNR van 1000 waarbij de grens van de low pass filter telkens zo optimaal mogelijk werd afgesteld.



Figuur 48: Power flow stromings- en divergentiemappen behorend bij verschillende signaal-ruisverhoudingen voor random additieve ruis bij gebruik van een gaussische low pass filter. Van boven naar onder is de SNR = 1000, 100, 25.

Door de filter bij de lagere signaal-ruis verhoudingen aan te passen wordt de onzekerheid op de exacte positie van de bronnen/drain groter. De hoger frequente spatiale informatie wordt in dit proces immers mee verwijderd. Op basis van bovenstaande resultaten kan besloten worden dat voor additieve random ruis het algoritme tot zeer lage SNR nuttige informatie levert. Hoogstwaarschijnlijk is één van de redenen hiervoor dat bij random noise geen correlatie bestaat tussen de ruis bij naburige pixels. Hierdoor is dit zeer hoog frequent en is er een grotere scheiding tussen de spatiale informatie van de verplaatsingmappen en deze van de ruis. Hierdoor kan de ruis zelfs bij zeer lage signaal-ruis verhouding zonder al te veel moeite verwijderd worden.

7.3.2 Speckle noise



Figuur 49: Power flow stromings- en divergentiemappen behorend bij verschillende signaal-ruisverhoudingen voor multiplicatieve speckle noise bij gebruik van een gaussische low pass filter. Van boven naar onder is de SNR = 600, 60 en 6.

Bij gebruik van een gaussische low pass filter is tot een SNR van orde 10 nuttige informatie te deduceren. Ook opdrijven van het aantal tijdsmappen heeft een positief effect, maar dit is niet rechtstreeks verbonden met de speckle noise. Door het hoger aantal tijdsmappen kan het algoritme de fase- en magnitudemappen gewoon weg beter bepalen. De duur van de meting hangt lineair af van het aantal tijdsmappen, dus op zich is dit zeker mogelijk. De limiterende factor in dit geval is het werkgeheugen aanwezig, voor de gebruikte apparatuur was ongeveer 32 tijdsmappen de limiet. Herhalingen van dezelfde sequentie van amplitudemappen en nadien de overeenkomstige mappen van het zelfde tijdstip uit middelen had ook een zichtbaar effect. Bij metingen aan de opstelling zijn deze herhalingen ook perfect mogelijk. Het nadeel hier is dat wanneer men bv. 10 sequenties wil opnemen, de duur ook met een factor 10 omhooggaat. Het aantal herhalingen nodig om een duidelijk effect te hebben, zou in dit geval een veel te grote tijdskost met zich meebrengen. Wanneer de gewenste SNR niet bekomen wordt, is gebruik van een van andere filter mogelijk effectiever. Ideaal zou een low pass filter alle signalen onder een bepaalde frequentie doorlaten zonder deze te vervormen. Een rechthoekige filter lijkt op het eerste zicht dus de beste keuze, zij het niet dat deze ringing artefacts veroorzaakt. Voor deze reden is tot hiertoe altijd een low pass filter met rotatiesymmetrisch gaussisch profiel gebruikt:

$$h(n, m) = \frac{h_g(n, m)}{\sum_n \sum_m h_g}$$

$$h_g(n, m) = \exp\left[\frac{-(n^2 + m^2)}{2\sigma^2}\right]$$

Met (n,m) de dimensies en σ de standaardafwijking van de filter. Twee meer geschikte filters in het geval van speckle noise zijn de moving average filter en de median filter, dewelke behoren tot de groep van de niet-adaptieve filters. Dit houdt in dat deze dezelfde uniforme weging toepassen over het hele beeld.

Als afsluiting van deze sectie wordt nog eens extra benadrukt dat in het voorgaande verschillende benaderingen en aannamen gebeurde, en dat dit dus zeker niet het volledige verhaal is. Hierdoor is dit in sommige situaties (bv. wanneer de speckle grootte stijgt) hoogst waarschijnlijk een overschatting van de SNR tot waar nuttige informatie af te leiden is. Een meer diepgaande signaalanalyse zou hierover finaal uitsluitsel kunnen geven, maar valt buiten de scope van deze thesis.

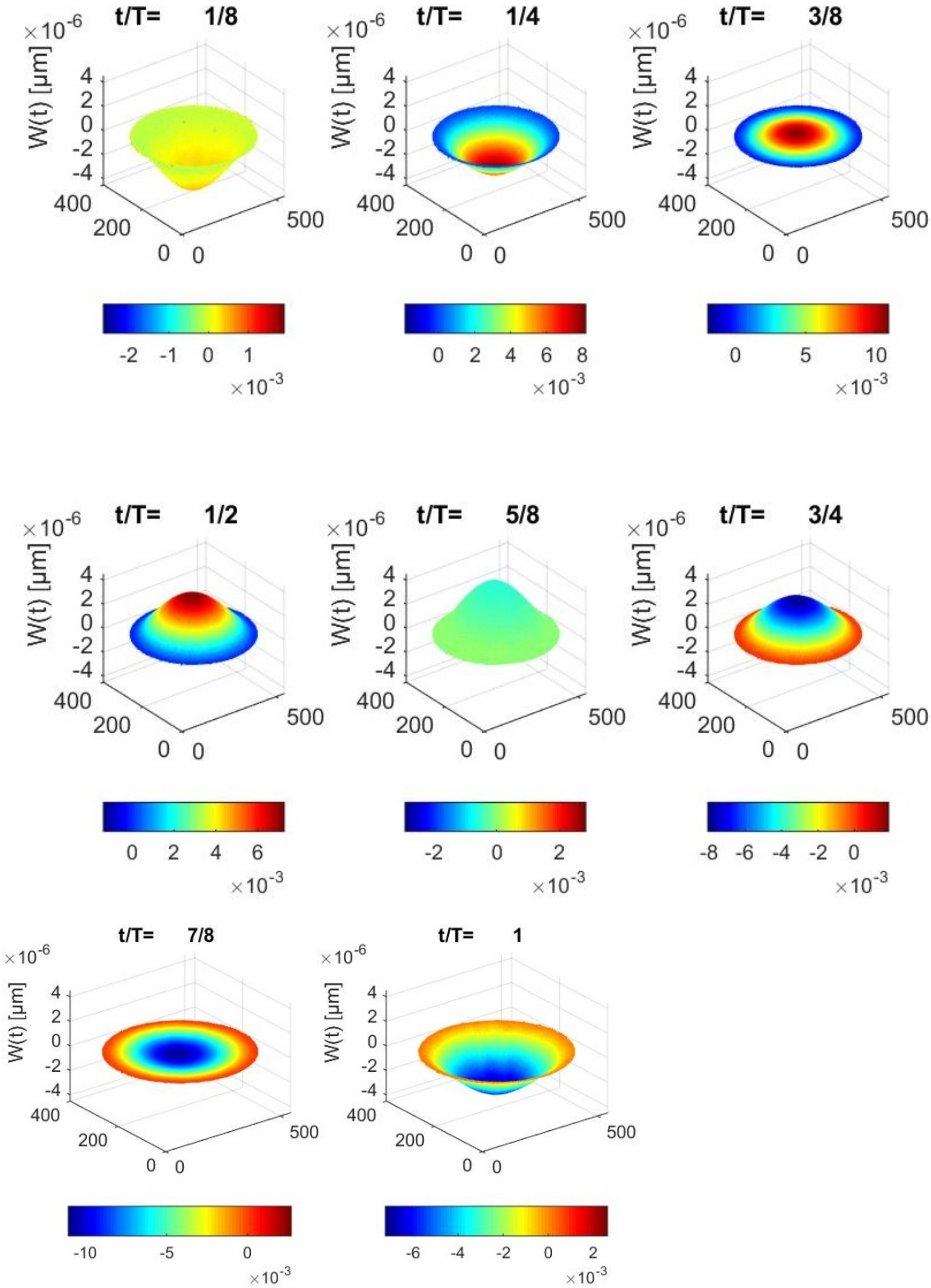
8. Metingen aan de opstelling

8.1 Resultaten

Allereerst zijn in 8.1.1 enkele tijdsmappen in de periode getoond voor het membraan besproken in hoofdstuk 6 (component K), en dit voor verschillende frequenties. Deze trilling werd teweeggebracht door de globale bron (component L). In 8.1.2 zijn vervolgens de magnitude-en fasemappen weergegeven die berekend zijn uit de tijdsmappen. Voor de resultaten in 8.1.3 is nog steeds gebruik gemaakt van hetzelfde membraan, maar hier doet component M dienst als bron (waardoor lokaal energie kan geïnjecteerd worden).

8.1.1 Tijdsmappen

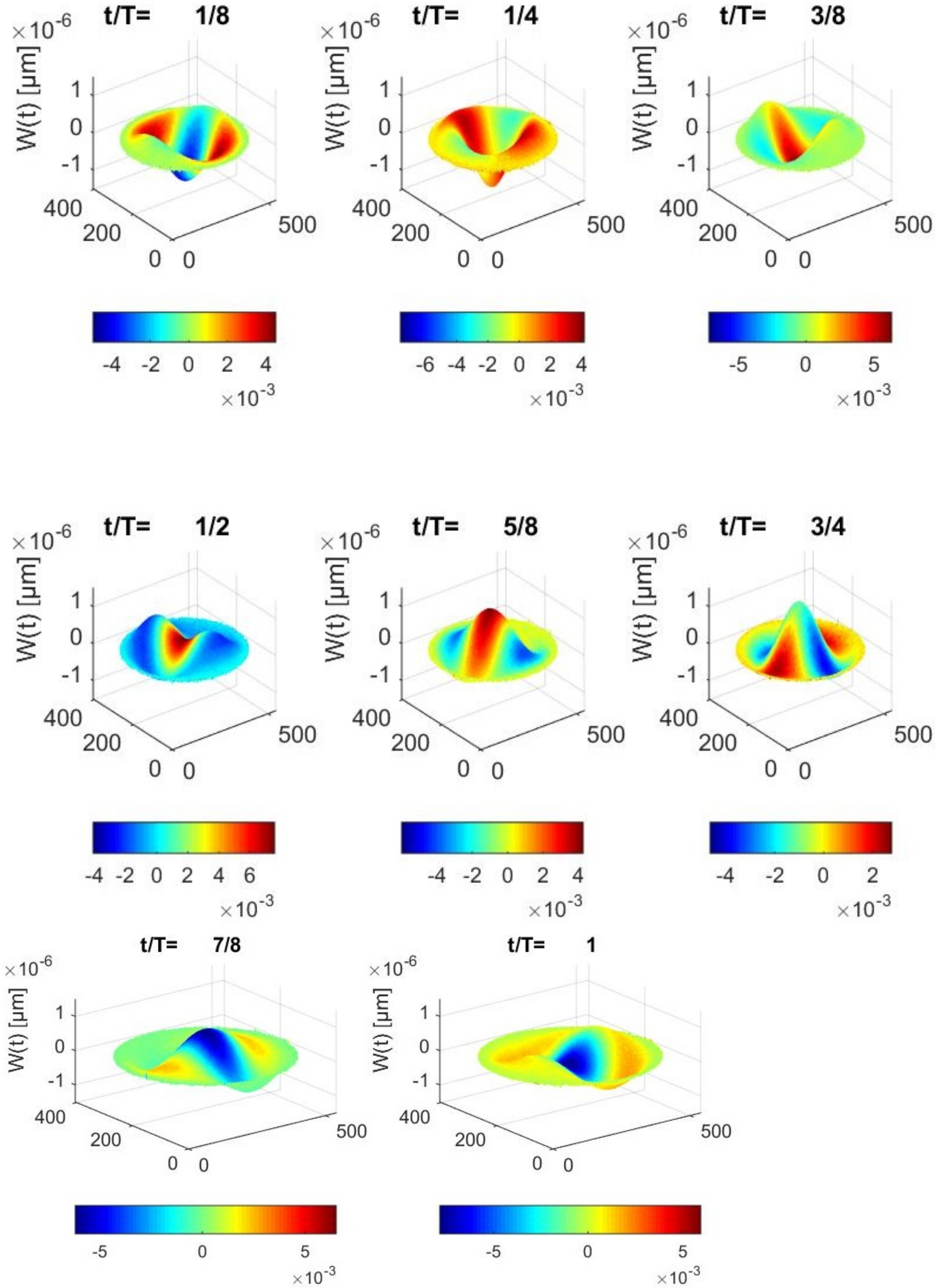
400 Hz



Figuur 50: Out-of-plane amplitudemappen W(t) in op verschillende tijdstippen t in de periode

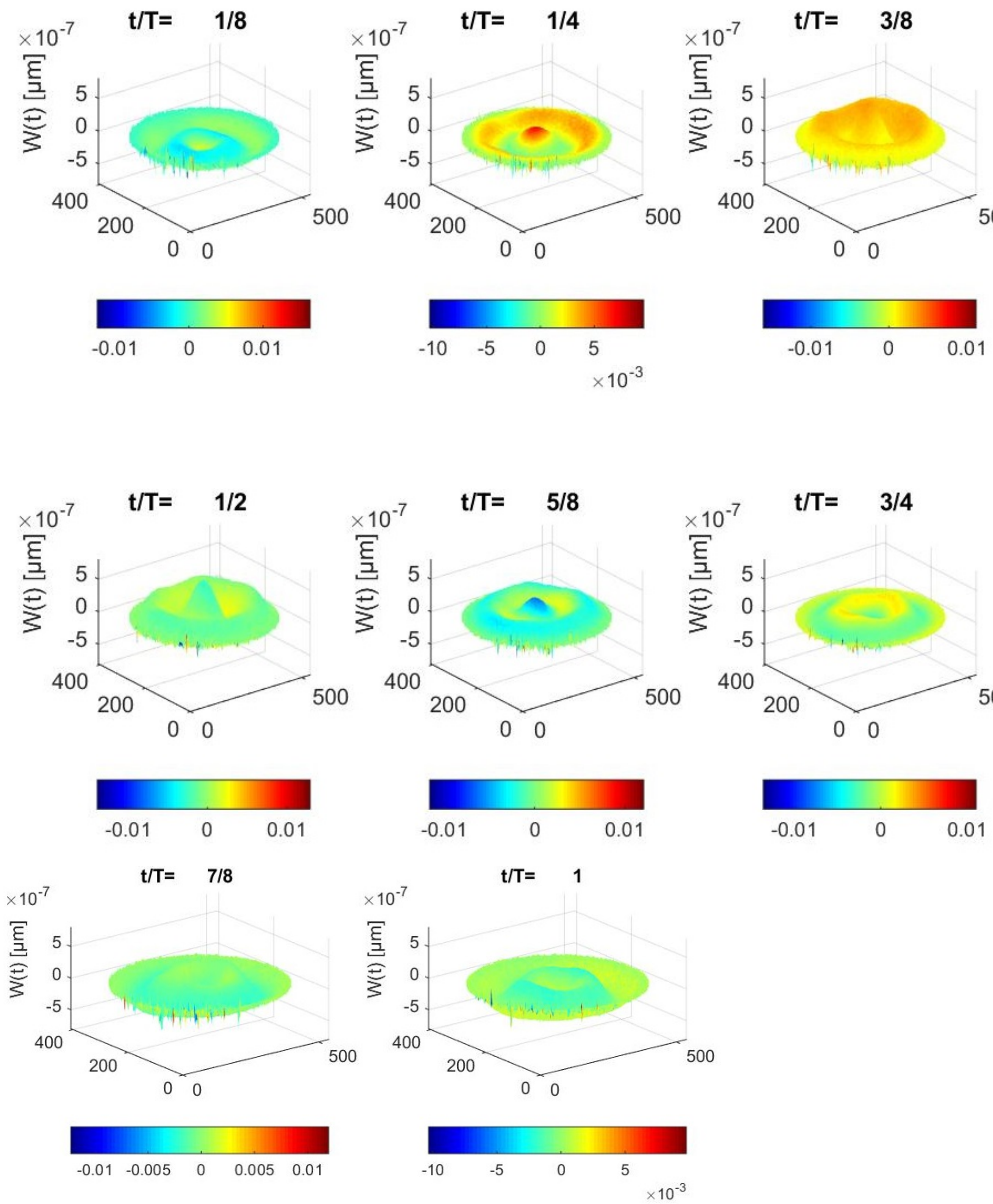
voor een frequentie van 400 Hz. De hoogte toont de verplaatsing en de kleur duidt voor elk punt van het membraan de snelheid V(t) aan op het beschouwde tijdstip.

900 Hz



Figuur 51: Out-of-plane amplitudemappen W(t) in op verschillende tijdstippen t in de periode voor een frequentie van 900 Hz. De hoogte toont de verplaatsing en de kleur duidt voor elk punt van het membraan de snelheid V(t) aan op het beschouwde tijdstip.

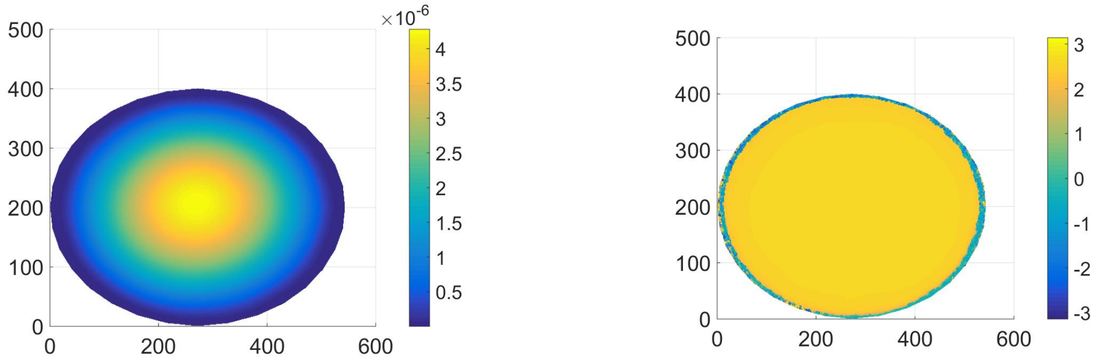
1800 Hz



Figuur 52: Out-of-plane amplitudemappen W(t) in op verschillende tijdstippen t in de periode voor een frequentie van 1800 Hz. De hoogte toont de verplaatsing en de kleur duidt voor elk punt van het membraan de snelheid V(t) aan op het beschouwde tijdstip.

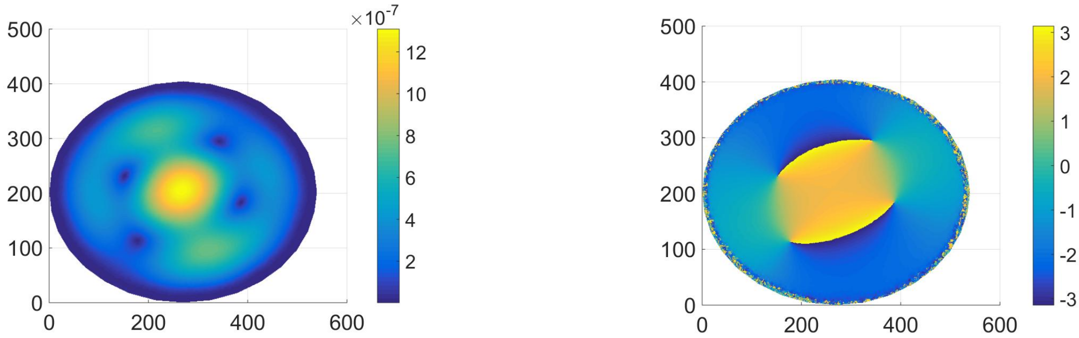
8.1.3 Magnitude- en fasemappen

400 Hz



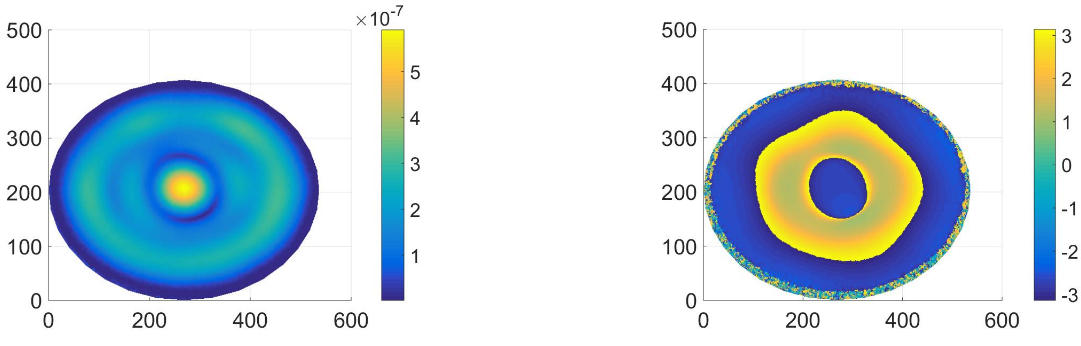
Figuur 53: Magnitude-en fasemap bepaald uit 32 tijdsmappen voor een frequentie van 400 Hz.

900 Hz



Figuur 54: Magnitude-en fasemap bepaald uit 32 tijdsmappen voor een frequentie van 900 Hz.

1800 Hz

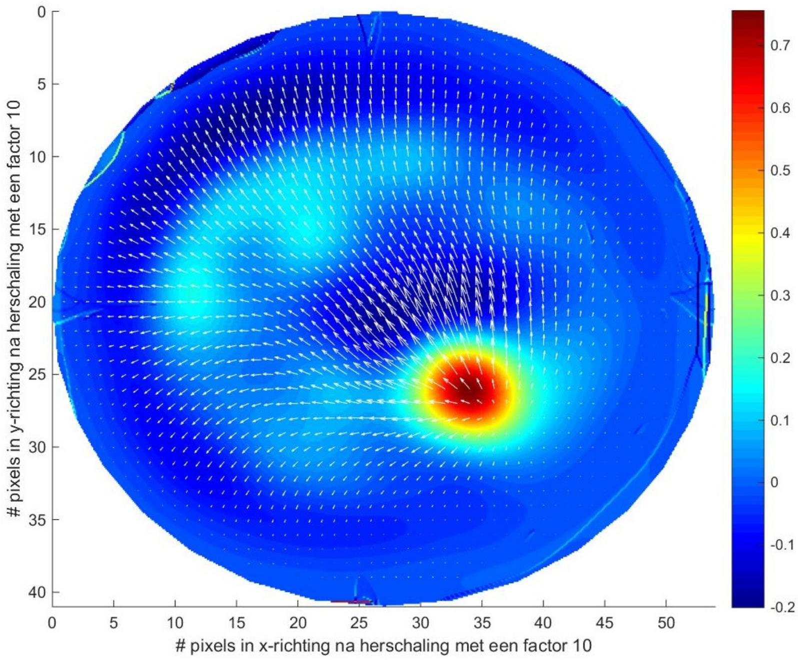


Figuur 55: Magnitude-en fasemap bepaald uit 32 tijdsmappen voor een frequentie van 1800 Hz.

8.1.3 Power flow en divergentiemappen

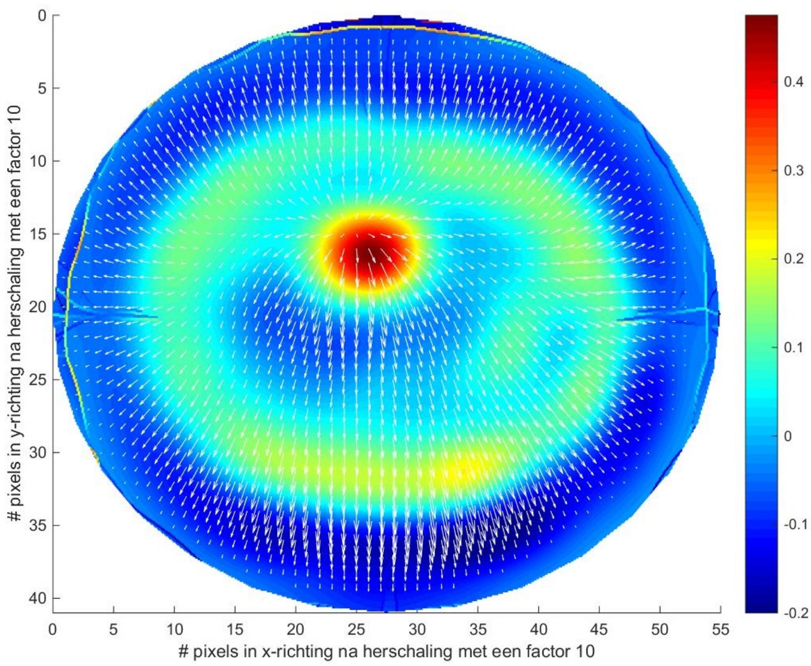
Onderstaand worden de resultaten weergegeven van de power flow metingen. De kleurenmap duidt telkens de divergentie aan en is telkens zo ingesteld opdat een duidelijk contrast bekomen werd. Daarom is de interpretatie van de kleurenmap verschillend voor elke meting. Lokale blauwe cirkels hebben als betekenis dat de energie uitstroom groter is dan de instroom: er is een drain aanwezig, energie wordt gedissipeerd. Rode cirkels duiden een energie instroom aan die groter is dan de energie uitstroom: er is een bron aanwezig, energie wordt geïnjecteerd. Op deze kleurenmap is het power flow stromingsschema gesuperponeerd door middel van witte pijlen. De grootte van de pijlen is evenredig met de grootte van de power flow.

Meting 1 bij 500 Hz: bron in de rechteronderhoek.



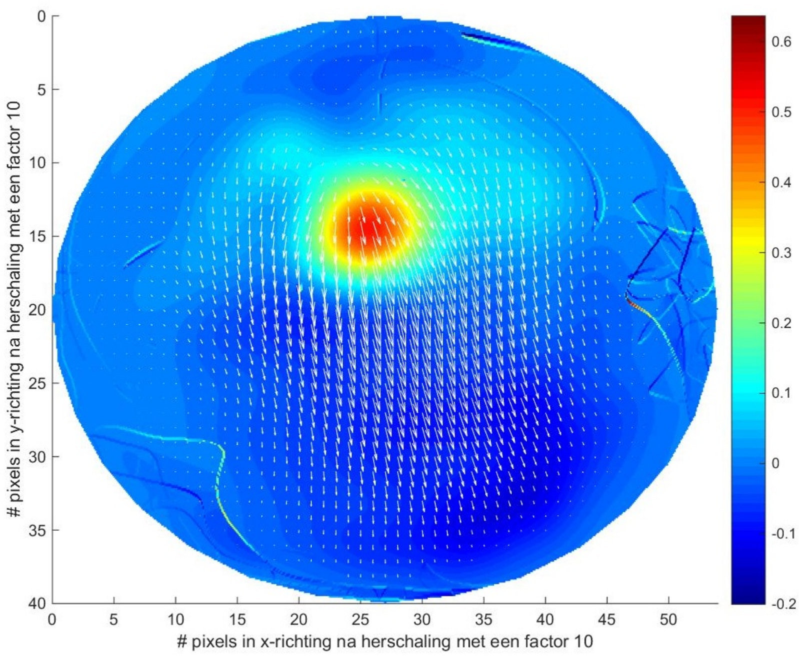
Figuur 56: Power flow en divergentiemap van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een lokale bron die geluid instuurt met een frequentie van 500 Hz.

Meting 2 bij 500 Hz: bron bovenaan in het midden.



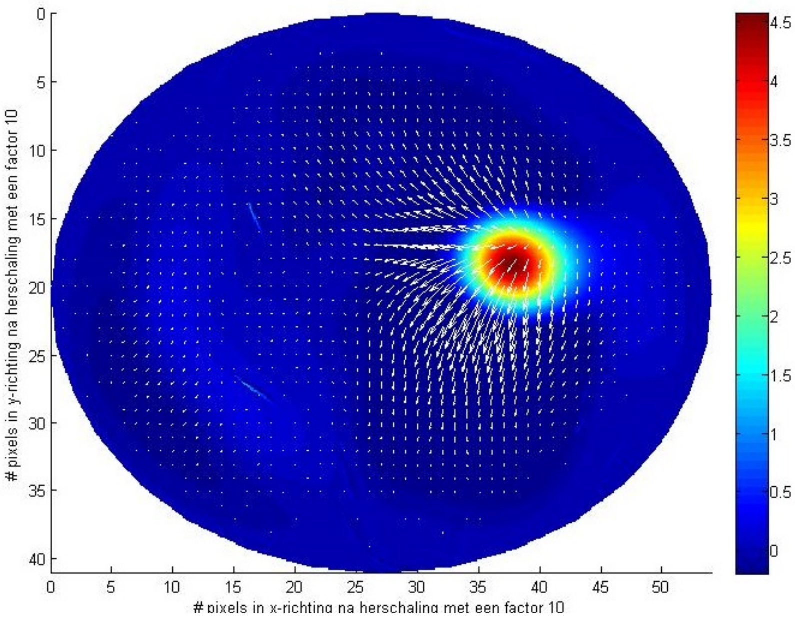
Figuur 57: Power flow en divergentiemap van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een lokale bron die geluid instuurt met een frequentie van 500 Hz. Ten opzichte van meting 1 is hier de locatie van de bron gewijzigd.

Meting 3 bij 800 Hz: bron bovenaan in het midden.



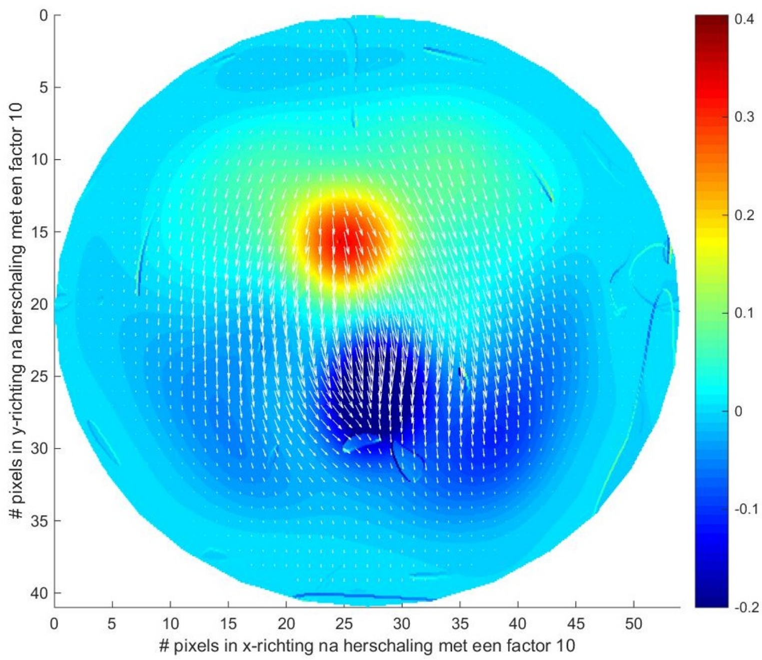
Figuur 58: Power flow en divergentiemap van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een lokale bron die geluid instuurt met een frequentie van 800 Hz. Ten opzichte van meting 2 is hier de frequentie van het ingestuurde geluid gewijzigd.

Meting 4 bij 800 Hz: bron rechts in het midden.



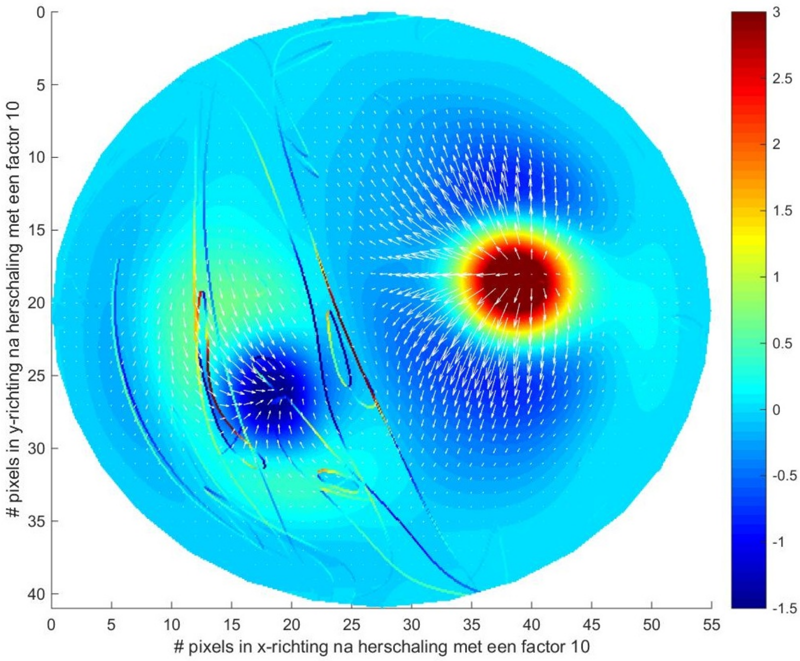
Figuur 59: Power flow en divergentiemap van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een lokale bron die geluid instuurt met een frequentie van 800 Hz. Ten opzichte van meting 3 is hier de locatie van de bron gewijzigd.

Meting 5 bij 800 Hz: bron boven sink.



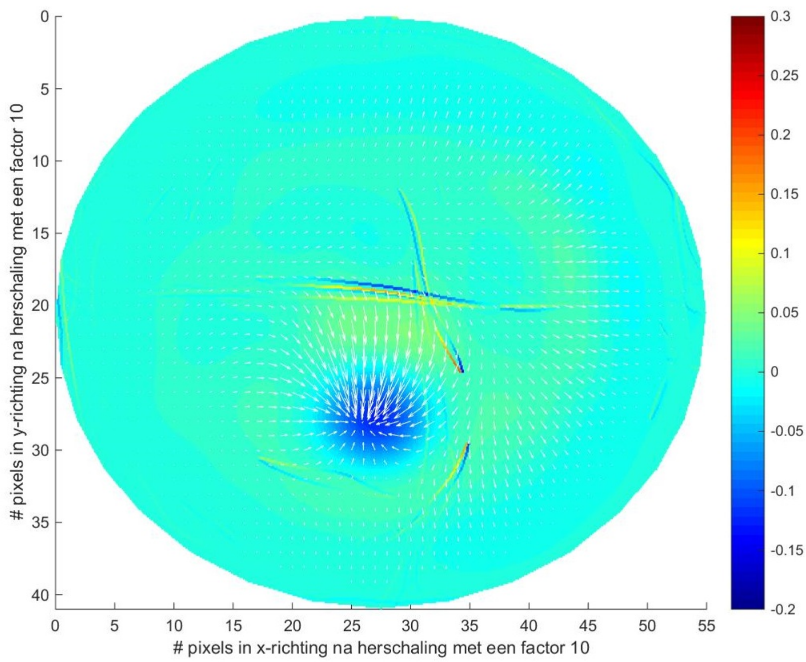
Figuur 60: Power flow en divergentiemap van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een lokale bron die geluid instuurt met een frequentie van 800 Hz, en energie gedissipeerd wordt door een lokale demper.

Meting 6 bij 800 Hz: bron diagonaal t.o.v. sink.



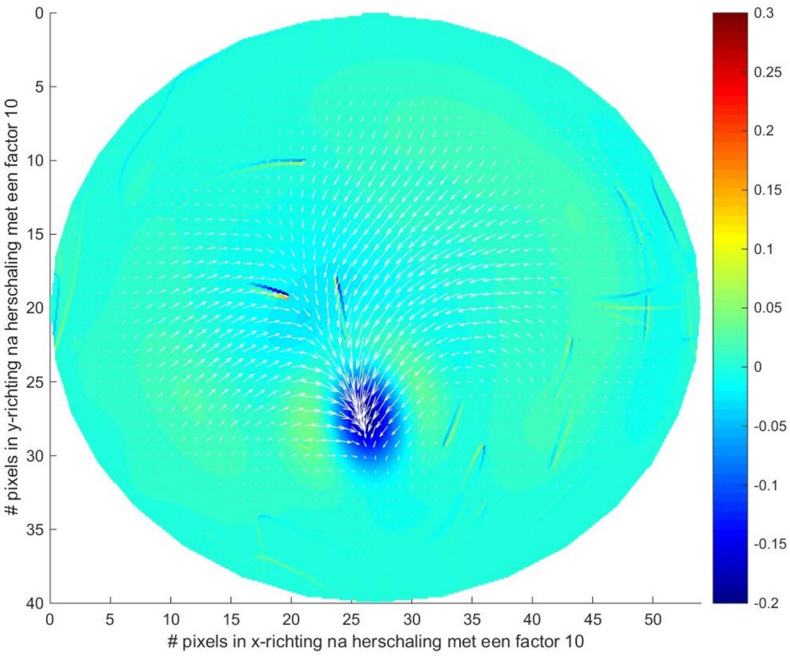
Figuur 61: Power flow en divergentiemap van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een lokale bron die geluid instuurt met een frequentie van 800 Hz, en energie gedissipeerd wordt door een lokale demper. Ten opzichte van meting 5 is hier de locatie van bron en demper gewijzigd.

Meting 7 bij 500 Hz: vrije veld bron en sink.



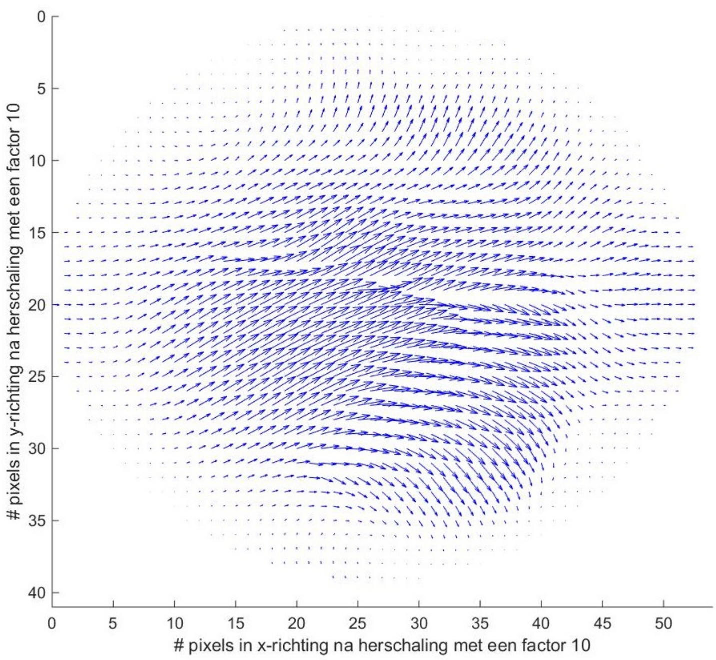
Figuur 62: Power flow en divergentiemap van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een vrije veld bron die geluid instuurt met een frequentie van 500 Hz, en energie gedissipeerd wordt door een lokale demper.

Meting 8 bij 800 Hz: vrije veld bron en sink.



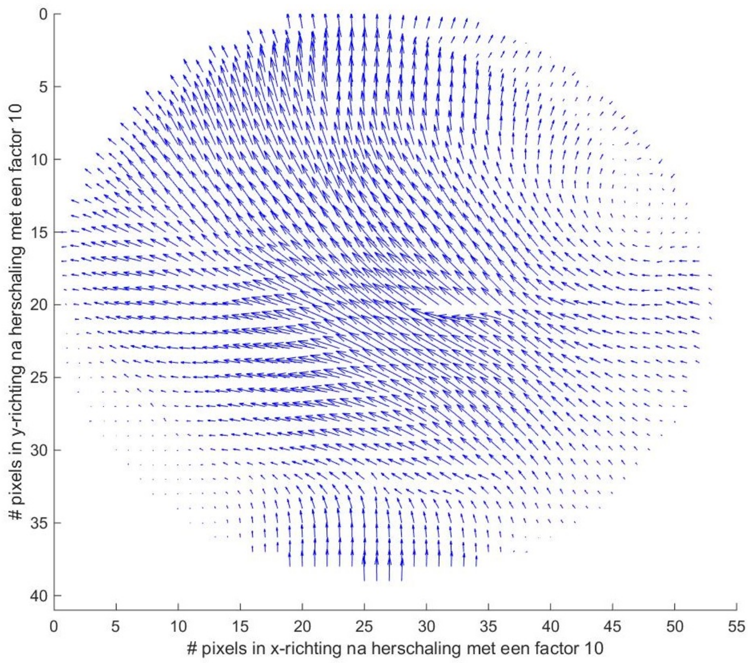
Figuur 63: Power flow en divergentiemap van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een vrije veld bron die geluid instuurt met een frequentie van 800 Hz, en energie gedissipeerd wordt door een lokale demper. Ten opzichte van meting 7 is hier de frequentie van het ingestuurde geluid gewijzigd.

Meting 9 bij 500 Hz: vrije veld bron links van object



Figuur 64: Power flow map van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een vrije veld bron die geluid instuurt met een frequentie van 500 Hz en links voor het membraan gepositioneerd staat.

Meting 10 bij 500 Hz: vrije veld bron rechts van object



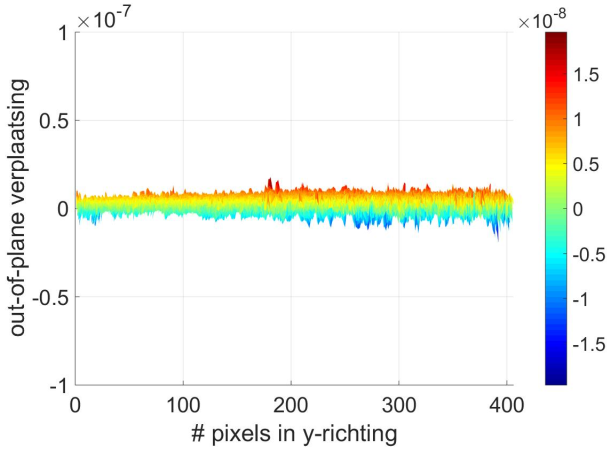
Figuur 65: Power flow map van een membraan waar energie geïnjecteerd wordt door een vrije veld bron die geluid instuurt met een frequentie van 500 Hz en rechts voor het membraan gepositioneerd staat.

In verschillende figuren, maar vooral bij meting zes zijn artefacten in de vorm van lijnen aanwezig. De oorzaak hiervan is dat een deel van de ruis nog niet volledig weggefilterd is. Hierdoor zijn er kleine onjuistheden aanwezig in de fasemappen. Aangezien deze mappen worden gebruikt in de definitie van de tijdsgemiddelde power flow componenten, propageren deze hierdoor verder tot het eindresultaat. De randen van deze onjuistheden vallen in de divergentiemap extra op.

Het is nog steeds zo dat er een afweging moet gemaakt worden tussen enerzijds ruis aanwezig laten in de amplitudemappen of anderzijds sterk filteren met de mogelijkheid dat waardevolle informatie verloren gaat (vervorming van de data, oversmoothing). Filteren is dus grotendeels een trial and error procedure, hetgeen ook vermeld wordt in [6]. Hier staan deze artefacten de interpretatie echter niet in de weg, waardoor in het huidig tijdsframe hier niet verder aandacht aan besteed is. Wanneer deze techniek in verder onderzoek zou toegepast worden, is het nuttig deze artefacten trachten te vermijden door het ideale punt tussen ruis en smoothing beter te bepalen. Automatisatie van deze filtering zou mogelijk beter zijn dan het handmatig instellen. In [9] wordt een automatisatie voorgesteld, de conclusie daar blijft echter nog steeds dat een deel handmatig dient te gebeuren.

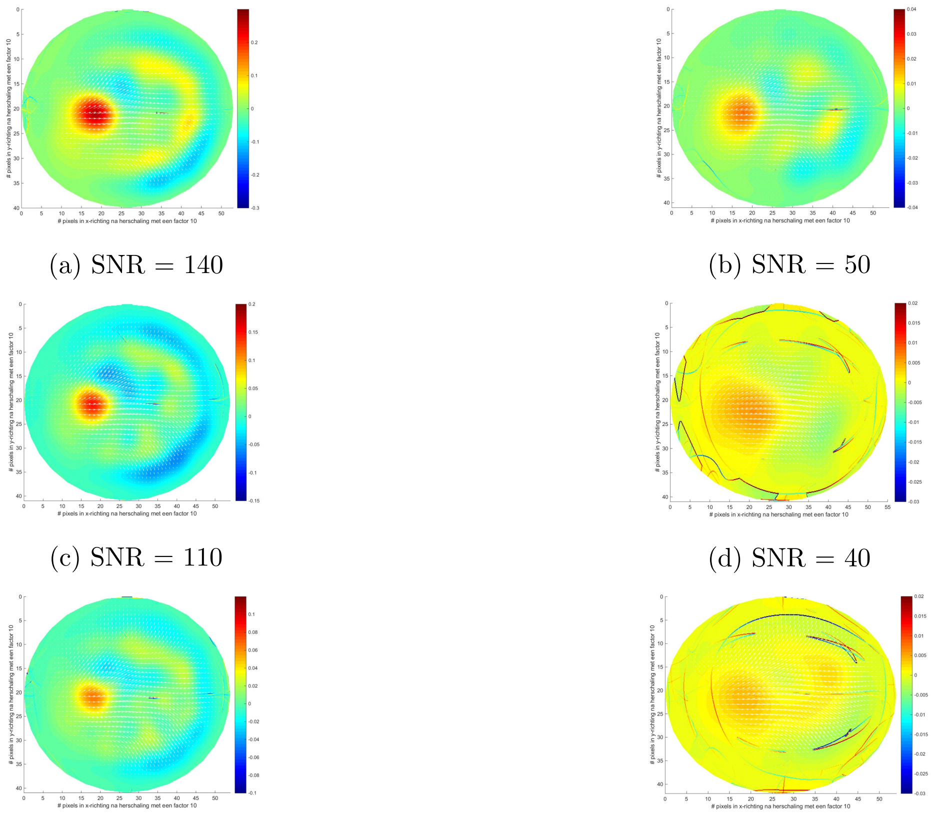
8.2 SNR van de metingen

Er is getracht om via metingen een afschatting te bepalen van de ondergrens voor de signaal-ruis verhouding tot waar informatie af te leiden valt uit de power flow map. Op deze manier zou de afschatting hier en deze bij hoofdstuk 7 met elkaar kunnen vergeleken worden, om zo mogelijk een meer realistische schatting te bekomen. Hiervoor is gebruik gemaakt van de lokale bron en is stapsgewijs de bronsterkte verlaagt, waardoor de uitwijking (amplitude) van het membraan ook verlaagt. Aangezien de verplaatsing gemeten wordt, zal op deze manier ook de signaal-ruis verhouding dalen. Eerst is een referentiemeting uitgevoerd, waarbij geen vervorming werd opgelegd en theoretisch de verplaatsing nul is. Door ruis is dit echter niet het geval, en blijkt gemiddeld van de orde van 10 nm.



Figuur 66: Gemeten out-of-plane verplaatsing wanneer geen vervorming werd opgelegd. Dit geeft de hoeveelheid ruis weer die aanwezig was tijdens de metingen.

Een benadering van de SNR kan nu bepaald worden door de magnitude van de trilling hierdoor te delen. Onderstaand wordt bij de berekende power flow mappen telkens de signaal-ruis verhouding weergegeven.



(a) SNR = 140

(b) SNR = 50

(c) SNR = 110

(d) SNR = 40

(e) SNR = 70

(f) SNR = 30

Figuur 67: Power flow mappen van een membraan met lokale bron bij variërende signaal-ruis verhouding, bij gebruik van een gaussische low pass filter die telkens handmatig zo optimaal mogelijk is afgesteld.

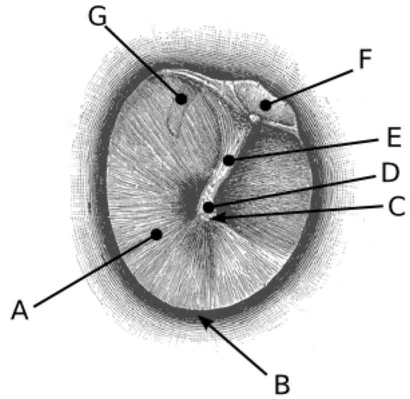
Voor het gebruikte algoritme kan dus besloten worden dat bij benadering de ondergrens voor de SNR gelegen is tussen de 50 en 40. Ook is het zo dat de onzekerheid op de exacte positie van de bron stijgt omdat door aanpassing van de low pass filter alsmaar meer hogere orde spatiale informatie mee verloren gaat. In hoofdstuk 7 werd de grens een stuk lager geschat dan hier. Men moet echter in het achterhoofd houden dat de ruis die daar werd toegevoegd niet exact overeenkomt met de ruis aanwezig tijdens de metingen. Op deze wijze is de ondergrens daar te optimistisch ingeschat.

9. Conclusie

Deze thesis kan gezien worden als de eerste stap richting de introductie van de powerflow techniek in de biomedische context. Startend met de basisconcepten van de interactie van licht is de theoretische achtergrond van de digitale holografie geschetst. Vervolgens zijn de interferometrische principes besproken die hierop gebaseerd zijn. Naast de klassieke double exposure methode is ook de stroboscopische variant overlopen. Met deze techniek is het mogelijk om van een trillend object een niet statisch vervormde toestand op te meten op verschillende tijdstippen, en zo ook andere fysische variabelen zoals snelheid te bepalen. In het geval van een periodische trilling kan hier vervolgens de magnitude- en fasemap uit berekend worden.
Anderzijds is startend van de mechanica van continue lichamen de Kirchoff-Love plate theory besproken. Deze laat toe om onder bepaalde aannamen de krachtmomenten aanwezig in een vlakke plaat te relateren met de out-of-plane vervorming van deze plaat. Dit kon vervolgens worden toegepast in het kader van de tijdsgemiddelde power flow en leverde een relevante uitdrukking. Relevant omdat de variabelen in de uitdrukking uit de (met stroboscopische holografie) gemeten amplitudemappen kunnen bepaald worden.
Een algoritme om deze metingen uit te voeren is opgesteld en getest aan de hand van data afkomstig van eindige elementen modellen. De resultaten toonde aan dat het algoritme in staat is uit deze data de power flow te bepalen, alsook de aanwezige bron(nen) en sink(s) te identificeren. Vervolgens werd aan de data ruis toegevoegd in een eerste poging om een afschatting te bepalen van de benodigde signaal-ruis verhouding.
Van de opstelling die in een optische lab is gebouwd, werd elke component besproken, alsook de gehele opstelling. Deze opstelling liet toe power flow metingen ook daadwerkelijk uit te voeren. Uit de resultaten kan besloten worden dat voor het beschouwde object het inderdaad mogelijk was de power flow en locatie van een bron/sink te bepalen. Het beoogde doel is hiermee bereikt. De resultaten toonde ook aan dat het algoritme in de toekomst zeker nog verder kan verbeterd worden, waardoor het mogelijk robuuster is tegen aanwezige ruis. De hogere orde afgeleide die nodig zijn in de berekening zorgen er namelijk voor dat de methode nogal ruisgevoelig is. Andere methode om deze afgeleide te bepalen, kunnen dus zeker overwogen worden. Het gebruik van een gepulste laser waardoor kortere pulsen en een grotere intensiteit (minder lange metingen) mogelijk zijn, zouden ook bijdragen tot een betere SNR verhouding. Gebruik van een geluidsdichte kamer zou verder statische drukverschillen uitsluiten die tijdens de metingen kunnen optreden. Als laatste is aan de opstelling ook een meting uitgevoerd waarbij gekeken werd tot welke orde van uitwijking power flow metingen mogelijk zijn. Op deze manier kon de informatie tezamen met die afkomstig van de eindige elementen modellen een meer realistische schatting opleveren van de benodigde signaal-ruis verhouding. In de toekomst zou door een theoretische beschrijving van de aanwezige ruis ook een kwantitatieve en dus betere maat voor de SNR kunnen gebruikt worden. Wanneer deze gekend is, kan een geïnformeerde beslissing genomen worden om deze techniek verder te ontwikkelen en toe te passen op relevante biomedische uitdagingen, zoals onderzoek op het trommelvlies.

10. Verder werk

Bij het onderzoek op meer complexe objecten zullen altijd vereenvoudigingen en benaderingen nodig zijn. Dit betekent niet dat hieruit geen zinvolle en tot nu onbekende informatie kan voortvloeien. Een belangrijk gedeelte zal dan ook bestaan in het nagaan van de grote van de fout die deze benaderingen met zich meebrengen. In wat volgt worden een aantal aandachtspunten uiteengezet voor de uitbreiding van de besproken analyse naar complexere objecten. Als voorbeeld wordt hier het trommelvlies besproken.



Figuur 68: Anatomie van het trommelvlies: A pars tensa, B anulus fibrosus, C umbo, D en E hamer, F pars flaccida, G stijgbeugel. (Bron: www.wikipedia.org)

Als eerste moet opgemerkt worden dat het trommelvlies niet kan beschouwd worden als een vlakke plaat, maar eerder een ondiepe conische vorm heeft. Hierdoor zal het mogelijk niet meer volstaan in twee dimensies te werken, maar moet ook een derde dimensie (en dus een derde power flow component) beschouwd worden. Deze nieuwe vorm heeft ook een direct gevolg voor de momenten. Bepaalde momenten die eerder verwaarloosd werden, kunnen nu mogelijk een grotere impact hebben (bv. in-plane membrane moments). Een tweede moeilijkheid hier is dat bepaalde momenten nu ook een koppeling met elkaar kunnen vertonen.

Naast de vorm zijn ook de materiaaleigenschappen van het trommelvlies niet zo eenvoudig. Het trommelvlies is niet isotroop maar eerder orthotroop, waarbij de stijfheid varieert tussen de radiale en circulaire richting. Hierdoor onderscheidt men bij de momenten de Young's modulus E_r, E_θ en Poisson ratio's ν_r, ν_θ. Bijvoorbeeld voor de normal stress en buigmoment in de x-richting:

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu_x\nu_y}(E_x\epsilon_x + \nu_x E_y\epsilon_y)$$

$$M_x = D_x(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})$$

Met D_x de bending stifness langs de x-richting. Door de niet-uniforme dikteverdeling zullen de grenzen van de integraal in de definitie van de momenten een positieafhankelijkheid vertonen: h = h(x,y).

Het trommelvlies is hiernaast ook opgebouwd uit 3 verschillende lagen waaronder collageen, die tezamen ongeveer 0,1 mm dik zijn. Door gebruik te maken van technieken zoals optische coherentie tomografie kan een vormmeting worden uitgevoerd, waaruit de dikte kan bepaald worden (ook μ-CT is hiervoor geschikt). Voor een diktemap van elk van de lagen apart kan histologie worden toegepast. Doordat elke laag andere materiaaleigenschappen heeft, zal hierdoor het neutrale mid-plane niet meer in het midden liggen. Ook dient nu een stuksgewijze integratie uitgevoerd te worden opdat men de juiste momenten bekomt. Als voorbeeld het buigmoment M_x voor een vlakke plaat met drie lagen:

$$M_x = \int_{c-h_1-h_2-h_3}^{c-h_1-h_2} \sigma_{x_1} z dz + \int_{c-h_1-h_2}^{c-h_1} \sigma_{x_2} z dz + \int_{c-h_1}^{c} \sigma_{x_3} z dz$$

Waar c de afstand van het neutrale mid-plane tot het bovenvlak voorstelt, hetgeen telkens moet bepaald worden.

In deze thesis is ook gewerkt met de theorie opgesteld voor dunne platen. Bij statische analyse zou deze analyse ook kunnen gebruikt worden voor het trommelvlies, immers de afmetingen van een trommelvlies zijn ongeveer 8 op 10 mm en de dikte is 0,1 mm. De kleinste afmetingen is dus 80 keer groter dan de dikte. Zoals eerder vermeld is het zo dat men bij statische vervormingen spreekt van dunne platen wanneer de kortste afstand tussen twee randen minstens 50 maal groter is dan de dikte. Bij dynamische vervormingen moet de kortste afstand tussen twee nodale vibratielijnen groter zijn dan 50 maal de dikte. Bij lage frequenties kan bovenstaande theorie nog toegepast worden, maar voor hogere zal een uitbreiding naar de theorie van de dikke platen nodig zijn. Op zich vormt dit geen probleem, deze theorie wordt immers al besproken in [6].

Mogelijk is het ook niet nodig om elk deel van het trommelvlies te beschouwen. De bijdrage van de pars flacidda ten opzichte van deze van de pars tensa bij de overbrenging van de trillingsenergie naar het manubrium is eerder klein tot verwaarloosbaar (pars flacidda is dikker en slapper).

Referenties

[1] Kreis T., *Handbook of Holografic Interferometry: Optical and Digital Methods.* Wiley-VCH, 2005.

[2] De Greef D., *Volveld tijdsgeresolveerde digitale holografie: vierdimensionale beeldvorming van vibraties en vervormingen met nanometer resolutie.* Masterthesis, Universiteit Antwerpen, 2011.

[3] U. Schnars and W. P. O. Jüptner, *Digital recording and numerical reconstruction of holograms.* Meas. Sci. Technol. 13 (2002) R85R101

[4] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells.* Second edition (1987)

[5] R. F. Coelho and L. PYL, *Structural Analysis and Finite Elements.* ULB course, first edition (2014-2015)

[6] Yong Zhang and J. Adin Mann III, *Measuring the structural intensity and force distribution in plates.*, J. Acoust. Soc. Am. 99 (1), January 1996

[7] Jonathan P. Fay, Sunil Puria and Charles R. Steele, *The discordant eardrum.* PNAS, December 26 2006, vol. 103 no. 52

[8] Ye Pu and Hui Meng, *Intrinsic speckle noise in off-axis particle holography.* J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 21, No. 7, July 2004

[9] Amy B. Spalding and J. Adin Mann III, *Placing small constrained layer damping patches on a plate to attain global or local velocity changes.* J. Acoust. Soc. Am. 97, 3617 (1995)

[10] C. Vuye, *Measurement and modeling of sound and vibration fields using a scanning laser Doppler vibrometer.* Doctoraatsthesis, Vrije Universiteit Brussel, 2011.