Cameron-Liebler rechtenverzamelingen: Interessante rechtenverzamelingen in eindige meetkunden

Jonathan Mannaert

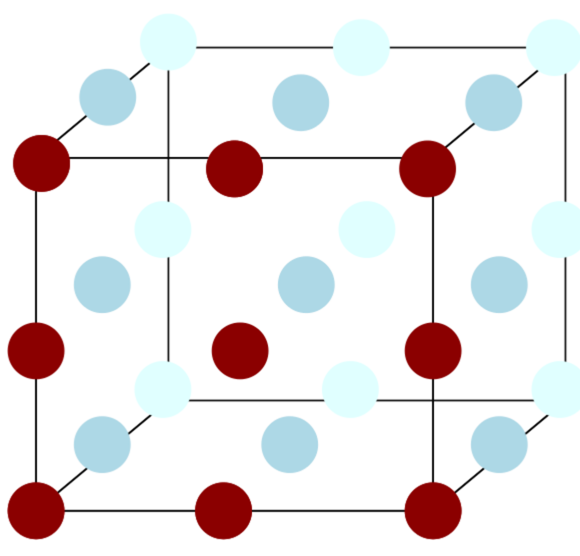
Promotor: Prof. Dr. Leo Storme

Samenvatting

Cameron-Liebler rechtenverzamelingen zijn verzamelingen van rechten die origineel beschreven zijn in projectieve 3-dimensionale ruimten. Dit is een ruimte van punten, rechten en vlakken die voldoet aan enkele eigenschappen. Wat merkwaardig is aan deze rechtenverzamelingen is dat deze op verschillende manieren kunnen beschreven worden. Dit laatste maakt deze rechtenverzamelingen dan ook zo speciaal. Ons doel is om deze rechtenverzamelingen te bestuderen in affiene 3-ruimten, wat een structuur is die nauw gerelateerd is met projectieve 3-ruimten, en te controleren of dezelfde beschrijvingen en eigenschappen geldig blijven. Net zoals onderzoekers Cameron-Liebler rechtenverzamelingen veralgemeend hebben naar hogere dimensie, hebben we dit ook gedaan in het geval van de affiene ruimte.

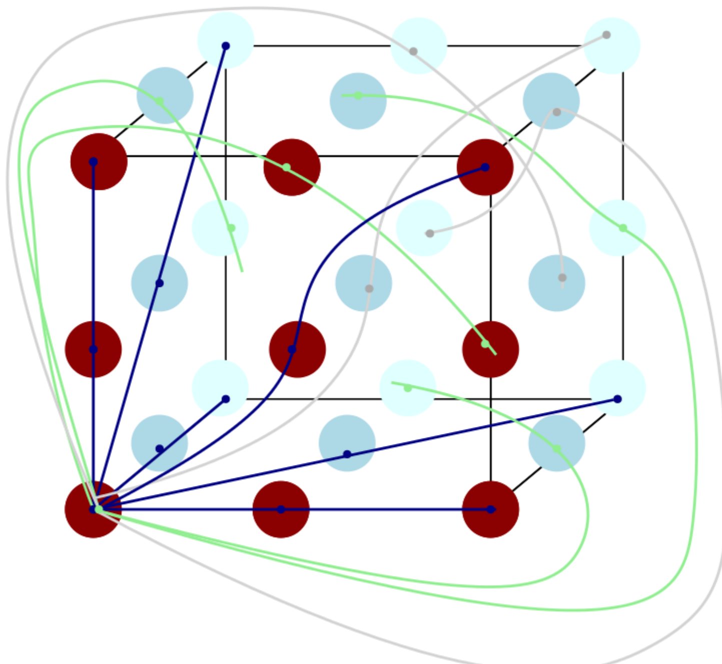
1 Inleiding: affiene ruimte

Laat ons starten met een eenvoudig voorbeeld, dat een affiene 3-ruimte illustreert. Stel je een 3-dimensionaal 3×3-rooster voor. Dit kan je je voorstellen door 3×3-roosters achter elkaar te plaatsen zoals op Figuur 1. Op deze figuur zullen we punten, rechten en vlakken



Figuur 1: 3×3 rooster

moeten identificeren. Omdat we in deze paper geen nood hebben aan de vlakken, beperken we ons tot de punten en de rechten. De punten zijn vanzelfsprekend de bollen van het rooster en door elk punt kunnen we een aantal rechten tekenen. Dit laatste hebben we in Figuur 2 geïllustreerd voor één punt, namelijk de rode bol linksonder. Omdat het aantal rechten in totaal een beetje overweldigend is, is het best te onthouden dat twee punten steeds gelegen zijn in een unieke rechte en dat rechten kunnen snijden, kruisen of evenwijdig zijn. Zoals in vele wiskundecursussen vermeld, heeft evenwijdigheid te maken met het bevat zijn in een vlak, maar hier zullen we niet op in gaan.



Figuur 2: De rechten door een punt

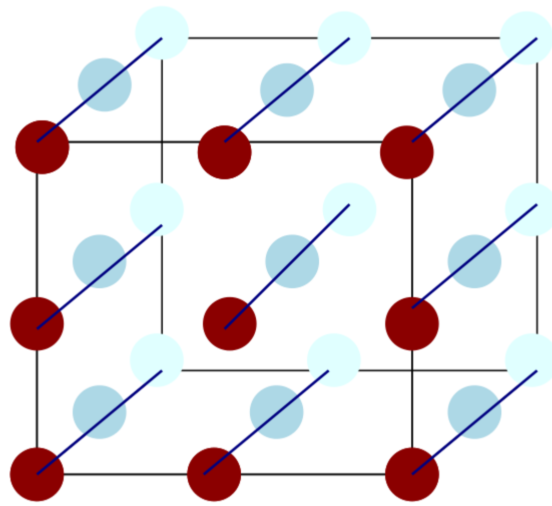
De beknopte constructie die we hier gemaakt hebben, is een eenvoudig voorbeeld van wat een eindige affiene ruimte genoemd wordt. Eindig slaat hier op het feit dat we eindig veel punten hebben.

2 Rechtenverzamelingen

Als we in het gegeven voorbeeld daarnet alle rechten samen nemen, krijgen we de verzameling van alle rechten. Hierin kunnen we ook interessante deelverzamelingen bestuderen:

1. **Een rechtenspread:** is een deelverzameling van alle rechten zodat geen twee rechten in deze verzameling een punt gemeenschappelijk hebben, maar deze rechtenverzameling toch groot genoeg is om alle punten te bedekken.

   Een mooi voorbeeld hiervan zijn de negen rechten die horizontaal in de diepte gaan, zie Figuur 3. We zien duidelijk dat geen twee rechten snijden, maar toch is elk punt wel bevat in een rechte.



Figuur 3: Rechtenspread

2. **Een Cameron-Liebler rechtenverzameling:** is een verzameling $\mathcal{L}$ van rechten zodat *elke* rechtenspread hetzelfde aantal rechten van $\mathcal{L}$ bevat.

   Dit laatste natuurlijk getal x noemen we dan ook de parameter van $\mathcal{L}$ en is dus vast bepaald door de gekozen verzameling $\mathcal{L}$. Dit getal is echter ook belangrijker dan doet vermoeden. Het geeft immers (op een factor na) ook de grootte weer van de corresponderende Cameron-Liebler rechtenverzameling. Stel dat $\mathcal{L}$ een Cameron-Liebler rechtenverzameling is met parameter x in ons voorbeeld, dan is de grootte van deze verzameling gelijk aan $13x$.

3 Andere beschrijvingen voor deze verzamelingen

Zoals reeds vermeld hebben Cameron-Liebler rechtenverzamelingen meer beschrijvingen, dan diegene die we daarnet besproken hebben. Althans toch voor de projectieve ruimten. Veel van deze alternatieve beschrijvingen hebben we kunnen vertalen naar een versie in de affiene ruimten. We geven hier een voorbeeld:

- **Beschrijving 2:** We zullen deze beschrijving specifiek uitleggen voor het gegeven voorbeeld. De gegeven affiene ruimte bezit 27 punten en 117 rechten. Hiermee kunnen we een matrix A beschrijven zodat elke rij overeenkomt met een punt en elke kolom met een rechte. We plaatsen een 1 op een zekere positie van de matrix als het corresponderende punt op de corresponderende rechte gelegen is en anders een 0. Deze matrix die enkel nullen en enen bezit, noemen we ook wel de *incidentiematrix*. Kiezen we nu een kolommatrix w van lengte 27, zodat[1] $A^T \cdot w = v$ een kolommatrix is met enkel de waarden 0 en 1. Dan weten we dat de verzameling van rechten corresponderend met een 1 in v een Cameron-Liebler rechtenverzameling is.

[1]We noteren met A^T de getransponeerde matrix van A.

Opmerkelijk is dat deze beschrijving een totaal andere aard heeft dan die in het vorige deel. De bechrijving met rechtenspreads in het vorige deel kan gezien worden als eerder combinatorisch/telargument, terwijl Beschrijving 2 eerder algebraïsch/rekenkundig is.

4 Bestaan er voorbeelden?

Een typisch voorbeeld van een Cameron-Liebler rechtenverzameling is de verzameling van alle rechten door een vast gekozen punt (zie Figuur 1). Dit kan gezien worden door de allereerste beschrijving te bekijken van Cameron-Liebler rechtenverzamelingen. Elke rechtenspread bezit namelijk één rechte door elk punt. Dit geeft ook meteen de parameter van dit voorbeeld: $x = 1$.

Men kan ook nagaan dat dit voorbeeld het enige voorbeeld is voor de parameter $x = 1$ in een affiene ruimte. Interessant is dat dit niet het enige voorbeeld is in een projectieve ruimte. We zien dus naast de gelijkenissen ook significante verschillen, wat deze studie interessanter maakt.

Ook kan men nagaan dat in tegenstelling tot de projectieve ruimte er in de affiene ruimte geen voorbeelden bestaan van parameter $x = 2$. In het geval dat we in een 3-dimensionale ruimte werken (zoals het gegeven voorbeeld) kunnen we ook andere gevallen uitsluiten en zelfs een bovengrens vinden op het aantal mogelijke parameters.

5 Waarom zijn deze rechtenverzamelingen of affiene deelstructuren zo speciaal?

Over het algemeen heeft het bestuderen van deelstructuren in de affiene ruimte tal van toepassingen. Een voorbeeld hiervan vinden we terug in het spelletje SET (zie [1]), dit is een kaartspel bestaande uit 81 kaarten met op elke kaart een aantal specifieke vormen die op een bepaalde manier met een zekere kleur ingekleurd zijn. Voorbeelden van zo'n kaarten vindt u op Figuur 4. Het doel van het spel is dat iemand kaarten naast elkaar op tafel begint

Figuur 4: Kaarten vanuit SET (Wikipedia)

te leggen en alle spelers tijdens dit proces op zoek gaan naar een *set*. Dit is een verzameling van 3 kaarten zodat elke eigenschap van deze kaarten (kleur, aantal figuren, welke figuur en de manier van inkleuring) bij alle drie dezelfde is of bij alle drie verschillend is. Indien je als speler de set eerst gezien hebt, krijg jij alle kaarten op de tafel. Het doel van het spel is dan ook om zoveel mogelijk kaarten te verzamelen. In feite is het spelletje SET gebaseerd op een affiene ruimte waarbij de kaarten de punten zijn en de set's de rechten, belangrijk hier is dat men kan nagaan dat voor elke twee kaarten er een unieke derde kaart bestaat zodat deze drie een set vormen. Dit voorbeeld toont ook het belang van het bestuderen van deelstructuren in de affiene ruimte, we geven een klein voorbeeld: Hoeveel kaarten zal de deler maximaal op tafel moeten leggen vooraleer we zeker zijn dat er een set bij zit. Deze vraag kan herleid worden naar vragen wat het maximaal aantal punten is in de corresponderende affiene ruimte zodat geen drie punten op een rechte liggen. Tellen we bij dit getal er dan één bij, dan krijgen we ons antwoord op de eerste vraag aangezien dit onmogelijk een verzameling punten (respectievelijk kaarten) kan zijn waarvoor elke drie niet op een rechte (respectievelijk in een set) liggen. Een verzameling punten met de eigenschap dat geen drie punten op een rechte liggen is een gekende affiene deelstructuur die reeds bestudeerd is en waarvan de maximale grootte (Zie [2]) gekend is, namelijk maximaal 20 punten in dit geval. Plus één bekomen we dus 21 kaarten. Hierdoor heeft het bestuderen van deelstructuren van de affiene ruimte zeker belang.

Een tweede reden waarom we deze specifieke rechtenverzamelingen (en ook algemenere dimensionale ruimte verzamelingen) in eerste instantie bestuderen is omdat de studie hiervan een baat heeft in classificaties van specifieke deelgroepen die verbanden hebben met de affiene ruimte. Het is in het algemeen ook interessant om structuren (bijvoorbeeld Cameron-Liebler rechtenverzamelingen) in verschillende contexten te plaatsen en te bekijken welke eigenschappen er veranderen en welke niet. Dit geeft een beter begrip van deze structuren en dit kan, in combinatie met de 5-tal gevonden alternatieve beschrijvingen, leiden tot het herkennen van deze rechtenverzamelingen in andere contexten, wat toekomstig onderzoek enkel vooruit kan helpen.

Indien dit document fouten zou bevatten of verdere vragen zou oproepen, aarzel dan niet om deze te melden: Jonathan.Mannaert@telenet.be

Referenties

[1] Wikipedia, *https://en.wikipedia.org/wiki/Set_(card_game)*, 15 augustus 2019.

[2] Versluis Nina D., *ON THE CAP SET PROBLEM: upper bounds on maximal cardinalities of caps in dimensions seven to ten*, Bachelorproef, Delft University of Technology, juli 2017.